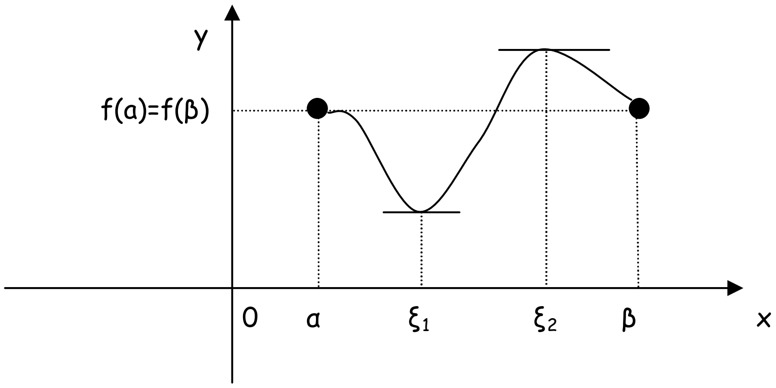
ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ - ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

Θεώρημα Rolle

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β], παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) και ισχύει ότι f(α) = f(β), τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο M(ξ, f(ξ)) να είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

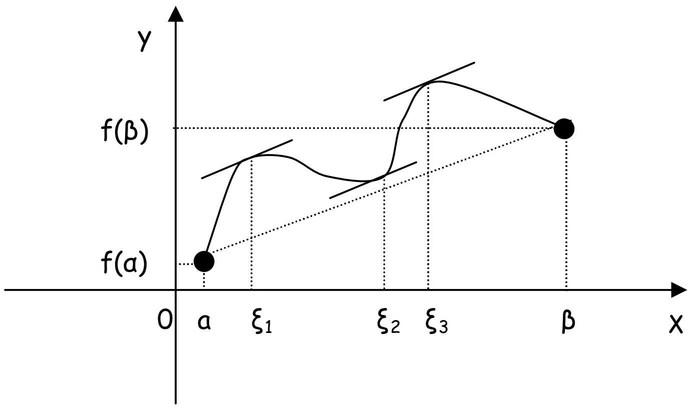


Θεώρημα Μέσης Τιμής (του Διαφορικού Λογισμού)

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β] και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β), τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο M(ξ,f(ξ)) να είναι παράλληλη στην ευθεία AB, όπου A(α,f(α)), B(β,(f(β)).



Εφαρμογές του Θεωρήματος Rolle στις εξισώσεις

Υπάρχουν μερικές προτάσεις που συνδέουν τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ με τις ρίζες της εξίσωσης $f'(x) = 0$, που αποδεικνύονται με βάση το θεώρημα Rolle και χρησιμοποιούνται στη λύση ασκήσεων. Πρέπει βέβαια η f να είναι παραγωγίσιμη.

1η πρόταση

Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δυο πραγματικές ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 \neq \rho_2$, τότε και η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (ρ_1, ρ_2).

Απόδειξη: Αφού η f είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) και $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$, σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει $x_o \in (\rho_1, \rho_2)$ με $f'(x_o) = 0$.

2η πρόταση

Αν ρ_1, ρ_2 είναι διαδοχικές ρίζες της εξίσωση $f'(x) = 0$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο (ρ_1, ρ_2).

Απόδειξη: Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει 2 ρίζες τις ξ_1, ξ_2 στο διάστημα (ρ_1, ρ_2). Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει $x_o \in (\xi_1, \xi_2)$ με $f'(x_o) = 0$. Δηλαδή, η εξίσωση $f'(x) = 0$ θα έχει ρίζα στο $(\xi_1, \xi_2) \subseteq (\rho_1, \rho_2)$, πράγμα το οποίο είναι **άτοπο,** γιατί οι ρ_1, ρ_2 είναι διαδοχικές ρίζες της.

3η πρόταση

Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο A.

Απόδειξη: Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ είχε στο A δυο ρίζες, τις ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$, τότε η εξίσωση $f'(x) = 0$ (σύμφωνα με το θεώρημα Rolle) θα έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (ρ_1, ρ_2), πράγμα το οποίο είναι **άτοπο,** γιατί γνωρίζουμε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

ΜΕΘΟΔΟΣ 1η

Όταν ζητούνται κάποιες παράμετροι ώστε να ισχύει το Θεώρημα Rolle για μια δίκλαδη συνάρτηση f στο διάστημα [α, β], της οποίας ο τύπος αλλάζει στο σημείο $x_o \in (\alpha, \beta)$, βρίσκουμε τις παραμέτρους αυτές από τις ισότητες:

- $\lim\limits_{x\to x_o^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_o^+} f(x) = f(x_o)$
- $\lim\limits_{x\to x_o^-} \dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \lim\limits_{x\to x_o^+} \dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$
- $f(\alpha) = f(\beta)$.

Αντίστοιχα, για το Θεώρημα Μέσης Τιμής βρίσκουμε τις παραμέτρους από τις ισότητες:

- $\lim\limits_{x\to x_o^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_o^+} f(x) = f(x_o)$
- $\lim\limits_{x\to x_o^-} \dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \lim\limits_{x\to x_o^+} \dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να υπολογιστούν τα $\alpha, \beta \in \Re$ ώστε να ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής για τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + 2x + \frac{5}{3}, & x < 1 \\ \alpha x^2 + x + \beta, & x \geq 1 \end{cases}$ στο διάστημα [0, 2]. Στη συνέχεια να βρεθούν όλα τα $\xi \in (0,2)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = \dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}$.

Λύση

- **1η προϋπόθεση:** Πρέπει η f να είναι συνεχής στο [0,2].

Πράγματι, η f είναι συνεχής στα διαστήματα [0,1), (1,2] ως πολυωνυμική σε καθένα από αυτά.

Επίσης: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (\frac{1}{3}x^3 + 2x + \frac{5}{3}) = \frac{1}{3} + 2 + \frac{5}{3} = 4$.

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (\alpha x^2 + x + \beta) = \alpha + 1 + \beta$ και $f(1) = \alpha + 1 + \beta$.

Για να είναι συνεχής η f στο $x_o = 1$, θα πρέπει $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow$

$4 = \alpha + 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = 3 - \alpha$ (1).

- **2η προϋπόθεση:** Πρέπει η f να είναι παραγωγίσιμη στο (0, 2).

Πράγματι, η f να είναι παραγωγίσιμη στο (0, 1) με $f΄(x) = x^2 + 2$ και στο (1, 2) με $f΄(x) = 2\alpha x + 1$.

Είναι: $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\frac{1}{3}x^3+2x+\frac{5}{3}-4}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\frac{1}{3}x^3+2x-\frac{7}{3}}{x-1} =$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{7}{3})}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}) = 3$ και

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\alpha x^2+x+\beta-\alpha-\beta-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\alpha(x-1)(x+1)+x-1}{x-1} =$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)[\alpha(x+1)+1]}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}(\alpha x+\alpha+1) = 2\alpha + 1$.

Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_o = 1$, θα πρέπει

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-1}$ ή $3 = 2\alpha + 1$ ή $\alpha = 1$.

Από τη σχέση (1) βρίσκουμε ότι $\beta = 2$.

Για $\alpha = 1$ και $\beta = 2$ η f γράφεται: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3+2x+\frac{5}{3}, & x<1 \\ x^2+x+2, & x\ge 1 \end{cases}$.

Αφού η f είναι συνεχής στο [0, 2] και παραγωγίσιμη στο (0, 2), σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε

$f΄(\xi) = \dfrac{f(2)-f(0)}{2-0} = \dfrac{8-\frac{5}{3}}{2} = \dfrac{19}{6}$.

Πρέπει λοιπόν να λύσουμε την εξίσωση $f΄(\xi) = \dfrac{19}{6}$.

- Αν $\xi \in (0, 1]$ είναι $f΄(\xi) = \dfrac{19}{6} \Rightarrow \xi^2 + 2 = \dfrac{19}{6} \Rightarrow \xi^2 = \dfrac{7}{6} \Rightarrow \xi = \sqrt{\dfrac{7}{6}} \notin (0, 1]$ ή $\xi = -\sqrt{\dfrac{7}{6}} \notin (0, 1]$.
- Αν $\xi \in (1, 2)$ είναι $f΄(\xi) = \dfrac{19}{6}$ ή $2\xi + 1 = \dfrac{19}{6}$ ή $\xi = \dfrac{13}{12} \in (1, 2)$.

Τελικά έχουμε μόνο ένα $\xi \in (0, 2)$, το $\xi = \dfrac{13}{12}$, ώστε $f΄(\xi) = \dfrac{19}{6}$.

☞ **ΜΕΘΟΔΟΣ 2η**

Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία το πολύ ρίζα ή δύο το πολύ ρίζες κ. λ. π., εργαζόμαστε ως εξής: Υποθέτουμε ότι η εξίσωση έχει μία παραπάνω ρίζα. Εφαρμόζουμε θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση f στα διαστήματα μεταξύ των ριζών που υποθέτουμε ότι έχει και καταλήγουμε σε άτοπο.
Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα Δ, αποδεικνύουμε ότι η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον ρίζα (πιθανότατα με Θεώρημα Bolzano) και μια το πολύ ρίζα σύμφωνα με τα παραπάνω.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^3 = 3x - 1$ (1) έχει μοναδική λύση στο διάστημα (0, 1).

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Η εξίσωση (1) γράφεται: $f(x) = 0$.

- Η f είναι συνεχής στο [0, 1] ως πολυωνυμική.
- $\left.\begin{matrix} f(0) = 1 \\ f(1) = -1 \end{matrix}\right\} f(0) \cdot f(1) < 1.$

Σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μία λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$, δηλαδή της (1), στο διάστημα (0,1).
Θα αποδείξουμε ότι αυτή η λύση είναι μοναδική.
Έστω ότι η εξίσωση (1) έχει δύο λύσεις στο διάστημα (0,1), τις ρ_1, ρ_2, με $\rho_1 < \rho_2$.

- Η f είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ ως πολυωνυμική και
- παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) με $f'(x)=3x^2 - 3$.
- Επίσης, $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\rho_1, \rho_2) \subseteq (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 3\xi^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \xi^2 = 1 \Leftrightarrow \xi = 1 \notin (0, 1)$ ή $\xi = -1 \notin (0, 1)$.
Αυτό όμως είναι **άτοπο** κι επομένως η εξίσωση (1) έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα (0, 1).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Αν $\alpha \neq 0$, να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^4 + \alpha x^3 + \alpha^2 x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (1) έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

Λύση

Έστω ότι η εξίσωση (1) έχει τρεις πραγματικές ρίζες, τις ρ_1, ρ_2, ρ_3, με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$.
Έστω $f(x) = x^4 + \alpha x^3 + \alpha^2 x^2 + \beta x + \gamma$.

- Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2]$, $[\rho_2, \rho_3]$ ως πολυωνυμική.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα (ρ_1, ρ_2), (ρ_2, ρ_3) με $f'(x) = 4x^3 + 3\alpha x^2 + 2\alpha^2 x + \beta$.
- $f(\rho_1) = f(\rho_2) = f(\rho_3) = 0$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ και ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) = 0$ και $f'(\xi_2) = 0$.
Επειδή δεν καταλήξαμε σε άτοπο, εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle για την f' στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$:

- Η f' είναι συνεχής στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$ ως πολυωνυμική.
- Η f' είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (ξ_1, ξ_2) με $f''(x) = 12x^2 + 6\alpha x + 2\alpha^2$.
- $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$ ή $12\xi^2 + 6\alpha\xi + 2\alpha^2 = 0$.
Αυτό είναι **άτοπο**, αφού η παραπάνω εξίσωση είναι αδύνατη, γιατί $\Delta = 36\alpha^2 - 96\alpha^2 = -60\alpha^2 < 0$.
Άρα, η (1) δεν μπορεί να έχει τρεις ρίζες κι επομένως έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

☞ **ΜΕΘΟΔΟΣ 3^η**

Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα σ' ένα διάστημα Δ, εργαζόμαστε ως εξής: Εφαρμόζουμε Θεώρημα Bolzano για την f στο Δ. Αν αυτό δεν εφαρμόζεται, τότε εφαρμόζουμε θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση g στο Δ, όπου $g'(x) = f(x)$ (η g λέγεται αρχική συνάρτηση της f).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Αν 4α + 6β + 12γ = -3, να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (1) έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα (0, 1).

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{\alpha x^3}{3} + \frac{\beta x^2}{2} + \gamma x$.

- Η f είναι συνεχής στο [0, 1] ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στο (0, 1) με $f'(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.
- Επίσης, f(0) = 0 και $f(1) = \frac{1}{4} + \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} + \gamma = \frac{1}{12}(3 + 4\alpha + 6\beta + 12\gamma) = 0 = f(0)$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον μία λύση της εξίσωσης $f'(x)=0$ στο (0, 1), δηλαδή της εξίσωσης (1) στο (0,1).

ΜΕΘΟΔΟΣ 4η

Αν ζητείται να αποδείξουμε μια ισότητα που περιέχει f(ξ), f΄(ξ) και μια παράσταση του $\xi \in (\alpha, \beta)$, τότε στη θέση του ξ θέτουμε το x και προσπαθούμε να εμφανίσουμε την αρχική κατάλληλης συνάρτησης. Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle για την αρχική αυτή συνάρτηση.
Πρέπει σ' αυτό το σημείο να δώσουμε τον ορισμό της αρχικής συνάρτησης:
Η συνάρτηση g λέγεται αρχική συνάρτηση της f στο διάστημα Δ, όταν είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $g'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Δίνεται η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathfrak{R}$, συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β), για την οποία ισχύει $f(\alpha) - f(\beta) = \alpha^2 - \beta^2$ (1).
Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 2\xi$ (2).

Λύση

Από τη (2) έχουμε: $f'(\xi) - 2\xi = 0$. Δηλαδή, το ξ είναι ρίζα της εξίσωσης
$f'(x) - 2x = 0$ ή $f'(x) - (x^2)' = 0$ ή $[f(x) - (x)^2]' = 0$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση g με $g(x) = f(x) - x^2$.

- Η g είναι ορισμένη και συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων
- παραγωγίσιμη στο (α, β) με $g'(x) = [f(x) - (x)^2]' = f'(x) - 2x$
- $g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha^2$ και $g(\beta) = f(\beta) - \beta^2 = f(\alpha) - \alpha^2 = g(\alpha)$, λόγω της (1).

Συνεπώς, η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο $[\alpha, \beta]$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi) = 0$ ή $f'(\xi) - 2\xi = 0$ ή $f'(\xi) = 2\xi$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Έστω δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g ορισμένες στο $[0, 1]$ τέτοιες, ώστε $f(x) \cdot g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$ και $f(0) = g(1) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} = 0$ (1).

Λύση

Η (1) γράφεται ισοδύναμα: $\frac{f'(\xi) \cdot g(\xi) + g'(\xi) \cdot f(\xi)}{f(\xi) \cdot g(\xi)} = 0$ ή $f'(\xi) \cdot g(\xi) + g'(\xi) \cdot f(\xi) = 0$.

Δηλαδή, το ξ είναι ρίζα της εξίσωσης $f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x) = 0$ ή $[f(x) \cdot g(x)]' = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

- Η συνάρτηση h είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και
- παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με: $h'(x) = [f(x).g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$.
- $h(0) = f(0) \cdot g(0) = 0$ και $h(1) = f(1) \cdot g(1) = 0$.

Έτσι η h ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο $[0, 1]$ κι επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $h'(\xi)=0$ ή $f'(\xi) \cdot g(\xi) + g'(\xi) \cdot f(\xi) = 0$ ή $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} = 0$ (αφού για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $f(x) \cdot g(x) \neq 0$) .

ΜΕΘΟΔΟΣ 5η
Για να αποδείξουμε μία ανίσωση της μορφής $g(\alpha, \beta) < f(\beta) - f(\alpha) < h(\alpha, \beta)$, εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Αν $\alpha, \beta \in \Re$ με $\alpha < \beta$, να αποδειχθεί ότι $(\beta - \alpha)3^{\alpha}\ln 3 < 3^{\beta} - 3^{\alpha} < (\beta - \alpha)3^{\beta}\ln 3$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 3^x$.
Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως εκθετική και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f'(x) = 3^x\ln 3$.
Σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow 3^{\xi}\ln 3 = \dfrac{3^{\beta} - 3^{\alpha}}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow 3^{\beta} - 3^{\alpha} = (\beta - \alpha)3^{\xi}\ln 3$.
Αρκεί να αποδείξουμε ότι: $(\beta - \alpha)3^{\alpha}\ln 3 < 3^{\beta} - 3^{\alpha} < (\beta - \alpha)3^{\beta}\ln 3 \Leftrightarrow$
$(\beta - \alpha)3^{\alpha}\ln 3 < (\beta - \alpha)3^{\xi}\ln 3 < (\beta - \alpha)3^{\beta}\ln 3 \Leftrightarrow$
$3^{\alpha} < 3^{\xi} < 3^{\beta}$ (αφού $\beta - \alpha > 0$ και $\ln 3 > 0$) $\Leftrightarrow \alpha < \xi < \beta$ που ισχύει.
Άρα, αποδείχθηκε ότι $(\beta - \alpha)3^{\alpha}\ln 3 < 3^{\beta} - 3^{\alpha} < (\beta - \alpha)3^{\beta}\ln 3$.

ΜΕΘΟΔΟΣ 6η
Σε ασκήσεις που θέλουμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη

- στον άξονα x΄x, εφαρμόζουμε Θεώρημα Rolle για την f στο $[\alpha, \beta]$.
- σε μη οριζόντια ευθεία, εφαρμόζουμε Θεώρημα Μέσης Τιμής για την f στο $[\alpha, \beta]$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8

Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο [α, β], με f(β) = 3α και f(α) = 3β. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Μ(ξ, f(ξ)) να είναι παράλληλη στην ευθεία ε: y + 3x - 1 = 0.

Λύση

Η (ε) γράφεται y = -3x + 1 και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon = -3$.
Στο [α, β] η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, αφού είναι παραγωγίσιμη στο [α, β] κι επομένως συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β).
Άρα, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{3\alpha - 3\beta}{\beta - \alpha} = \frac{-3(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha} = -3.$$

Η εφαπτομένη της C_f στο Μ(ξ, f(ξ)) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -3 = \lambda_\varepsilon$ κι επομένως είναι παράλληλη στην ευθεία (ε).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β] για την οποία ισχύουν: f(x) > 0 για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και ln(f(β)) - ln(f(α)) = β - α. Αν $g(x) = f(x) \cdot e^{-x}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

Λύση

Η συνάρτηση g πληρεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα [α, β], αφού:

- είναι συνεχής στο [α, β] ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με $g'(x) = [f(x) \cdot e^{-x}]' = f'(x) \cdot e^{-x} + f(x) \cdot [e^{-x}]' = f'(x) \cdot e^{-x} - f(x) \cdot e^{-x} = [f'(x) - f(x)] \cdot e^{-x}$.
- $g(\alpha) = f(\alpha) \cdot e^{-\alpha}$, $g(\beta) = f(\beta) \cdot e^{-\beta}$ και

$$\ln(f(\beta)) - \ln(f(\alpha)) = \beta - \alpha \Leftrightarrow \ln\left[\frac{f(\beta)}{f(\alpha)}\right] = \beta - \alpha \Leftrightarrow \frac{f(\beta)}{f(\alpha)} = e^{\beta - \alpha} \Leftrightarrow \frac{f(\beta)}{f(\alpha)} = \frac{e^{\beta}}{e^{\alpha}} \Leftrightarrow$$

$$f(\alpha) \cdot e^{-\alpha} = f(\beta) \cdot e^{-\beta} \Leftrightarrow g(\alpha) = g(\beta).$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g'(x_o) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι στο σημείο $M(x_o, g(x_o))$ η εφαπτομένη της C_g είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

☞ Άλλα παραδείγματα Β΄ ομάδας

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10

Έστω f: $\Re \to \Re$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με f(0) = 0. Αν για κάθε $x \in \Re$ ισχύει $1 \le f'(x) \le 2$, να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει $x \le f(x) \le 2x$.

Λύση

Θεωρούμε τυχαίο x > 0.
Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο [0, x], αφού είναι συνεχής στο [0, x] και παραγωγίσιμη στο (0, x) ως παραγωγίσιμη στο $\Re$.
Επομένως, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, x) \subseteq (0, +\infty)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}.$$

Ισχύει ότι $1 \le f'(\xi) \le 2$ ή $1 \le \dfrac{f(x)}{x} \le 2$ ή $x \le f(x) \le 2x$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11

Έστω f: $\Re \to \Re$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με f(-1) = -2 και f(1) = 2. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (-1, 1)$ με $\xi_1 < \xi_2$ τέτοια, ώστε $\dfrac{1}{f'(\xi_1)} + \dfrac{1}{f'(\xi_2)} = 1$.

Λύση

Αρχικά εφαρμόζουμε το Θεώρημα Bolzano για τη συνάρτηση f στο διάστημα (-1, 1).

- Η f είναι συνεχής στο [-1, 1].
- $f(-1) \cdot f(1) = -2 \cdot 2 = -4 < 0$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o \in (-1, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_o) = 0$.
Εφαρμόζουμε τώρα Θεώρημα Μέσης Τιμής για τη συνάρτηση f στα διαστήματα $[-1, x_o]$, $[x_o, 1]$.
Η f είναι :

- συνεχής στα διαστήματα $[-1, x_o]$, $[x_o, 1]$
- παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(-1, x_o)$, $(x_o, 1)$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (-1, x_o)$ και τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x_o, 1)$ τέτοια, ώστε να ισχύουν $f'(\xi_1) = \dfrac{f(x_o)-f(-1)}{x_o-(-1)} = \dfrac{2}{x_o+1}$ και $f'(\xi_2) = \dfrac{f(1)-f(x_o)}{1-x_o} = \dfrac{2}{1-x_o}$.

Άρα, υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (-1, 1)$ με $\xi_1 < \xi_2$ τέτοια, ώστε $\dfrac{1}{f'(\xi_1)} + \dfrac{1}{f'(\xi_2)} =$

$\dfrac{x_o+1}{2} + \dfrac{1-x_o}{2} = \dfrac{x_o+1+1-x_o}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ομάδα

1. Να εξεταστεί ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα που αναφέρεται. Στη συνέχεια, γι' αυτές που ισχύει το Θεώρημα Rolle, να βρεθούν όλα τα $\xi \in (\alpha, \beta)$ για τα οποία ισχύει $f΄(\xi) = 0$.

α) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ στο $[0, 3]$

β) $f(x) = ημ4x$ στο $[0, \frac{\pi}{2}]$

γ) $f(x) = |x - 1|$ στο $[0, 2]$

δ) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \le 0 \\ x^3 + x, & x > 0 \end{cases}$ στο $[-2, 1]$

ε) $f(x) = \begin{cases} ημx, & x > 0 \\ x^2 + x, & x \le 0 \end{cases}$ στο $[-1, \pi]$

στ) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 3, & x \le 1 \\ x^3 + x + 4, & x > 1 \end{cases}$ στο $[-4, 2]$.

2. Να εξεταστεί ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα που αναφέρεται. Στη συνέχεια, γι' αυτές που ισχύει το θεώρημα, να βρεθούν όλα τα $\xi \in (\alpha, \beta)$ για τα οποία ισχύει $f΄(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$.

α) $f(x) = x^2 - 4x + 5$ στο $[0, 1]$

β) $f(x) = 4συν2x$ στο $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

γ) $f(x) = x\ln x$ στο $[1, e]$

δ) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1, & x \le 1 \\ x^3 + x + 2, & x > 1 \end{cases}$ στο $[0, 2]$

ε) $f(x) = \begin{cases} ημx, & x > 0 \\ 2x^2 + x, & x \le 0 \end{cases}$ στο $[-\frac{1}{2}, \pi]$

στ) $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x - 2, & x < 2 \\ x + 5, & x \ge 2 \end{cases}$ στο $[0, 3]$

ζ) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 3, & x \le 1 \\ 3x^2 + x + 2, & x > 1 \end{cases}$ στο $[0, 2]$.

3. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta, \gamma \in \Re$, ώστε να ισχύει το Θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & x \le 0 \\ x^3 + \gamma x, & x > 0 \end{cases}$ στο διάστημα $[-2, 1]$. Στη συνέχεια, να βρεθούν τα $\xi \in (-2, 1)$ με $f'(\xi) = 0$.

4. Να βρεθούν τα α, $\beta \in \Re$, ώστε να ισχύει το Θεώρημα Μέσης Τιμής για τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 + \alpha x + 2, & x < 0 \\ x^3 + x + \beta, & x \geq 0 \end{cases}$ στο διάστημα [-1, 1]. Στη συνέχεια, να βρεθούν τα $\xi \in (-1, 1)$ με $f'(\xi) = \dfrac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)}$.

5. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [0, 3] με f(0) = 1997 και $-\dfrac{1}{3} \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{3}$, για κάθε $x \in (0, 3)$, να αποδειχθεί ότι $1996 \leq f(3) \leq 1998$.

6. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{5x^2}{2} + 4x + \alpha = 0$, $\alpha \in \Re$, δεν μπορεί να έχει δύο διαφορετικές ρίζες στο διάστημα (2, 3).

7. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $2x^3 - 9x^2 + 14 = 0$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα (1, 2).

8. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x = 1 - e^x$ έχει μοναδική λύση την x = 0.

9. Να βρεθεί πόσες ρίζες έχει η παράγωγος της συνάρτησης
f(x) = x(x-1)(x-5)(x+2) και σε ποια διαστήματα ανήκουν.

<u>Β΄ ομάδα</u>

1. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^{10} + \kappa x + \lambda = 0$ ($\kappa, \lambda \in \Re$) έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

2. Αν $-11 < \alpha < 11$, να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^3 - 12x + \alpha = 0$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα (-1, 1).

3. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^4 + 2x^3 + 6x^2 + \alpha x + \beta = 0$, όπου $\alpha, \beta \in \Re$, δεν μπορεί να έχει τρεις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

4. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^3 - 3x^2 + 3x + \alpha = 0$, όπου $\alpha \in \Re$, έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

5. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^4 + x^3 + 12x^2 + \alpha x + \beta = 0$, όπου $\alpha, \beta \in \Re$, δεν μπορεί να έχει τρεις πραγματικές ρίζες.

6. Αν $3α + 4β + 6γ + 12δ = 0$, να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $αx^3 + βx^2 + γx + δ = 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $(0, 1)$.

7. Να αποδειχθεί ότι $1 - \frac{α}{β} \le \ln β - \ln α \le \frac{β}{α} - 1$, για κάθε α, β θετικούς αριθμούς με $α \le β$.

8. Να αποδειχθεί ότι $\ln α + 1 < \frac{β\ln β - α\ln α}{β - α} < \ln β + 1$, για κάθε $α, β \in \Re$ με $0 < α < β$.

9. Να αποδειχθεί ότι $\frac{β - α}{β^2} < \frac{1}{α} - \frac{1}{β} < \frac{β - α}{α^2}$, για κάθε α, β θετικούς αριθμούς με $α < β$.

10. Να αποδειχθεί ότι $(β-α)\cdotσυνβ \le ημβ - ημα \le (β-α)\cdotσυνα$, για κάθε $α, β \in (0, \frac{π}{2})$ με $α \le β$.

11. Αν $α, β \in \Re$ με $α \ge β$, να αποδειχθεί ότι $(α - β)e^β \le e^α - e^β \le (α - β)e^α$.

12. Έστω μία συνάρτηση g συνεχής στο $[α, β]$ και παραγωγίσιμη στο $(α, β)$. Αν για τη συνάρτηση f με $f(x) = e^{-λx}g(x)$ (όπου $λ \in \Re$) ισχύει $f(α) = f(β)$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει $ξ \in (α, β)$ με $g'(ξ) = λg(ξ)$.

13. Έστω μία συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[α, β]$. Αν υπάρχει $x_0 \in (α, β)$ τέτοιο, ώστε $f(α) = f(x_0) = f(β)$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει $ξ \in (α, β)$ με $f''(ξ)=0$.

14. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = (x-6)\cdot\ln(x-1)$ με τετμημένη $x_0 \in (2, 6)$, στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα x'x.

15. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, 8]$ με $f(0) = f(8)$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $ξ_1 \in (0,4)$ και ένα τουλάχιστον $ξ_2 \in (4,8)$ τέτοια, ώστε $f'(ξ_1) + f'(ξ_2) = 0$.

16. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής στο $[α, β]$ και παραγωγίσιμη στο $(α, β)$ με

$f(\alpha) = 2\beta$, $f(\beta) = 2\alpha$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι κάθετη στην ευθεία ε: $x - 2\psi + 5 = 0$.

17. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμες στο (α, β), για τις οποίες ισχύει ότι $f(\alpha) = f(\beta) = 0$, $g(\alpha)\cdot g(\beta) \neq 0$ και $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$, ώστε $g(\gamma) = 0$.

18. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β). Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $[f(\beta) - f(\alpha)]x + (\alpha - \beta)\psi + \gamma = 0$ με $\gamma \in \Re$.

19. Έστω δύο συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο $[\alpha, \beta]$ με $g(x) \neq 0$ και $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Αν ισχύει ότι $f(\alpha)\cdot g(\beta) = f(\beta)\cdot g(\alpha)$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε να ισχύει $f'(\xi)\cdot g(\xi) = f(\xi)\cdot g'(\xi)$.

20. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$, παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ και ισχύει $f(1) - f(2) = -3$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_o \in (1, 2)$ με $f'(x_o) = 4x_o - 3$.

21. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια, ώστε να είναι $f'(x_1) + f'(x_2) = 0$. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά την πρόταση αυτή .

22. Δύο κολυμβητές σ' έναν αγώνα τερματίζουν ταυτόχρονα . Να αποδείξετε ότι υπάρχει μία τουλάχιστον χρονική στιγμή κατά τη διάρκεια του αγώνα στην οποία οι δύο κολυμβητές έχουν την ίδια ταχύτητα .