ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμοί

Μία συνάρτηση f λέγεται:

1. γνησίως αύξουσα σ' ένα υποσύνολο Β του πεδίου ορισμού της όταν για κάθε x_1, $x_2 \in B$ με $x_1 < x_2$ ισχύει ότι $f(x_1) < f(x_2)$.

2. γνησίως φθίνουσα σ' ένα υποσύνολο Β του πεδίου ορισμού της όταν για κάθε x_1, $x_2 \in B$ με $x_1 < x_2$ ισχύει ότι $f(x_1) > f(x_2)$.

3. αύξουσα σ' ένα υποσύνολο Β του πεδίου ορισμού της όταν για κάθε x_1, $x_2 \in B$ με $x_1 < x_2$ ισχύει ότι $f(x_1) \leq f(x_2)$.

4. φθίνουσα σ' ένα υποσύνολο Β του πεδίου ορισμού της όταν για κάθε x_1, $x_2 \in B$ με $x_1 < x_2$ ισχύει ότι $f(x_1) \geq f(x_2)$.

- Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' ένα σύνολο Β, τότε λέμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο Β.
- Αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα στο Β, τότε λέμε ότι είναι μονότονη στο Β.

Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ.

α) Αν $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

β) Αν $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Παρατηρήσεις

- Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει αφού μπορεί $f'(x) \geq 0$ στο Δ ($f'(x) = 0$ σε μεμονωμένα σημεία) και η f να είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

- Όταν θέλουμε να προσδιορίσουμε μια παράμετρο ώστε η f να είναι γνησίως μονότονη στο Δ τότε απαιτούμε $f(x) > 0$ ή $f'(x) \geq 0$, όπου ο μηδενισμός της f΄ αφορά πεπερασμένο πλήθος σημείων του Δ.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

ΜΕΘΟΔΟΣ 1η

Για να βρούμε τη μονοτονία της f εργαζόμαστε ως εξής:

1. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f.
2. Υπολογίζουμε την παράγωγο f΄.
3. Λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 0$.
4. Λύνουμε την ανίσωση $f'(x) > 0$ (Με τη βοήθειά της βρίσκουμε το πρόσημο της f΄. Υπάρχουν και άλλοι τρόποι να βρούμε πρόσημο. Θυμηθείτε την εύρεση προσήμου με τη βοήθεια του Θεωρήματος Bolzano).
5. Φτιάχνουμε τον πίνακα προσήμου της f΄ και απ' αυτόν βρίσκουμε την μονοτονία της f.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

α) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

β) $g(x) = (x - 1)e^{x} - (x + 1)e^{-x}$.

Λύση

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A_f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$: $f'(x) = \left(\dfrac{x}{\ln x}\right)' = \dfrac{\ln x - x\dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e.$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e.$

Το πρόσημο της f΄ και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		1		e		$+\infty$
f΄	‖	-	‖	-	0	+	
f	‖	↘	‖	↘		↗	

Επομένως, η συνάρτηση f είναι:

- γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα (0, 1) και (1, e].
- γνησίως αύξουσα στο [e, $+\infty$).

β) Η συνάρτηση $f(x) = (x - 1)e^x - (x + 1)e^{-x}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο:

$f'(x) = [(x - 1)e^x - (x + 1)e^{-x}]' = e^x + (x - 1)e^x - e^{-x} + (x + 1)e^{-x} = xe^x + xe^{-x} = x(e^x + e^{-x})$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(e^x + e^{-x}) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x(e^x + e^{-x}) > 0 \Leftrightarrow x > 0$, αφού $e^x + e^{-x} > 0$.

Το πρόσημο της f΄ και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f΄	-	0	+
f	↘		↗

Επομένως, η συνάρτηση f είναι:

- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα ($-\infty$, 0] και
- γνησίως αύξουσα στο [0, $+\infty$).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 15}, & x \le 1 \\ x^2 - 10x + 13, & x > 1 \end{cases}$$

Λύση

Η f είναι συνεχής στο διάστημα ($-\infty$, 1) ως ρίζα συνεχούς συνάρτησης, και συνεχής στο διάστημα (1, $+\infty$) ως πολυωνυμική συνάρτηση.

Στο $x_o = 1$ εξετάζουμε αν είναι συνεχής με τον ορισμό:

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \sqrt{x^2 + 15} = \sqrt{1^2 + 15} = \sqrt{16} = 4$.

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^2 - 10x + 13) = 1^2 - 10\cdot 1 + 13 = 4$ και $f(1) = 4$.

Επειδή $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$, η f είναι συνεχής στο $x_o = 1$ και σ' όλο το $\Re$.

Στο $(-\infty, 1)$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+15}}.(x^2+15)' = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+15}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+15}}$.

Στο $(1, +\infty)$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 2x - 10 = 2(x - 5)$.

Στο $x_o = 1$ εξετάζουμε αν είναι παραγωγίσιμη με τον ορισμό:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{x^2+15}-4}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{(\sqrt{x^2+15}-4)(\sqrt{x^2+15}+4)}{(x-1)(\sqrt{x^2+15}+4)} =$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+15-16}{(x-1)(\sqrt{x^2+15}+4)} = \lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+15}+4)} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+15}+4} =$$

$$\frac{1+1}{\sqrt{1^2+15}+4} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-10x+13-4}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-10x+9}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x-9)}{x-1} =$$

$$\lim_{x\to 1^+}(x - 9) = 1 - 9 = -8.$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \neq \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 1$.

Η παράγωγος συνάρτηση της f είναι: $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+15}}, & x<1 \\ 2(x-5), & x>1 \end{cases}$.

Το πρόσημο της f΄ και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		0		1		5		$+\infty$
f΄		-		+	‖	-		+	
f		↘		↗		↘		↗	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$, $[1, 5]$ και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[0, 1]$, $[5, +\infty)$.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3</u>

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\ln x}{\ln(x+1)}$.

<u>Λύση</u>

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A_f = (0, +\infty)$.

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$: $f'(x) = \left[\dfrac{\ln x}{\ln(x+1)}\right]' = \dfrac{\dfrac{1}{x}\ln(x+1) - \ln x\dfrac{1}{x+1}}{\left[\ln(x+1)\right]^2} =$

$\dfrac{(x+1)\ln(x+1) - x\ln x}{x(x+1)\left[\ln(x+1)\right]^2}$.

Επειδή η συνάρτησης $\ln x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, για κάθε $x > 0$ ισχύει: $\ln(x+1) > \ln x$ αφού $x + 1 > x$.

Οι δύο παραπάνω ανισώσεις αποτελούνται από θετικούς αριθμούς κι επομένως πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη έχουμε $(x+1)\ln(x+1) > x\ln x$.

Άρα, $f'(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$ κι επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

ΜΕΘΟΔΟΣ 2η

Για να βρούμε το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f εργαζόμαστε ως εξής:

1. Βρίσκουμε τη μονοτονία της f.
2. Υπολογίζουμε το σύνολο τιμών της f για κάθε διάστημα μονοτονίας της.
3. Το σύνολο τιμών της f είναι η ένωση όλων των συνόλων που βρίσκουμε στο 2ο βήμα.

Με τον παρακάτω πίνακα θυμίζουμε πως βρίσκουμε σύνολο τιμών μιας συνεχούς και γνησίως μονότονης συνάρτησης σε διάστημα.

Διάστημα	**Μονοτονία**	**Σύν. Τιμών**
$[\alpha, \beta]$	$\uparrow$	$[f(\alpha), f(\beta)]$
	$\downarrow$	$[f(\beta), f(\alpha)]$
(α, β)	$\uparrow$	$(\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x), \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x))$
	$\downarrow$	$(\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x), \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x))$
$[\alpha, \beta)$	$\uparrow$	$[f(\alpha), \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x))$
	$\downarrow$	$(\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x), f(\alpha)]$
$(\alpha, \beta]$	$\uparrow$	$(\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x), f(\beta)]$
	$\downarrow$	$[f(\beta), \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x))$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Να βρεθεί το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = x^2 + 8x - 8$

β) $f(x) = -2\ln x + 3$, $x \in (0, 1]$

γ) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.

Λύση

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A_f = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = (x^2 + 8x - 8)' = 2x + 8 = 2(x + 4)$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -4$.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > -4$.

Η μονοτονία της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		↘		↗	

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^2 + 8x - 8) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^2) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^2 + 8x - 8) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^2) = +\infty$

Η f στο $A_1 = (-\infty, -4]$ είναι γνησίως φθίνουσα κι επομένως έχει σύνολο τιμών σ' αυτό το $f(A_1) = [f(-4), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)) = [-24, +\infty)$.

Η f στο $A_2 = [-4, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα κι επομένως έχει σύνολο τιμών σ' αυτό το $f(A_2) = [f(-4), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)) = [-24, +\infty)$.

Το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A_1) \cup f(A_2) = [-24, +\infty)$.

β) Για κάθε $x \in (0, 1]$: $f'(x) = (-2\ln x + 3)' = -\dfrac{2}{x} < 0$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ κι επομένως έχει σύνολο τιμών το $f(A) = [f(1), \lim\limits_{x\to0^+} f(x)) = [3, +\infty)$, αφού $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+}(-2\ln x + 3) = +\infty$.

γ) Η $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ έχει πεδίο ορισμού το $A_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1\}$: $f'(x) = \left(\dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}\right)' = \dfrac{(2x - 2)(x - 1) - (x^2 - 2x + 2)}{(x - 1)^2} =$

$\dfrac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$.

$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 2x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$ ή $x = 2.$

$f'(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} > 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 2x > 0 \;\Leftrightarrow\; x < 0$ ή $x > 2.$

Η μονοτονία της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	

Βρίσκουμε τα όρια της f στο 1 και στα $-\infty$, $+\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to+1^-} \dfrac{x^2-2x+2}{x-1} = -\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to+1^-} (x^2 - 2x + 2) = 1 > 0,$

$\lim\limits_{x\to+1^-} (x - 1) = 1 - 1 = 0$ και $x - 1 < 0$ για κάθε $x < 1$.

$\lim\limits_{x\to+1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to+1^+} \dfrac{x^2-2x+2}{x-1} = +\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to+1^+} (x^2 - 2x + 2) = 1 > 0,$

$\lim\limits_{x\to+1^+} (x - 1) = 1 - 1 = 0$ και $x - 1 > 0$ για κάθε $x > 1$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-2x+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty.$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2x+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty.$

Η f στο $A_1 = (-\infty, 0]$ είναι γνησίως αύξουσα κι επομένως έχει σύνολο τιμών σ' αυτό το $f(A_1) = (\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(0)] = (-\infty, -2]$.

Η f στο $A_2 = [0, 1)$ είναι γνησίως φθίνουσα κι επομένως έχει σύνολο τιμών σ' αυτό το $f(A_2) = (\lim\limits_{x\to1^-} f(x), f(0)] = (-\infty, -2]$.

Η f στο $A_3 = (1, 2]$ είναι γνησίως φθίνουσα κι επομένως έχει σύνολο τιμών σ' αυτό το $f(A_3) = [f(2), \lim\limits_{x\to1^+} f(x)) = [2, +\infty)$.

Η f στο $A_4 = [2, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα κι επομένως έχει σύνολο τιμών σ' αυτό το $f(A_1) = [f(2), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\,] = [2, +\infty)$.

Το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_1) \cup f(A_2) =$
$(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

ΜΕΘΟΔΟΣ 3η

Για να αποδείξουμε μια ανίσωση της μορφής $f(x) > g(x)$ ή $f(x) < g(x)$ σε ένα διάστημα Δ, θέτουμε $h(x) = f(x) - g(x)$. Στη συνέχεια μελετάμε την h ως προς τη μονοτονία και συγκρίνουμε την $h(x)$ με την τιμή της h σε ένα από τα άκρα του διαστήματος Δ με τη βοήθεια του ορισμού της μονοτονίας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Να αποδειχθεί ότι $e^x συνx \geq 1$ για κάθε $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $e^x συνx - 1 \geq 0$ για κάθε $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x συνx - 1$.

Για κάθε x με $0 < x < \frac{\pi}{4}$ είναι $f'(x) = e^x συνx - e^x ημx = e^x(συνx - ημx) > 0$, αφού

$e^x > 0$ και $συνx > ημx$ για κάθε x με $0 < x < \frac{\pi}{4}$.

Αφού ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{4})$ και η f είναι συνεχής στο $[0, \frac{\pi}{4}]$, είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \frac{\pi}{4}]$.

Επομένως για κάθε $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ είναι $f(x) \geq f(0)$ ή $e^x συνx - 1 \geq e^0 συν0 - 1$ ή

$e^x συνx \geq 1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$.

α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η f.

β) Για κάθε $α, β \in (0, +\infty)$ με $α > β$, να δειχθεί ότι $e^{α-β} > \frac{1+α}{1+β}$.

Λύση

α) Είναι $A_f = \mathbb{R} - \{-1\}$.

Για κάθε $x \neq -1$ έχουμε $f'(x) = \left(\dfrac{e^x}{x+1}\right)' = \dfrac{e^x(x+1)-e^x}{(x+1)^2} = \dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{xe^x}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow xe^x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{xe^x}{(x+1)^2} > 0 \Leftrightarrow xe^x > 0 \Leftrightarrow x > 0.$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
f'	$-$	‖	$-$	0	$+$
f	↘	‖	↘		↗

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1)$, $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

β) Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, για κάθε $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ με $\alpha > \beta$, ισχύει: $f(\alpha) > f(\beta) \Leftrightarrow \dfrac{e^\alpha}{\alpha+1} > \dfrac{e^\beta}{\beta+1} \Leftrightarrow e^\alpha(\beta + 1) > e^\beta(\alpha + 1) \Leftrightarrow \dfrac{e^\alpha}{e^\beta} > \dfrac{1+\alpha}{1+\beta} \Leftrightarrow$ $e^{\alpha-\beta} > \dfrac{1+\alpha}{1+\beta}$.

ΜΕΘΟΔΟΣ 4η

- Για να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει τουλάχιστον μια λύση, αρκεί να αποδείξουμε ότι το α ανήκει στο σύνολο τιμών της f.
- Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο Δ, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο Δ.
- Για να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση της μορφής $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο Δ, εργαζόμαστε ως εξής: Αποδεικνύουμε ότι η $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο Δ (με Θ. Bolzano ή με σύνολο τιμών ή με δοκιμή) και στη συνέχεια ότι έχει το πολύ μια ρίζα στο Δ (με μονοτονία ή με Θ. Rolle).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $ημ^xθ + συν^xθ = 1$ με $θ \in (0, \frac{π}{2})$ έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = ημ^xθ + συν^xθ - 1$. Η εξίσωση $ημ^xθ + συν^xθ = 0$ γράφεται $f(x) = 0$. Επειδή $f(2) = ημ^2θ + συν^2θ - 1 = 1 - 1 = 0$, η $x = 2$ είναι μια λύση της αρχικής εξίσωσης.
Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι: $f'(x) = ημ^xθ \cdot \ln(ημθ) + συν^xθ \cdot \ln(συνθ)$.
Επειδή όμως $0 < ημθ < 1$, $0 < συνθ < 1$ για κάθε $θ \in (0, \frac{π}{2})$ ισχύει ότι: $\ln(ημθ) < 0$, $\ln(συνθ) < 0$ και $ημ^xθ > 0$, $συν^xθ > 0$.
Άρα $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \Re$. Δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$ και η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση την $x = 2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x + x - 1 = 0$ έχει μοναδική λύση, η οποία να βρεθεί.
β) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = 2x\ln x + x^2 - 4x$.

Λύση

α) Η $x = 1$ είναι μια φανερή λύση της εξίσωσης, αφού $\ln 1 + 1 - 1 = 0$.
Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση δεν έχει άλλη λύση.
Έστω $g(x) = \ln x + x - 1$, $x \in (0, +\infty)$.
Για κάθε $x \in (0, +\infty)$: $g'(x) = (\ln x + x - 1)' = \frac{1}{x} + 1 > 0$.
Άρα, η g είναι γνησίως αύξουσα κι επομένως η εξίσωση $g(x) = 0$ δεν μπορεί να έχει άλλη λύση εκτός της $x = 1$.
β) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$: $f'(x) = (2x\ln x + x^2 - 4x)' = 2\ln x + 2x\frac{1}{x} + 2x - 4 =$
$2\ln x + 2x - 2 = 2(\ln x + x - 1) = 2g(x)$.
Είναι $f'(1) = 2g(1) = 0$.
Αφού η g είναι γνησίως αύξουσα έχουμε:
για κάθε $x < 1$ είναι $g(x) < g(1) \Leftrightarrow g(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$.

για κάθε $x > 1$ είναι $g(x) > g(1) \Leftrightarrow g(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) > 0$.

x	0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει
$f^3(x) + 6f(x) = x^3 + 3x - 5$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:
α) η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
β) η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα, η οποία ανήκει στο διάστημα $(1, 2)$.

Λύση

α) Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:
$[f^3(x) + 6f(x)]' = [x^3 + 3x - 5]'$ ή
$3f^2(x)f'(x) + 6f'(x) = 3x^2 + 3$ ή
$f'(x)[f^2(x) + 2] = x^2 + 1$ ή
$f'(x) = \dfrac{x^2 + 1}{f^2(x) + 2} > 0$.
Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
β) Έστω $g(x) = x^3 + 3x - 5$.
Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f^3(x) + 6f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x)[f^2(x) + 6] = g(x) \quad \Leftrightarrow$
$f(x) = \dfrac{g(x)}{[f^2(x) + 6]}$.
Η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι ισοδύναμη με την $\dfrac{g(x)}{[f^2(x) + 6]} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = 0$.
Εφαρμόζουμε Θεώρημα Bolzano για τη g στο $[1, 2]$:

- Η $g(x)$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο $[1, 2]$.
- $g(1) = -1 < 0$
  $g(2) = 9 > 0$.

Άρα $g(1) \cdot g(2) < 0$ και σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μια λύση της εξίσωσης $g(x) = 0$ στο διάστημα $(1, 2)$.
Το ίδιο ισχύει για την εξίσωση $f(x) = 0$ που είναι ισοδύναμη με την $g(x) = 0$.
Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ δεν έχει άλλη λύση στο $\mathbb{R}$.

ΜΕΘΟΔΟΣ 5η

Αν η συνεχής συνάρτηση f περιέχει μια παράμετρο την οποία πρέπει να προσδιορίσουμε ώστε η f να είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα Δ, τότε θα πρέπει $f'(x) \geq 0$ (αν θέλουμε να είναι γνησίως αύξουσα στο Δ) ή $f'(x) \leq 0$ (αν θέλουμε να είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ), όπου ο μηδενισμός της f΄ αφορά μεμονωμένα σημεία του Δ και όχι ολόκληρα διαστήματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10

Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{\lambda}{2}x^2 - 4x + 5$.

Λύση

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = (-\frac{1}{3}x^3 + \frac{\lambda}{2}x^2 - 4x + 5)' = -\frac{1}{3}3x^2 + 2\frac{\lambda}{2}x - 4 =$
$-x^2 + \lambda x - 4$.

Παρατηρούμε ότι η f΄ είναι τριώνυμο κι επομένως βρίσκουμε τη διακρίνουσα: $\Delta = \lambda^2 - 16$. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Αν $\Delta < 0 \Leftrightarrow -4 < \lambda < 4$, τότε $f'(x) < 0$ (ομόσημη του $\alpha = -1$) και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
- Αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4$ ή $\lambda = -4$, τότε $f'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ειδικότερα:
  - ✓ Αν $\lambda = 4$ είναι $f'(x) = -x^2 + 4x - 4 = -(x-2)^2 \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
    Η f΄ μηδενίζεται μόνο για $x = 2$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \neq 2$. Επειδή η f είναι συνεχής στο 2 είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 2]$, $[2, +\infty)$, δηλαδή είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
  - ✓ Αν $\lambda = -4$ είναι $f'(x) = -x^2 - 4x - 4 = -(x+2)^2 \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
    Η f΄ μηδενίζεται μόνο για $x = -2$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \neq 2$. Επειδή η f είναι συνεχής στο 2 είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -2]$, $[-2, +\infty)$, δηλαδή είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
- Αν $\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda < -4$ ή $\lambda > 4$, τότε η f΄ έχει δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 (με $\rho_1 < \rho_2$) και το πρόσημό της φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		ρ_1		ρ_2		$+\infty$
f΄		-	0	+	0	-	
f		↘		↗		↘	

Όπως είναι φανερό σ' αυτήν την περίπτωση η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Τελικά, για $-4 \le \lambda \le 4$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ομάδας

1. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = x^3 + 5x - 10$ **β)** $f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x + 4$

γ) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$ **δ)** $f(x) = x^2e^{-x}$

ε) $f(x) = x\ln x + x$ **στ)** $f(x) = ημ^2x + συνx,\ x \in [0, π]$

ζ) $f(x) = x^2\ln x$ **η)** $f(x) = x^{x^2}$

θ) $f(x) = e^{συνx},\ x \in [0, 2π]$ **ι)** $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2-3}$

ια) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$ **ιβ)** $f(x) = \sqrt{x^2+2x-3}$

ιγ) $f(x) = \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2$ **ιδ)** $f(x) = \dfrac{συνx}{ημx-2},\ x \in [0, 2π]$

ιε) $f(x) = (x^2 + 1)e^{\frac{1}{x}}$ **ιστ)** $f(x) = (\ln x)^2 - \ln x^2$.

2. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = |x^2 - 2|$ **β)** $f(x) = \dfrac{|x|}{1+x^2}$

γ) $f(x) = \begin{cases} x^2+2x+1, & x \le 1 \\ x^3-3x+6, & x > 1 \end{cases}$ **δ)** $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+8}, & x \le 1 \\ x^2-8x+10, & x > 1 \end{cases}$

ε) $f(x) = x|x| - 4x$ **στ)** $f(x) = \begin{cases} ημx, & -π \le x < 0 \\ \dfrac{x}{x^2+1}, & x \ge 0 \end{cases}$

3. Αφού βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x} + 3x - 2$, να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\sqrt{x} + 3x = 2$ έχει μοναδική λύση.

4. Αφού βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = x^5 + 3x^3 + (2μ^2 + 1)x - μ$, $μ \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^5 + 3x^3 + (2μ^2 + 1)x - μ = 0$ έχει μια ακριβώς λύση στο $\mathbb{R}$.

5. Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + 2x^2 + x - 1$ να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

6. Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης $f(x) = 2x^3 - 3\alpha x^2 + 6x + 2$.

7. Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει πραγματική τιμή του α ώστε η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + 3\alpha x^2 + 3x + 1$ να είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x - 3$.

α) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x > 1997$ ισχύει ότι $x^3 + 3x > 1997^3 + 5991$.

β) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0, 1)$.

9. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών των εξισώσεων:

α) $x^3 - 12x + 2 = 0$

β) $\sqrt{x+1} + x^2 - 1 = 0$

γ) $e^{2x} - 2x = -5$

δ) $\dfrac{\ln x}{x} = 5$

ε) $2x^4 - 4x^2 + 1 = 0$.

<u>Β΄ ομάδα</u>

1. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $e^{2x} + \ln(x + 1) = 1$ έχει ακριβώς μια λύση.

2. **α)** Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 6x^2 + \mu$, όπου $\mu \in \mathbb{R}$ στο διάστημα $[0,4]$.

β) Αν $0 < \mu < 32$ να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^3 - 6x^2 + \mu = 0$ έχει μοναδική λύση στο $(0,4)$. Πόσες λύσεις έχει στο $\mathbb{R}$;

3. **α)** Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x - 2}$ με $x \in [0, \pi]$.

β) Αν $\alpha, \beta \in \left(0, \dfrac{\pi}{6}\right)$ και $\alpha < \beta$, να αποδειχθεί ότι $\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\beta} < \dfrac{\eta\mu\alpha - 2}{\eta\mu\beta - 2}$.

4. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $12^x + 5^x = 13^x$ έχει μοναδική λύση την $x=2$.

5. **α)** Να αποδειχθεί ότι $x^2\eta\mu x + 2x\sigma\upsilon\nu x < \dfrac{\pi^2}{4}$, για κάθε $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

β) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = (x^2 - 4)\sigma\upsilon\nu x - 4x\eta\mu x + \dfrac{\pi^2 x}{4}$

είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

6. **α)** Να αποδειχθεί ότι 2συνx + σφx - 2x + π < 0 για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

β) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f με τύπο f(x) = 2ημx + ln(ημx) - x^2 + πx είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

7. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞) με f(1) = 0 και $f'(x) > \frac{1}{x}$ για κάθε x∈(0, +∞), να αποδειχθεί ότι f(x) < lnx στο (0, 1) και f(x) > lnx στο (1, +∞).

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

α) Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της f.
β) Να αποδειχθεί ότι $\ln a^e < a$, για κάθε α > e.
γ) Να αποδειχθεί ότι $e^\pi > \pi^e$.
δ) Να αποδειχθεί ότι $e^x \geq x^e$, για κάθε x > 0.
ε) Να αποδειχθεί ότι $a^{a+1} > (a + 1)^a$, για κάθε α ≥ e.

9. Να αποδειχθεί ότι $x^4 - 12\ln x + 12x - 13 > 0$ για κάθε x > 1.

10. **α)** Να λυθεί η εξίσωση $x^3 + 2e^x + 3x = 2$.

β) Να λυθεί η εξίσωση $\left(2^{\frac{1}{x}} - 4\right)^3 + 2e^{2^{\frac{1}{x}} - 4} + 3\left(2^{\frac{1}{x}} - 4\right) = 2$.

11. Η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο [α, β], όπου α, β θετικοί αριθμοί με $f^{(3)}(x) < 0$ για κάθε x∈(α, β).

α) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $g(x) = xf''(x) - f'(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο [α, β].

β) Αν $f'(a) = f''(a) = 0$, να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $h(x) = \frac{f'(x)}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο [α, β].

12. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [0, +∞) για την οποία ισχύει ότι αf(x) > f'(x) για κάθε x ≥ 0.

α) Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης $g(x) = e^{-ax}f(x)$.
β) Αν f(0) = κ, να αποδειχθεί ότι $f(x) - \kappa e^{ax} < 0$ για κάθε x > 0.

13. **α)** Θεωρούμε τον πραγματικό αριθμό α με $0 < \alpha < 1$ και τη συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - x$, $x \in \mathbb{R}$. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.
β) Να βρεθούν τα $\lambda \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει: $\alpha^{\lambda^2-4} - \alpha^{\lambda-2} = \lambda^2 - \lambda - 2$, $0 < \alpha < 1$.

14. Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Αν $f(\alpha) = g(\alpha)$ και $f'(x) > g'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δειχθεί ότι:
α) Αν $x > \alpha$ τότε $f(x) > g(x)$
β) Αν $x < \alpha$ τότε $f(x) < g(x)$.

15. Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g που έχουν πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, +\infty)$ για τις οποίες ισχύει η σχέση:
$f'(x) = g'(x) + \eta\mu^2 x + e^x$, $x \in [0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει: $f(0) + g(x) < g(0) + f(x)$.

16. Να αποδειχθεί ότι $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$ για κάθε $x > 0$.

17. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύουν $f(\alpha) = f(\beta) = 1$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, να αποδειχθεί ότι $f(x) < 1$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $f(x) \le f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2 - (1 - x)(\ln x - 2)$.
α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^2 - 2 = (1 - x)(\ln x - 2)$.
γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
δ) Να αποδείξετε ότι $(1 - x)(\ln x - 2) < x^2 - 1$ για κάθε $x > 0$.

20. Η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τη σχέση $f(f'(x)) + f(x) = 0$ για κάθε $x > 0$. Αν $f(1) = 0$, να αποδειχθεί ότι:
α) $f'(f'(x)) = x$ για κάθε $x > 0$.
β) $f(x) = \ln x$, $x > 0$.

21. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(x) > -1$ και $e^{f(x)} + \sqrt{1 + f(x)} = 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.
β) Να βρεθεί ο τύπος της f.