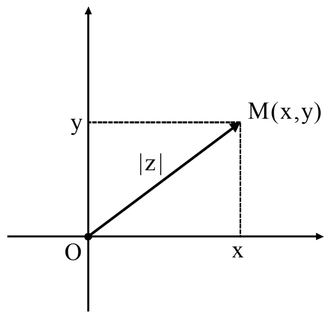
ΜΕΤΡΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Ορισμός

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$ και $M(x, y)$ η εικόνα του στο μιγαδικό επίπεδο. Ορίζουμε ως μέτρο του z την απόσταση του M από την αρχή O, δηλαδή

$|z| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$



Π.χ. $|5 - 12i| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{169} = 13$.

Όταν ο μιγαδικός z είναι πραγματικός, τότε $z = x + 0i = x \in \mathbb{R}$, και $|z| = \sqrt{x^2 + 0^2} = |x|$. Δηλαδή το μέτρο ενός πραγματικού αριθμού είναι ίσο με την απόλυτη τιμή του.

Ιδιότητες

Αν z_1, z_2, z είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1. $|z| = |\overline{z}| = |-z|$

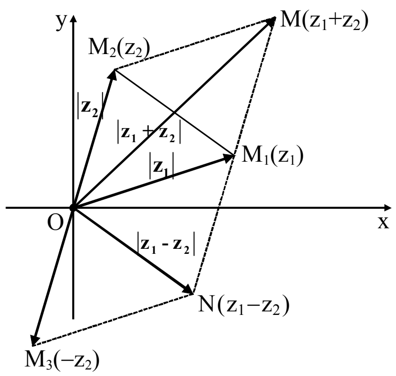
2. $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$

3. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

4. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

5. $|z^\nu| = |z|^\nu$

6. $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ (τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο OM_1M)

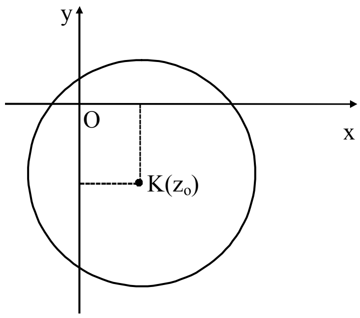


Μέτρο διαφοράς μιγαδικών

Στο παραπάνω σχήμα ισχύει $(M_2M_1) = |\overrightarrow{M_2M_1}| = |\overrightarrow{ON}| = |z_1 - z_2|$.

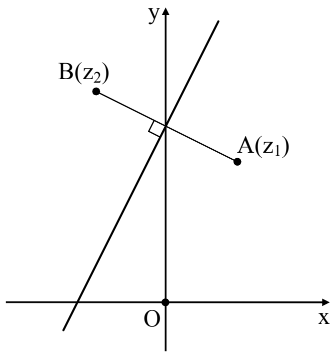
Επομένως το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους

* Έτσι η εξίσωση $|z-z_o|=\rho$, $\rho>0$ παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_o)$ και ακτίνα ρ.



Π.χ. η εξίσωση $|z-2+3i|=5 \Leftrightarrow |z-(2-3i)|=5$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το K(2, -3) και ακτίνα ρ = 5.

* Η εξίσωση $|z-z_1|=|z-z_2|$ παριστάνει τη μεσοκάθετο του τμήματος με άκρα τα σημεία $A(z_1)$ και $B(z_2)$.



Π.χ. η εξίσωση

$|z-2-3i|=|z+2-5i| \Leftrightarrow |z-(2+3i)|=|z-(-2+5i)|$

παριστάνει τη μεσοκάθετη του τμήματος AB που έχει άκρα τα A(2, 3) και B(-2, 5).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

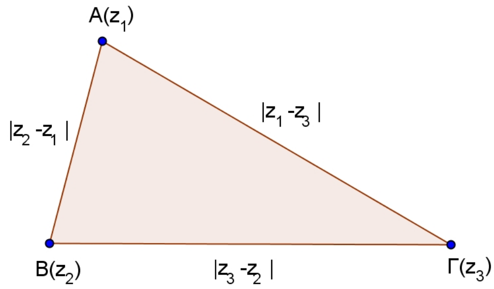
1. Όταν δίνεται μια ισότητα μέτρων $|z|=|w|$ ή μια ανισότητα $|z|>|w|$, τότε συνήθως υψώνουμε και τα δύο μέλη στο τετράγωνο και συνεχίζουμε ως εξής:
$|z|=|w| \Leftrightarrow |z|^2=|w|^2 \Leftrightarrow z\bar{z}=w\bar{w} \Leftrightarrow ......$

2. Για να λύσουμε μια εξίσωση που περιέχει z, $\bar{z}$, $|z|$, τότε θέτουμε z = x + yi, $x,y\in IR$, οπότε $\bar{z}=x-yi$ και $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

3. Αν δύο μιγαδικοί είναι ίσοι, τότε έχουν και ίσα μέτρα. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Αυτή την παρατήρηση τη χρησιμοποιούμε συνήθως όταν έχουμε ισότητα μεγάλων δυνάμεων μιγαδικών αριθμών.
Π.χ. $z^\nu=w^\nu \Rightarrow |z^\nu|=|w^\nu| \Leftrightarrow |z|^\nu=|w|^\nu \Leftrightarrow |z|=|w| \Leftrightarrow ......$

4. Όταν δίνεται ότι $|z_1|=|z_2|=...=|z_\nu|$, τότε θέτουμε $|z_1|=|z_2|=...=|z_\nu|=\rho$ κι επομένως $|z_1|^2=|z_2|^2=...=|z_\nu|^2=\rho^2 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1=z_2\bar{z}_2=...=z_\nu\bar{z}_\nu=\rho^2$, από όπου προκύπτει ότι $\bar{z}_1=\frac{\rho^2}{z_1}$, $\bar{z}_2=\frac{\rho^2}{z_2}$, …, $\bar{z}_\nu=\frac{\rho^2}{z_\nu}$ και $z_1=\frac{\rho^2}{\bar{z}_1}$, $z_2=\frac{\rho^2}{\bar{z}_2}$, …, $z_\nu=\frac{\rho^2}{\bar{z}_\nu}$.

5. Αν Α, Β, Γ οι εικόνες των διαφορετικών μιγαδικών αριθμών z_1, z_2, z_3, τότε



$(AB) = |z_2 - z_1|$, $(B\Gamma) = |z_3 - z_2|$ και

$(\Gamma A) = |z_1 - z_3|$ και έτσι:

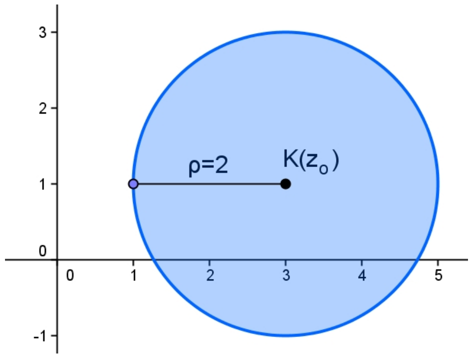
α) για να αποδείξουμε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, αρκεί να δείξουμε ότι

$|z_2 - z_1| = |z_3 - z_2| = |z_1 - z_3|$,

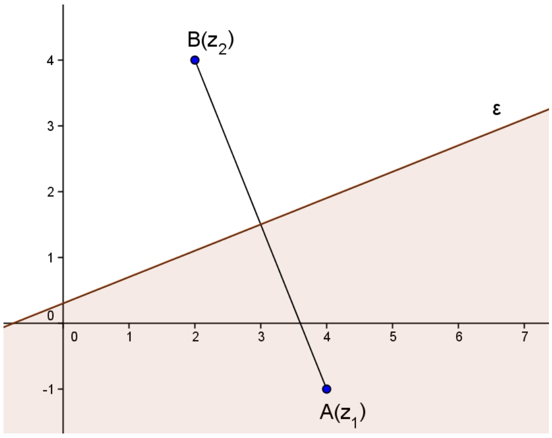
β) για να αποδείξουμε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, αρκεί να δείξουμε ότι

$|z_2 - z_1| = |z_3 - z_2|$ ή $|z_1 - z_3| = |z_3 - z_2|$ ή $|z_2 - z_1| = |z_1 - z_3|$.

γ) για να αποδείξουμε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α, αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει $(B\Gamma)^2 = (AB)^2 + (\Gamma A)^2 \Leftrightarrow |z_3 - z_2|^2 = |z_2 - z_1|^2 + |z_1 - z_3|^2$.



6. Επειδή η εξίσωση $|z - z_o| = \rho$, $\rho > 0$ παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_o)$ και ακτίνα ρ, η ανίσωση $|z - z_o| \le \rho$ παριστάνει τον κυκλικό δίσκο με κέντρο το σημείο $K(z_o)$ και ακτίνα ρ. Επίσης η εξίσωση $|z - z_o| > \rho$ παριστάνει τα εξωτερικά σημεία του παραπάνω κύκλου.
Π.χ. η ανίσωση $|z - (3 + i)| \le 2$ παριστάνει τον κυκλικό δίσκο με κέντρο Κ(3, 1) και ακτίνα ρ = 2.



7. Επειδή η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$ παριστάνει τη μεσοκάθετο του τμήματος με άκρα τα σημεία $A(z_1)$ και $B(z_2)$, η ανίσωση $|z - z_1| \le |z - z_2|$ παριστάνει το ημιεπίπεδο που ορίζεται από την παραπάνω μεσοκάθετο και το σημείο $A(z_1)$.
Π.χ. η ανίσωση $|z - (4 - i)| \le |z - (2 + 4i)|$ παριστάνει το ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ με Α(4, -1), Β(2, 4)και το σημείο Α.

8. Η εξίσωση $|z - z_1| + |z - z_2| = 2\alpha$, με $\alpha > 0$ και $|z_2 - z_1| < 2\alpha$, παριστάνει έλλειψη με εστίες τα σημεία $A(z_1)$, $B(z_2)$ και σταθερό άθροισμα 2α.

9. Η εξίσωση $\big||z - z_1| - |z - z_2|\big| = 2\alpha$, με $\alpha > 0$ και $|z_2 - z_1| > 2\alpha$, παριστάνει υπερβολή με εστίες τα σημεία $A(z_1)$, $B(z_2)$ και σταθερή διαφορά 2α.
Οι δύο κλάδοι της παραπάνω έλλειψης έχουν εξισώσεις $|z - z_1| - |z - z_2| = 2\alpha$ και $|z - z_2| - |z - z_1| = 2\alpha$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε το μέτρο των μιγαδικών αριθμών $z_1=\frac{(\sqrt{2}+i)^3}{i(1-i\sqrt{3})^2}$, $z_2=\frac{3+2i}{i}-1-i$, $z_3=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{\nu}$, $\nu\in N^*$.

2. Στο μιγαδικό επίπεδο να παραστήσετε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:
α) $|\overline{z}|=1$
β) $|2z - 1 + 4i| = 4$
γ) $|z - 3i| \le 1$
δ) $2 < |z - 2 + 3i| < 3$.

3. Να λυθεί η εξίσωση $|z|+z=2+i$.

4. Να λυθεί η εξίσωση $|z|+z^2=0$.

5. Έστω οι μιγαδικοί z, z + iz, $z\neq 0$, και Α, Β αντίστοιχα οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο. Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων.

6. Να βρεθεί το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει $\left|\frac{z}{z-3}\right|=\frac{1}{2}$.

7. Αν είναι $\left|\frac{z-9}{z-1}\right|=3$, $z\neq 1$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο γράφει κύκλο.

8. Αν ισχύει ότι $|z - 11| = 3|z - 3|$, να αποδείξετε ότι $|z - 2| = 3$ και να βρείτε το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών z.

9. α) Αν $\left|\frac{2z-1}{z+2}\right|=3$ και $z\neq -2$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο διαγράφει κύκλο.
β) Να βρεθεί ο $\alpha\in IR$, ώστε η εικόνα του $z = (2\alpha - 5)+(\alpha - 2)i$ να ανήκει στον παραπάνω κύκλο.

10. Δίνεται ο μιγαδικός $z = (2x - 3) + (2y - 1)i$ με $x, y\in IR$. Αν ισχύει $|2z-1+3i|=3$ να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ(x, y) είναι κύκλος.

11. Αν $(1+z)^{\nu}=(1-z)^{\nu}$, $\nu\in N^*$, να αποδείξετε ότι ο z είναι φανταστικός αριθμός.

12. Αν $\nu \in N^*$ και $z \in C$ με $(1 + iz)^\nu = (1 - iz)^\nu$, να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός.

13. Αν $z \in C$ και $|z+16| = 4|z+1|$, να αποδείξετε ότι $|z| = 4$.

14. Αν z_1, z_2 είναι διαφορετικοί μιγαδικοί και ο αριθμός $w = \dfrac{i(z_1+z_2)}{z_1-z_2}$ είναι πραγματικός, να αποδείξετε ότι $|z_1| = |z_2|$ και αντιστρόφως.

15. Έστω μιγαδικός αριθμός z και πραγματικός αριθμός $\alpha \neq 0$ με $z \neq \alpha i$. Για τον αριθμό $w = \dfrac{z+\alpha i}{iz+\alpha}$, να αποδείξετε ότι:
α) ο w είναι φανταστικός, αν και μόνο αν ο z είναι φανταστικός.
β) είναι $|w| = 1$, αν και μόνο αν ο z είναι πραγματικός.

16. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα και η διαφορά δύο μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών έχουν το ίδιο μέτρο, αν και μόνο αν το πηλίκο τους είναι φανταστικός αριθμός.

17. Για κάθε $z_1, z_2 \in C$, να αποδείξετε ότι $|z_1 + z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = 4\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2)$.

18. Αν ο z είναι μη μηδενικός μιγαδικός και ο $w = z + \dfrac{1}{z}$ είναι πραγματικός, να αποδείξετε ότι $z \in IR$ ή $|z|=1$.

19. α) Αν με $|z_1| = |z_2| = 1$, να αποδείξετε ότι $\left|\dfrac{z_1+z_2}{1+\overline{z}_1 z_2}\right| = 1$.

β) Αν για τους $z_1, z_2 \in C$, με $z_2 \neq 0$, ισχύει $|z_1+z_2| = |z_1-z_2|$, να δείξετε ότι $\dfrac{z_1}{z_2} \in I$ και αντιστρόφως.

20. Έστω οι μιγαδικοί z_1 και z_2 με $|z_1| = |z_2| = 2$ και $z_1z_2 \notin IR$, $z_1 + z_2 \neq 0$. Να βρεθεί ο $\lambda \in IR$, ώστε ο μιγαδικός $w = \dfrac{z_1+z_2}{\lambda+z_1z_2}$ να είναι πραγματικός.

21. Αν $z_1, z_2 \in C$ με $|z_1| = |z_2|$ και $z_1 \neq z_2$, να δείξετε ότι
α) ο μιγαδικός $z = \dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$ είναι φανταστικός,
β) ο μιγαδικός z^2 είναι πραγματικός.

22. Αν z_1, z_2 είναι διαφορετικοί μιγαδικοί, με εικόνες Α, Β αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $z = \dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$ είναι φανταστικός, αν και μόνο αν το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές ή τα σημεία Ο, Α, Β είναι συνευθειακά.

23. Έστω $w=\dfrac{z-\bar{u}}{z-u}, u,z\in C,$ με $\mathrm{Im}(u)\neq 0, z\neq u.$ Να αποδείξετε ότι $z\in IR \Leftrightarrow |w|=1$.

24. Αν $|z|=1$ και $w=\dfrac{z+2i}{2iz-1}, z\neq -\dfrac{1}{2}i$, να αποδείξετε ότι $|w|=1$.

25. Αν $|z|=|w|=1,$ να αποδείξετε ότι $\dfrac{z+w}{1+zw}\in IR$, όπου $1+zw\neq 0$.

26. Αν $w,z\in C$ και $\bar{z}w=1,$ να δείξετε ότι:
α) $z+w\neq 0,$
β) οι αριθμοί $\dfrac{1+zw}{z+w}$, $\dfrac{1-zw}{z+w}i$, $\dfrac{z-w}{z+w}$ είναι πραγματικοί.

27. Έστω $z_1,z_2\in C^*$ και $|z_1-z_2|=|z_1+z_2|$. Αν M_1, M_2 είναι οι εικόνες των z_1, z_2 αντίστοιχα, τότε να δείξετε ότι:
α) $M_1\hat{O}M_2=90^o$, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων,
β) $|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2$.

28. Αν M_1 και M_2 είναι οι εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2 αντίστοιχα και $z_2=2z_1-\dfrac{1}{z_1}$, να αποδείξετε ότι το M_1 κινείται σε κύκλο κέντρου O(0, 0) και ακτίνας 1, τότε το M_2 κινείται σε μια έλλειψη.

29. Αν $\left|\dfrac{z}{1-z}\right|<1$, με $z\in C$, να αποδείξετε ότι $\mathrm{Re}(z)<\dfrac{1}{2}$ και αντίστροφα.

30. Αν $z_1=24+7i$ και $|z_2|=6$, να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του $|z_1+z_2|$.

31. Αν $w,z\in C$ και $zw=1$ και η εικόνα του z κινείται στον κύκλο $|z-3+4i|=5$, να αποδειχθεί ότι η εικόνα του w κινείται σε μια ευθεία.

32. Αν η εικόνα του μιγαδικού z διαγράφει στο μιγαδικό επίπεδο τον κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας 2, να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού $w=z+\dfrac{1}{z}$ διαγράφει έλλειψη.

33. Αν η εξίσωση $(1+iz)^{\nu}=w(1-iz)^{\nu}, \nu\in N^*$, έχει πραγματική ρίζα, να αποδείξετε ότι $|w|=1$.

34. Αν οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3, z έχουν εικόνες A_1, A_2, A_3, P αντίστοιχα και $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, $|z| = 3$, $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, να αποδειχθεί ότι $(PA_1)^2 + (PA_2)^2 + (PA_3)^2 = 30$.

35. Έστω $w, z \in C$, $z \neq 1$ και $w = \dfrac{iz + 2i}{1 - z}$.

α) Αν $|w| = 1$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z.

β) Αν $|z| = 2$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του w.

36. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $(1 + iz)^{2007} = \dfrac{2006 + i}{1 + 2006i}$ δεν έχει πραγματική ρίζα.

37. Αν $|z_1| = |z_2| = 1$ και $z_1 + z_2 - z_1 z_2 + 1 = 0$, τότε:

α) να αποδειχθεί ότι $z_1 + z_2 + z_1 z_2 - 1 = 0$,

β) να βρεθούν οι z_1, z_2.

38. Αν $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \rho$ $(\rho > 0)$, τότε να δείξετε ότι $\rho|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$.

39. Αν $z_1, z_2, z_3 \in C$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, $|z_1| = |z_2| = |z_3|$, να δείξετε ότι:

α) $z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = 0$

β) $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$

40. α) Αν $|z_1| = |z_2| = 1$, να αποδείξετε ότι είναι ισοδύναμες οι ισότητες:
$z_1 + z_2 - z_1 z_2 = -1$ και $z_1 + z_2 + z_1 z_2 = 1$.
β) Να βρείτε τους μιγαδικούς z_1, z_2 για τους οποίους είναι $|z_1| = |z_2| = 1$ και $z_1 + z_2 - z_1 z_2 + 1 = 0$

41. Έστω οι μιγαδικοί z, w με $|z| = |w| = 1$ και πραγματικός αριθμός α. Αν θέσουμε $z_1 = z + w + zw + \alpha$ και $z_2 = z + w + \alpha zw + 1$, να αποδείξετε ότι:
α) $z_1 = zw\bar{z}_2$ και
β) $|z_1| = |z_2|$.

42. Αν $z_1, z_2 \in C$ και $z_2 \neq 0$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των αριθμών $w_1 = z_1 + z_2$, $w_2 = z_1 - z_2$, $w_3 = z_1 + i\sqrt{3}\, z_2$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.

43. α) Να βρείτε το μιγαδικό αριθμό z για τον οποίο ισχύει $|z - i| = |z - 1| = |z - 2|$.
β) Να βρείτε το περίκεντρο του τριγώνου με κορυφές τα σημεία Α(0, 1), Β(1, 0), Γ(2, 0).

44. α) Αν $z \in C$, ώστε να ισχύει $z^2 + z + 1 = 0$, να δείξετε ότι $|z| = |z + 1| = 1$.

β) Βρείτε το μιγαδικό z για τον οποίο ισχύει $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |z-1|$.

45. Αν $z \in C$ με $|z-2| + |z+2| = 8$, να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M(z) είναι μια έλλειψη.

46. Να βρείτε το σύνολο των σημείων του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει: $|z+5| = 6 + |z-5|$.

47. Έστω ο αριθμός $u = \frac{2i - z}{z-5}$, όπου $z = x + yi$, $x, y \in IR$.

α) Να γραφεί ο αριθμός u στη μορφή $\alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in IR$.

β) Αν ο αριθμός u είναι πραγματικός, να αποδειχθεί ότι η εικόνα του M κινείται πάνω σε ευθεία ε της οποίας να βρείτε την εξίσωση. Μπορεί το σημείο M να πάρει οποιαδήποτε θέση πάνω στην ε;

γ) Αν ο αριθμός u είναι πραγματικός, να βρεθεί ο μιγαδικός z που έχει το μικρότερο μέτρο.

δ) Αν ο u είναι φανταστικός να βρείτε την εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία κινείται το M.

48. Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \frac{1+z^{\nu}}{(1+z)^{\nu}}$, $z \neq -1$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f\left(\frac{1}{z}\right) = f(z)$.

β) Αν $|z| = 1$, τότε $f(z) \in IR$.

49. Αν οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 στο μιγαδικό επίπεδο είναι εσωτερικά σημεία του κύκλου C: $x^2 + y^2 = 1$, να αποδείξετε ότι: $|z_1 - z_2| < |1 - \overline{z}_1 z_2|$.

50. α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z που επαληθεύουν την ισότητα $|4z - i| = 2|\overline{z} + i|$.

β) Αν $z_1, z_2 \in C$ και $|4z_1 - i| = 2|\overline{z}_1 + i|$, $|4z_2 - i| = 2|\overline{z}_2 + i|$, να αποδειχθεί ότι $|z_1 - z_2| \leq 1$.

51. Να βρείτε που βρίσκονται στο μιγαδικό επίπεδο οι μιγαδικοί αριθμοί που επαληθεύουν τη σχέση $|1-z|^2 \leq 1 - |z|^2$, $z \in C$.

52. Αν $\lambda > 0$, να αποδειχθεί ότι $|z_1 + z_2|^2 \leq (1+\lambda)|z_1|^2 + (1+\frac{1}{\lambda})|z_2|^2$, $z_1, z_2 \in C$.

53. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in IR$ ισχύει $\varphi(x) = x^2 - 2|z_1 - z_2|x + (1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2) \geq 0$.

54. α) Δείξτε ότι $\left|\frac{z-i}{z+i}\right| < 1 \Leftrightarrow Im(z) > 0$.

β) Αν ισχύει $\left|\frac{z_1 - i}{z_1 + i}\right| + \left|\frac{z_2 - i}{z_2 + i}\right| + \ldots + \left|\frac{z_k - i}{z_k + i}\right| < 1$, να δείξετε ότι $\left|\frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_k - i}{z_1 + z_2 + \ldots + z_k + i}\right| < 1$.

55. Αν $\left|\frac{z_1 - i}{z_1 + i}\right| + \left|\frac{z_2 - i}{z_2 + i}\right| + \ldots + \left|\frac{z_v - i}{z_v + i}\right| < 2$, $v \geq 2$, να αποδειχθεί ότι ένας το πολύ από τους μιγαδικούς z_1, z_2, …, z_v μπορεί να είναι πραγματικός.

56. Δύο μικρές μύγες Α και Β κινούνται πάνω στο μιγαδικό επίπεδο και είναι εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2 αντίστοιχα, ώστε να ισχύει συνεχώς $z_1 = \frac{4+3i}{5} z_2$.
Να αποδειχθεί ότι:
α) οι δύο μύγες Α και Β ισαπέχουν συνεχώς από την αρχή των αξόνων.
β) αν η μύγα Α κινείται πάνω στον κύκλο με κέντρο Κ(1, 3) και ακτίνα $\rho = 2$, τότε και η μύγα Β κινείται πάνω σε έναν ορισμένο κύκλο, του οποίου να βρεθούν το κέντρο και η ακτίνα.

57. Ένα κινητό κινείται στο μιγαδικό επίπεδο, ώστε την τυχαία χρονική στιγμή $t \geq 0$ να βρίσκεται στο σημείο που είναι εικόνα του μιγαδικού $z = 2t - 1 + (t - 3)i$.
α) Να αποδείξετε ότι το κινητό κινείται πάνω σε μια ορισμένη ευθεία.
β) Να βρείτε τη χρονική στιγμή που το κινητό απέχει από την αρχή των αξόνων τη μικρότερη απόσταση.