Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Το Σύνολο C των Μιγαδικών Αριθμών

Είναι γνωστό ότι η εξίσωση $x^2 = -1$ δεν έχει λύση στο σύνολο IR των πραγματικών αριθμών, αφού το τετράγωνο κάθε πραγματικού αριθμού είναι μη αρνητικός αριθμός.
Για να ξεπεράσουμε τη δυσκολία αυτή, διευρύνουμε το σύνολο IR σε ένα σύνολο C, το οποίο να έχει τις ίδιες πράξεις με το IR, τις ίδιες ιδιότητες των πράξεων αυτών και στο οποίο να υπάρχει ο αριθμός i που είναι μια ρίζα της εξίσωσης $x^2 = -1$, δηλαδή $i^2 = -1$.
Σύμφωνα με τα παραπάνω, το σύνολο C θα έχει ως στοιχεία:

* όλους τους πραγματικούς αριθμούς,
* όλα τα στοιχεία της μορφής βi, $\beta \in IR$,
* όλα τα αθροίσματα της μορφής $\alpha + \beta i$, $\alpha,\ \beta \in IR$.

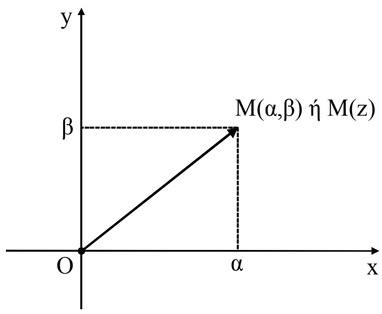
Οι παραπάνω αριθμοί λέγονται μιγαδικοί αριθμοί και το C σύνολο των μιγαδικών αριθμών.
Κάθε στοιχείο z του C γράφεται κατά μοναδικό τρόπο με τη μορφή $z = \alpha + \beta i$, όπου $\alpha,\ \beta \in IR$.
Κάθε μιγαδικός αριθμός της μορφής $\beta i, \beta \in IR$ λέγεται φανταστικός. Το σύνολο όλων των φανταστικών αριθμών συμβολίζεται με I.
Αν $z = \alpha + \beta i, \alpha, \beta \in IR$, ο α λέγεται πραγματικό μέρος του z και συμβολίζεται με Re(z), ενώ ο β λέγεται φανταστικό μέρος του z και συμβολίζεται με Im(z).

Ισότητα Μιγαδικών Αριθμών

Δύο μιγαδικοί αριθμοί είναι ίσοι, αν και μόνο αν έχουν ίσα πραγματικά μέρη και ίσα φανταστικά μέρη, δηλαδή $\alpha + \beta i = \gamma + \delta i \Leftrightarrow \alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$.
Να σημειώσουμε ότι η διάταξη και οι ιδιότητές της δε μεταφέρονται από τους πραγματικούς στους μιγαδικούς αριθμούς.

Γεωμετρική Παράσταση Μιγαδικών

Κάθε μιγαδικός αριθμός $z = \alpha + \beta i$ μπορεί να παρασταθεί στο καρτεσιανό επίπεδου με το σημείο $M(\alpha, \beta)$. Αλλά και αντιστρόφως, κάθε σημείο $M(\alpha, \beta)$ του καρτεσιανού αυτού επιπέδου μπορούμε να το αντιστοιχίσουμε στο μιγαδικό $\alpha + \beta i$. Το σημείο M λέγεται εικόνα του μιγαδικού z και μπορούμε να το συμβολίσουμε με $M(z)$.



Το καρτεσιανό επίπεδο του οποίου τα σημεία είναι εικόνες μιγαδικών αριθμών θα το λέμε μιγαδικό επίπεδο.

Οι εικόνες των πραγματικών αριθμών $\alpha = \alpha + 0i$ είναι τα σημεία $M(\alpha, 0)$ και ανήκουν στον άξονα $x'x$. Γι’ αυτό ο άξονας $x'x$ λέγεται πραγματικός άξονας. Οι εικόνες των φανταστικών αριθμών $\beta i = 0 + \beta i$ είναι τα σημεία $M(0, \beta)$ και ανήκουν στον άξονα $y'y$. Γι’ αυτό ο άξονας $y'y$ λέγεται φανταστικός άξονας. Ένας μιγαδικός $z = \alpha + \beta i$ παριστάνεται επίσης και με τη διανυσματική ακτίνα, $\overrightarrow{OM}$, του σημείου $M(\alpha, \beta)$.

Πράξεις στο σύνολο C των μιγαδικών αριθμών

Σύμφωνα με τον ορισμό, η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός δύο μιγαδικών αριθμών γίνονται όπως ακριβώς και οι αντίστοιχες πράξεις με διώνυμα $\alpha + \beta x$ στο IR, όπου βέβαια αντί για x έχουμε το i.

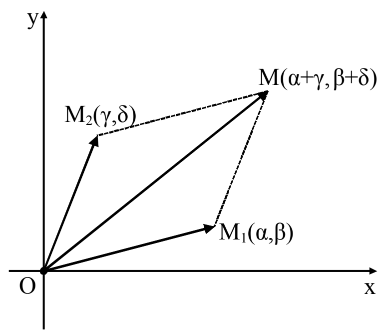
1. *Πρόσθεση*

Για την μιγαδικών αριθμών $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ έχουμε:

$(\alpha + \beta i) + (\gamma + \delta i) = (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)i$.

Γεωμετρική ερμηνεία της πρόσθεσης

Αν $M_1(\alpha, \beta)$ και $M_2(\gamma, \delta)$ είναι οι εικόνες των $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο, τότε το άθροισμα $(\alpha + \beta i) + (\gamma + \delta i) = (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)i$ παριστάνεται με το σημείο $M(\alpha + \gamma, \beta + \delta)$. Δηλαδή, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ και επομένως η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτινών τους.



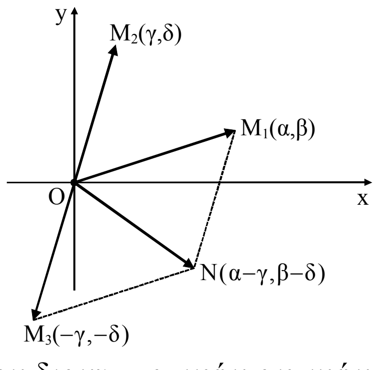
2. Αφαίρεση

Για την αφαίρεση του μιγαδικού αριθμού $\gamma + \delta i$ από τον $\alpha + \beta i$, έχουμε:

$(\alpha + \beta i) - (\gamma + \delta i) = (\alpha + \beta i) + (-\gamma - \delta i) = (\alpha - \gamma) + (\beta - \delta)i$.

Γεωμετρική ερμηνεία της αφαίρεσης

Αν $M_1(\alpha, \beta)$ και $M_2(\gamma, \delta)$ είναι οι εικόνες των $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο, η διαφορά $(\alpha + \beta i) - (\gamma + \delta i) = (\alpha - \gamma) + (\beta - \delta)i$ παριστάνεται με το σημείο $M(\alpha - \gamma, \beta - \delta)$. Δηλαδή, $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}$ και επομένως η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτινών τους.



3. Πολλαπλασιασμός

Για τον πολλαπλασιασμό δύο μιγαδικών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ έχουμε:

$$(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i+\beta\delta i^2=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i$$

Συζυγείς αριθμοί

Ο αριθμός $\alpha-\beta i$ λέγεται συζυγής του $z=\alpha+\beta i$ και συμβολίζεται με $\overline{z}$.
Δηλαδή, $\overline{z}=\alpha-\beta i$.

Επειδή είναι και $\overline{\alpha-\beta i}=\alpha+\beta i$, οι $\alpha+\beta i$, $\alpha-\beta i$ λέγονται συζυγείς μιγαδικοί και ισχύει ότι $\overline{(\overline{z})}=z$.

4. Διαίρεση

Για το πηλίκο $\dfrac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$, όπου $\gamma+\delta i\neq 0$, πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος με το συζυγή του παρονομαστή και έχουμε:

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)}=\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\beta\gamma-\alpha\delta)i}{\gamma^2+\delta^2}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i.$$

Δύναμη Μιγαδικού

Οι δυνάμεις ενός μιγαδικού αριθμού z με εκθέτη ακέραιο ορίζονται ακριβώς όπως και στους πραγματικούς αριθμούς. Δηλαδή :

* $z^1=z$, $z^2=z\cdot z$ και γενικά $z^\nu=z^{\nu-1}\cdot z$, για κάθε θετικό ακέραιο ν, με $\nu>1$.
* Αν $z\neq 0$, τότε $z^0=1$, $z^{-\nu}=\dfrac{1}{z^\nu}$, για κάθε θετικό ακέραιο ν.

Για τις δυνάμεις των μιγαδικών αριθμών ισχύουν οι ίδιες ιδιότητες που ισχύουν και για τις δυνάμεις των πραγματικών αριθμών.

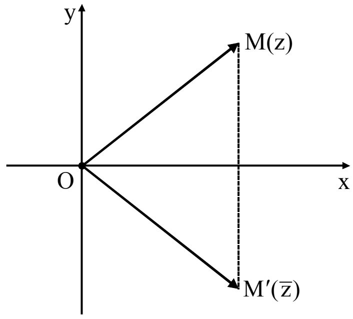
Δυνάμεις του i

Για τις δυνάμεις του i έχουμε:

$$i^\nu=i^{4\rho+\upsilon}=i^{4\rho}i^\upsilon=(i^4)^\rho i^\upsilon=1^\rho i^\upsilon=i^\upsilon=\begin{cases}1 & ,\ \text{αν}\ \ \upsilon=0\\ i & ,\ \text{αν}\ \ \upsilon=1\\ -1 & ,\ \text{αν}\ \ \upsilon=2\\ -i & ,\ \text{αν}\ \ \upsilon=3\end{cases}.$$

Άρα, για να υπολογίσουμε μια δύναμη του i, εκτελούμε την ευκλείδεια διαίρεση του ν με το 4 και γράφουμε το ν στη μορφή $\nu=4\rho+\upsilon$, όπου ρ το πηλίκο και υ το υπόλοιπο.

Ιδιότητες Συζυγών



1. Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών $z=\alpha+\beta i$ και $\overline{z}=\alpha-\beta i$ είναι τα σημεία $M(\alpha,\beta)$ και $M'(\alpha,-\beta)$ που είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x.

2. Για δύο συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς $z=\alpha+\beta i$ και $\overline{z}=\alpha-\beta i$ ισχύουν:

* $z+\overline{z}=2\alpha=2\,\mathrm{Re}(z)$,
* $z-\overline{z}=2\beta i=2\,\mathrm{Im}(z)i$.

3. Αν z_1, z_2, z είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε:

* $\overline{z_1+z_2}=\overline{z}_1+\overline{z}_2$
* $\overline{z_1-z_2}=\overline{z}_1-\overline{z}_2$
* $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2$
* $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$
* $\overline{\left(z^\nu\right)}=\left(\overline{z}\right)^\nu$.

Επίλυση της Εξίσωσης $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ με $\alpha,\beta,\gamma\in IR$ και $\alpha\neq 0$

Αν $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ η διακρίνουσα της εξίσωσης, έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. Αν $\Delta>0$, τότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές λύσεις $z_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.

2. Αν $\Delta=0$, τότε έχει μια διπλή πραγματική λύση $z=\dfrac{-\beta}{2\alpha}$.

3. Αν $\Delta<0$, τότε έχει δύο συζυγείς μιγαδικές λύσεις $z_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$.

* Σε κάθε περίπτωση ισχύουν οι τύποι Vieta : $z_1+z_2=\dfrac{-\beta}{\alpha}$, $z_1\cdot z_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}$.

Παρατηρήσεις

1. Όταν θέλουμε να υπολογίσουμε μια μεγάλη δύναμη ενός μιγαδικού αριθμού z, συνήθως υπολογίζουμε αρχικά τη δύναμη z^2 ή z^3 κτλ μέχρι να βρούμε αριθμό πραγματικό ή φανταστικό.

Π.χ. για τον υπολογισμό της δύναμης $(1 - i\sqrt{3})^{63}$ υπολογίζουμε πρώτα

$(1 - i\sqrt{3})^2 = 1 - 2i\sqrt{3} + 3i^2 = 1 - 2i\sqrt{3} - 3 = -2 - 2i\sqrt{3}$

και $(1 - i\sqrt{3})^3 = (1 - i\sqrt{3})^2(1 - i\sqrt{3}) = (-2 - 2i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3}) =$

$-2 + 2i\sqrt{3} - 2i\sqrt{3} + 2i^2\left(\sqrt{3}\right)^2 = -2 - 6 = -8.$

Άρα $(1 - i\sqrt{3})^{63} = \left[(1-i\sqrt{3})^3\right]^{21} = \left(-8\right)^{21} = -8^{21} = -2^{63}$.

2. Για τους αριθμούς α + βi, β – αi που εμφανίζονται σε πολλές ασκήσεις ισχύει: $\alpha + \beta i = -i^2\alpha + \beta i = i(\beta - \alpha i)$.

3. Ισχύουν οι τύποι: $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ και $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$.

4. Ισχύουν οι ισοδυναμίες : α) $z \in \mathrm{IR} \Leftrightarrow \bar{z} = z$ και β) $z \in \mathbf{I} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$.
Όταν χρησιμοποιούμε τις παραπάνω ισοδυναμίες πρέπει κάθε φορά να τις αποδεικνύουμε ως εξής:

α) $z \in \mathrm{IR} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{z-\bar{z}}{2i} = 0 \Leftrightarrow z - \bar{z} = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = z$.

β) $z \in \mathbf{I} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{z+\bar{z}}{2} = 0 \Leftrightarrow z + \bar{z} = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = -z$.

5. Για να βρούμε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας ενός μιγαδικού αριθμού z, θέτουμε z = x + yi, με x, $y \in \mathrm{IR}$ και προσπαθούμε να βρούμε μια σχέση μεταξύ x, y που θα μας δώσει και την εξίσωση του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Για τις διάφορες τιμές του $\nu \in \mathbb{N}^*$ να υπολογιστεί το άθροισμα $\Sigma = 1 + i + i^2 + \ldots + i^\nu$.

2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει:
$$i^\nu + i^{\nu+1} + i^{\nu+2} + i^{\nu+3} = \frac{1}{i^\nu} + \frac{1}{i^{\nu+1}} + \frac{1}{i^{\nu+2}} + \frac{1}{i^{\nu+3}}.$$

3. Για τις διάφορες θετικές ακέραιες τιμές του ν, να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = (1 + i^\nu)(1 + i^{2\nu})$.

4. Να βρείτε όλες τις τιμές της παράστασης: $A = 1 - i + i^2 - i^3 + \ldots + (-1)^\nu i^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

5. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των διαφορετικών τιμών που παίρνει η παράσταση $A = (2 - i^\nu)(1 + i^{\nu+1})$, $\nu \in \mathbb{N}$, είναι πραγματικός αριθμός.

6. Να λυθεί η εξίσωση $2z - 1 + 3i = iz + 5i$.

7. Να λυθούν στο C οι εξισώσεις:
α) $z^2 - 4z + 13 = 0$
β) $z + \dfrac{1}{z} = 1$
γ) $z^2 + 1 = 0$.

8. Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών τις εξισώσεις:
α) $z + 3\overline{z} = 0$
β) $z + \overline{z} = 5$
γ) $2z^2 - 3\overline{z} = -1$.

9. Να λυθούν στο C οι εξισώσεις:
α) $z^3 = -1$
β) $z^3 - 3z^2 + 4z - 12 = 0$.

10. Να λυθεί η εξίσωση $\overline{z} = 8 - 3z$.

11. Να βρείτε το z ώστε $\overline{z} = z^2$.

12. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y για τους οποίους ισχύει η ισότητα $(2x - 3yi)^2 = \dfrac{1}{2}i$.

13. Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών την εξίσωση $3iz - (1 - i)(z + 1) = (3 - i)^2$.

14. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} (1+2i)z + (3-i)w = 4i \\ (3+2i)\overline{z} + 5i\overline{w} = -1 - 11i \end{cases}$.

15. Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών το σύστημα:
$$\begin{cases} (1-i)z_1 - 3iz_2 = 9-8i \\ (2+i)z_1 + (7-2i)z_2 = 23+16i \end{cases}.$$

16. Αν το άθροισμα και το γινόμενο δύο μη πραγματικών μιγαδικών z_1 και z_2 είναι πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι οι z_1, z_2 είναι συζυγείς μιγαδικοί.

17. Για κάθε $\alpha, \beta \in IR$ να αποδείξετε ότι $(\alpha + \beta i)^2 + (\beta - \alpha i)^2 = 0$.

18. Αν $\alpha, \beta \in IR$ και $\nu \in IN^*$, να αποδειχθεί ότι $(\alpha + \beta i)^{4\nu+2} + (\beta - \alpha i)^{4\nu+2} = 0$.

19. Αν $\alpha + \beta i = \left(3+i\right)^{10}$, $\alpha, \beta \in IR$, να αποδειχθεί ότι:

α) $\alpha - \beta i = \left(3-i\right)^{10}$

β) $\alpha^2 + \beta^2 = 10^{10}$.

20. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $w = \left(\overline{z}+z^2\right)^\nu - \left(z+\overline{z}^2\right)^\nu$ είναι φανταστικός, όπου $z \in C$.

21. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $w = \dfrac{z+i\overline{z}}{\overline{z}-iz}$, $\overline{z}-iz \neq 0$ είναι φανταστικός, όπου $z \in C$.

22. Αν $w = \dfrac{z}{z+i}$, $z \neq -i$, τότε να αποδειχθεί η ισοδυναμία $w \in IR \Leftrightarrow z \in I$.

23. Οι μιγαδικοί αριθμοί z και w συνδέονται με τη σχέση $w = \dfrac{z-2i}{z+2}$, $z \neq -2$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο, όταν ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι:

α) ο πραγματικός άξονας ,

β) ο φανταστικός άξονας.

24. Αν $w = \dfrac{zi-\lambda}{\lambda i - z}$ με $\lambda \in IR^*$ και $z \neq \lambda i$, να αποδείξετε την ισοδυναμία $w \in I \Leftrightarrow z \in I$.

25. Θεωρούμε το σύνολο $A=\{z\in C / \overline{z} = \dfrac{1}{z}\}$. Αν $z_1, z_2 \in A$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $w=\dfrac{(z_1+z_2)^\nu}{z_1^\nu + z_2^\nu}$, $\nu \in N^*$, είναι πραγματικός.

26. Αν $z_1, z_2 \notin IR$, να αποδείξετε ότι ισχύει η ισοδυναμία:
$\left(z_1+z_2\right), \left(z_1 \cdot z_2\right) \in IR \Leftrightarrow z_1 = \overline{z}_2$.

27. Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z = \lambda + 3 + (2\lambda - 1)i$, $\lambda \in IR$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z.

28. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z, όταν $z = 1 + \sigma\upsilon\nu\theta + (3 + \eta\mu\theta)i$, $\theta \in IR$.

29. Έστω $z = w + 2 - 3i$, $z, w \in C$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών w, αν είναι γνωστό ότι οι εικόνες των αριθμών z βρίσκονται στην ευθεία $y = -2x + 6$.

30. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει η σχέση $\text{Re}\left(z - \frac{1}{z}\right) = -3\,\text{Im}(iz)$.

31. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z, αν είναι γνωστό ότι οι εικόνες των μιγαδικών 1, iz, $1 - z^2$ είναι σημεία συνευθειακά.

32. Έστω η εξίσωση $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$, όπου $\alpha, \gamma \in IR$ με $\alpha \neq 0$ και $\beta \notin IR$. Να αποδείξετε ότι, αν η εξίσωση έχει πραγματική ρίζα, τότε $\gamma = 0$.

33. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$ όταν υπάρχει $\lambda \in IR$ τέτοιος, ώστε οι συντεταγμένες του M να ικανοποιούν τη σχέση
$2(3y - xi) - (x^2 + y^2 i + \lambda) = (8 - \lambda)i$.

34. Δίνεται ο μιγαδικός $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ με $z \notin IR$ και $\text{Im}(w) = 0$. Να δειχθεί ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z βρίσκονται σε κύκλο κέντρου O και ακτίνας 1.

35. Αν $z, w \in C$ και $w \neq 0$, να αποδείξετε ότι:

α) $\text{Re}\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{\bar{w}z + w\bar{z}}{2w\bar{w}}$.

β) $\text{Im}\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{\bar{w}z - w\bar{z}}{2iw\bar{w}}$.

36. Έστω η συνάρτηση $f(z) = z^2 - 2z + 3 = 0$, $z \in C$.
α) Να λύσετε την εξίσωση $f(z) = 0$.
β) Αν ο μιγαδικός $1 + i\sqrt{3}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(z) = \kappa z + \lambda$, $\kappa, \lambda \in IR$, να βρείτε τα κ, λ.

37. Έστω η εξίσωση $z^2 + \alpha z + 1 = 0$, $\alpha \in C$. Να αποδειχθεί ότι:
α) η παραπάνω εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες, αν $\alpha \notin IR$,
β) αν η εξίσωση έχει ρίζα φανταστικό αριθμό, τότε ο α είναι φανταστικός αριθμός.

38. α) Να λύσετε την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu^2\theta \cdot z^2 - 2\sigma\upsilon\nu\theta \cdot z + (5 - 4\sigma\upsilon\nu\theta) = 0$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

β) Να αποδείξετε ότι καθώς το θ μεταβάλλεται στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, οι εικόνες των λύσεων της εξίσωσης κινούνται σε μια υπερβολή.

39. Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \frac{(1+z)^{\nu}}{1+z^{\nu}}$, $\nu \in IN^*$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(\frac{1}{z}) = f(z)$, $z \in C^*$.
β) Αν είναι $z\overline{z} = 1$, να αποδείξετε ότι $f(z) \in IR$.
γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του ν ορίζεται το f(i).
δ) Να αποδείξετε ότι το f(i) είναι πραγματικός για κάθε επιτρεπτό ν.

40. Αν η εικόνα του μιγαδικού $w = x + yi$, $x, y \in IR$, κινείται στην ευθεία με εξίσωση $x - 3y - 1 = 0$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας Μ του μιγαδικού $z \neq 0$, για τον οποίο ισχύει $zw = 2 - i$.

41. Αν $z, w \in C$ και Α η εικόνα του z, Β η εικόνα του w στο μιγαδικό επίπεδο, να δειχθεί ότι τα Ο, Α, Β είναι συνευθειακά αν και μόνο αν $z\overline{w} \in IR$.

42. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ(z) στο μιγαδικό επίπεδο για τα οποία ο z^3 είναι πραγματικός και μάλιστα $z^3 \geq 1$.

43. Αν $z \in C^*$ και ισχύει η σχέση $z + \frac{1}{z} = 1$, να αποδείξετε ότι:

α) $z^2 - z + 1 = 0$
β) $z^3 = -1$
γ) $z^{96} - z^{37} + z^{32} = 0$
δ) $z^{61} + \frac{1}{z^{61}} = 1$
ε) $z^{6\lambda+2} - z^{6\rho+1} + 1 = 0$, $\lambda, \rho \in N$
στ) $(z - 1)^{60} = 1$.