ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμός

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x,y συνδέονται με τη σχέση $y=f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_o, τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_o την παράγωγο $f'(x_o)$.

Συνέπειες του ορισμού

1. Έστω ένα κινητό που κινείται ευθύγραμμα και $S(t)$ η συνάρτηση που δίνει τη θέση του κινητού πάνω στον άξονα κίνησης.

- Ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης $S(t)$ ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 είναι η παράγωγος $S'(t_o)$ της $S(t)$ ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_o. Η παράγωγος $S'(t_o)$ λέγεται ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή t_o και συμβολίζεται με $\upsilon(t_o)$.

- Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας υ ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_o είναι η παράγωγος $\upsilon'(t_o)$ της ταχύτητας υ ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_o. Η παράγωγος $\upsilon'(t_o)$ λέγεται επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή t_o και συμβολίζεται με $\alpha(t_o)$. Είναι, δηλαδή, $\upsilon(t_o) = S'(t_o)$ και $\alpha(t_o)=\upsilon'(t_o)=S''(t_o)$.

2. Στην οικονομία, το κόστος παραγωγής Κ, η είσπραξη Ε και το κέρδος Ρ εκφράζονται συναρτήσει της ποσότητας x του παραγόμενου προϊόντος.

- Έτσι, η παράγωγος $K'(x_o)$ παριστάνει το ρυθμό μεταβολής του κόστους Κ ως προς την ποσότητα x, όταν $x=x_o$, και λέγεται οριακό κόστος στο x_o.

- Η παράγωγος $E'(x_o)$ παριστάνει το ρυθμό μεταβολής της είσπραξης Ε ως προς την ποσότητα x, όταν $x=x_o$, και λέγεται οριακή είσπραξη στο x_o.

- Η παράγωγος $P'(x_o)$ παριστάνει το ρυθμό μεταβολής του κέρδους Ρ ως προς την ποσότητα x, όταν $x=x_o$, και λέγεται οριακό κέρδος στο x_o.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

ΜΕΘΟΔΟΣ 1η

Για να βρούμε το ρυθμό μεταβολής ενός μεγέθους Κ ως προς μια μεταβλητή x, όταν x = x_o, θα πρέπει πρώτα να εκφράσουμε το Κ ως συνάρτηση του x. Στη συνέχεια βρίσκουμε την παράγωγο Κ΄(x).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Ο όγκος μιας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό 128π cm^3/sec.

α) Τη χρονική στιγμή κατά την οποία η ακτίνα της σφαίρας είναι 4 cm, να βρεθεί ο ρυθμός αύξησης της ακτίνας και της επιφάνειας της σφαίρας.

β) Να βρεθεί η ακτίνα της σφαίρας τη χρονική στιγμή κατά την οποία η επιφάνεια της αυξάνεται με ρυθμό 256π cm^2/sec.

Ισχύουν: $V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t)$ και $E(t) = 4\pi r^2(t)$.

Λύση

α) Έστω t_1 η χρονική στιγμή κατά την οποία η ακτίνα της σφαίρας είναι 4cm.

Τότε, $V'(t) = \frac{4}{3}\pi\cdot 3r^2(t)\cdot r'(t)$ ή $128\pi = 4\pi r^2(t)r'(t)$. **(1)**

Για $t = t_1$ έχουμε: $128\pi = 4\pi r^2(t_1)r'(t_1)$ ή $128\pi = 4\pi 4^2 r'(t_1)$ ή $r'(t_1) = 2$ cm/sec.

Επίσης, $E'(t) = 4\pi\cdot 2r(t)\cdot r'(t) = 8\pi r(t)r'(t)$. **(2)**

Για $t = t_1$ έχουμε: $E'(t_1) = 8\pi r(t_1)r'(t_1) = 8\pi\cdot 4\cdot 2 = 64\pi$ cm^2/sec.

β) Έστω t_2 η χρονική στιγμή κατά την οποία η επιφάνεια της σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό 256π cm^2/sec.

Τότε, η σχέση (2) με τη βοήθεια της (1) για $t = t_2$ δίνει

$E'(t_2) = 8\pi r(t_2)r'(t_2)$ ή $256\pi = 8\pi r(t_2)\frac{128\pi}{4\pi r^2(t_2)}$ ή $1 = \frac{1}{r(t_2)}$ ή

$r(t_2) = 1$ cm.

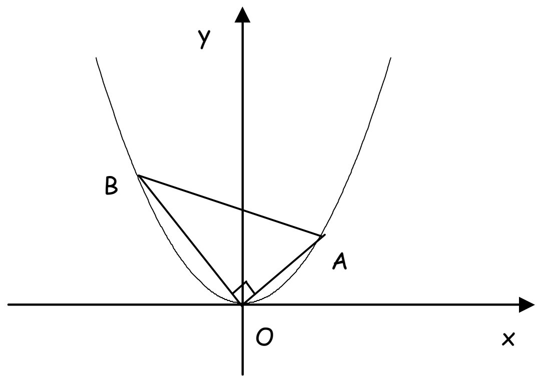
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Μια μεταβλητή ορθή γωνία $\hat{AOB}$ τέμνει την παραβολή με εξίσωση $y = x^2$ στα σημεία Α, Β, όπου Ο η αρχή των αξόνων. Η τετμημένη x_A του σημείου Α μεταβάλλεται με ρυθμό 3 cm/sec.

α) Να αποδειχθεί ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι ίσο με $\frac{1}{2}\left|a+\frac{1}{a}\right|$, όπου $a = x_A$.

β) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΑΒ τη χρονική στιγμή κατά την οποία είναι $a = 2$ cm.

Λύση



Αφού η τετμημένη $x_A = a$ του σημείου $A(a, a^2)$ μεταβάλλεται με ρυθμό 3 cm/sec, είναι $a΄(t) = 3$ cm/sec.

Είναι $λ_{OA} = \frac{a^2 - 0}{a - 0} = a$ και ΟΑ: $y = ax$.

Επομένως, ΟΒ: $y = -\frac{1}{a}x$.

Οι συντεταγμένες του Β βρίσκονται από το σύστημα: $\begin{cases} y = -\frac{1}{a}x \\ y = x^2 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y = -\frac{1}{a}x \\ -\frac{1}{a}x = x^2 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y = -\frac{1}{a}x \\ x = 0 \quad ή \quad x = -\frac{1}{a} \end{cases}$ ή

$(x, y) = (-\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2})$ ή $(0, 0)$. Άρα, $B(-\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2})$.

Είναι $E_{OAB} = \frac{1}{2}(OA)(OB) = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + a^4}\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^4}} =$

$\frac{1}{2}|a|\left|\frac{1}{a}\right|\sqrt{(1 + a^2)(1 + \frac{1}{a^2})} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{1}{a^2} + a^2 + 1} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \frac{1}{a^2} + a^2} =$

$\frac{1}{2}\sqrt{2 + \frac{1}{a^2} + a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{1}{a} + a)^2} = \frac{1}{2}\left|a + \frac{1}{a}\right|$, με $a \neq 0$.

β) Για $a > 0$: $E_{OAB} = \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})$. Έστω $E(t) = \frac{1}{2}[a(t) + \frac{1}{a(t)}]$, με $t > 0$.

Για κάθε $t > 0$: $E'(t) = \frac{1}{2}[\alpha'(t) - \frac{1}{\alpha^2(t)}\alpha'(t)] = \frac{1}{2}[3 - \frac{3}{\alpha^2(t)}] =$

$\frac{3}{2}[1 - \frac{1}{\alpha^2(t)}]$.

Τη χρονική στιγμή κατά την οποία είναι $\alpha = 2$ cm είναι $E'(2) = \frac{3}{2}[1 - \frac{1}{2^2}] =$

$\frac{9}{8}$ cm^2/sec.

ΜΕΘΟΔΟΣ 2η

Όταν η θέση ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα δίνεται από τη συνάρτηση $S(t)$, τότε η στιγμιαία του ταχύτητα τη χρονική στιγμή t_o είναι $\upsilon(t_o) = S'(t_o)$ και η επιτάχυνσή του την ίδια χρονική στιγμή είναι $\alpha(t_o) = \upsilon'(t_o) = S''(t_o)$.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3</u>

Η θέση ενός κινητού που κινείται πάνω στον άξονα $x'x$ δίνεται από τη συνάρτηση $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t - 4$, $t \geq 0$.

α) Ποιες χρονικές στιγμές το κινητό βρίσκεται στην αρχή των αξόνων;

β) Να βρεθεί η ταχύτητα του κινητού για $t = 2$ sec.

γ) Να βρεθούν οι θέσεις του κινητού στις οποίες αυτό ηρεμεί.

δ) Να βρεθεί η επιτάχυνση του κινητού στο τρίτο δευτερόλεπτο της κίνησης.

<u>Λύση</u>

α) Το κινητό βρίσκεται στην αρχή των αξόνων όταν $x(t) = 0$ ή

$t^3 - 6t^2 + 9t - 4 = 0$. Με σχήμα Horner έχουμε:

1	-6	9	-4	1
	1	-5	4	
1	-5	4	0	

Άρα, η παραπάνω εξίσωση γράφεται: $(t - 1)(t^2 - 5t + 4) = 0 \Leftrightarrow$

$t = 1$ ή $t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ sec ή $t = 4$ sec.

β) Για κάθε $t \geq 0$ η ταχύτητα του κινητού δίνεται από τον τύπο:

$\upsilon(t) = x'(t) = (t^3 - 6t^2 + 9t - 4)' = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t^2 - 4t + 3)$.

Οπότε, τη χρονική στιγμή $t = 2$ η ταχύτητα του κινητού είναι

$\upsilon(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = 12 - 24 + 9 = -3$ μον/sec.

γ) Το κινητό ηρεμεί όταν $\upsilon(t) = 0 \Leftrightarrow 3(t^2 - 4t + 3) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ sec ή $t = 3$ sec.

δ) Για κάθε $t \geq 0$ η επιτάχυνση του κινητού δίνεται από τον τύπο:

$\alpha(t) = \upsilon'(t) = (3t^2 - 12t + 9)' = 6t - 12 = 6(t - 2)$.

Η επιτάχυνση του κινητού στο τρίτο δευτερόλεπτο της κίνησης είναι ίση με

$\alpha(3) = 6(3 - 2) = 6$ μ/sec^2.

ΜΕΘΟΔΟΣ 3η

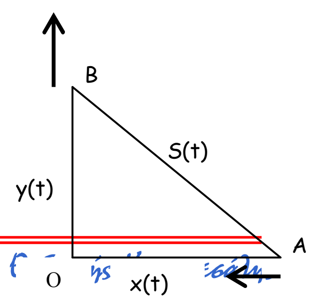
Πολλές φορές είναι δύσκολο να λύσουμε κάποια εξίσωση και να βρούμε τη συνάρτηση που εκφράζει το μέγεθος του οποίου ζητάμε τον ρυθμό μεταβολής. Σε τέτοιες περιπτώσεις παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της σχέσης που περιέχει το μέγεθος αυτό.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4</u>

Ένα αυτοκίνητο βρίσκεται σε απόσταση 4 km ανατολικά από ένα σταυροδρόμι και κινείται προς αυτό με ταχύτητα 50 km/h. Την ίδια στιγμή ένα άλλο αυτοκίνητο βρίσκεται 3 km βόρεια από το σταυροδρόμι και απομακρύνεται με ταχύτητα 60 km/h. Να βρεθεί ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται η μεταξύ τους απόσταση την παραπάνω χρονική στιγμή.

<u>Λύση</u>

Έστω $(OA) = x(t)$, $(OB) = y(t)$ και $(AB) = s(t)$.
Ισχύει $(AB)^2 = (AO)^2 + (OB)^2$ ή $s^2(t) = x^2(t) + y^2(t)$ (1).



Παραγωγίζοντας έχουμε: $2s(t)s'(t) = 2x(t)x'(t) + 2y'(t)y(t)$ ή
$s(t)s'(t) = x(t)x'(t) + y'(t)y(t)$ (2).
Όμως $x(t_o) = 4$ km, $y(t_o) = 3$ km.
Η σχέση (1) την χρονική στιγμή $t = t_o$ δίνει:
$s^2(t_o) = x^2(t_o) + y^2(t_o) = 4^2 + 3^2 = 25$.
Άρα, $s(t_o) = 5$ km.
Είναι $x'(t_o) = -50$ km/h (γιατί η απόσταση (ΟΑ) μικραίνει) και $y'(t_o) = 60$ km/h.
Η σχέση (1) την χρονική στιγμή $t = t_o$ δίνει
$s(t_o)s'(t_o) = x(t_o)x'(t_o) + y'(t_o)y(t_o)$ ή $5 \cdot s'(t_o) = 4 \cdot (-50) + 60 \cdot 3$ ή
$5 \cdot s'(t_o) = -20$ ή $s'(t_o) = -4$ km/h.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Ένα αεροπλάνο πετάει ευθύγραμμα σε ύψος 4.000 ft με ταχύτητα 500 ft/sec. Ένα περιστρεφόμενο ραντάρ παρακολουθεί το αεροπλάνο από το έδαφος. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής με τον οποίο περιστρέφεται το ραντάρ 4 sec μετά από τη χρονική στιγμή που το αεροπλάνο διέρχεται ακριβώς πάνω από το ραντάρ.

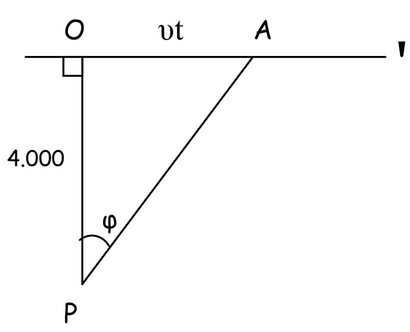
Λύση

Έστω P η θέση του ραντάρ, A η θέση του αεροπλάνου και O η θέση του αεροπλάνου όταν αυτό βρίσκεται ακριβώς πάνω από το ραντάρ. Εξετάζουμε την κίνηση του αεροπλάνου από τη θέση O μέχρι τη θέση A.

Είναι (OA) = υt, όπου υ = 500 ft/sec ταχύτητα του αεροπλάνου.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο OPA ισχύει:

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{(OA)}{(OP)} = \frac{500t}{4.000} = \frac{t}{8}.$$



Παραγωγίζοντας την προηγούμενη σχέση ως προς t, παίρνουμε: $[\varepsilon\varphi\varphi(t)]' = \left(\frac{t}{8}\right)'$ ή

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\varphi(t)} \cdot \varphi'(t) = \frac{1}{8} \text{ ή } \varphi'(t) = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\varphi(t)}{8}.$$

Τη χρονική στιγμή $t_o = 4$ sec είναι

(OA) = 500·4 = 2.000 ft.

Την ίδια χρονική στιγμή είναι $συνφ(t_o) = \frac{(ΟΡ)}{(ΑΡ)} = \frac{4.000}{\sqrt{4.000^2 + 2.000^2}} =$

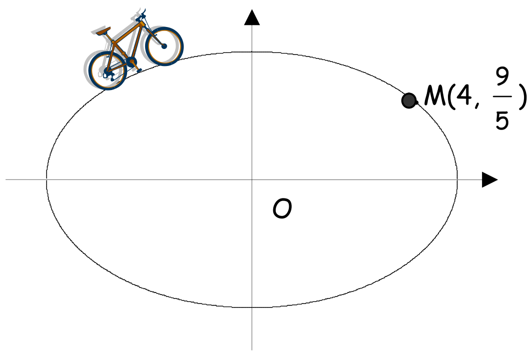
$\frac{4.000}{1.000\sqrt{20}} = \frac{4.000}{1.000\sqrt{20}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Άρα, $φ΄(t_o) = \frac{συν^2φ(t_o)}{8} = \frac{\frac{4}{5}}{8} = \frac{1}{10}$ rad/sec.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Ένα κινητό κινείται έτσι ώστε το άθροισμα των αποστάσεών του από τα σημεία Ε΄(-4, 0), Ε(4, 0) να είναι σταθερό και ίσο με 10 μονάδες. Καθώς το κινητό διέρχεται από το σημείο $Μ(4, \frac{9}{5})$, η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 5 μον./sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του όταν διέρχεται από το Μ.

Λύση



Από τον τρόπο κίνησής του διαπιστώνουμε ότι το κινητό βρίσκεται πάνω σε έλλειψη που έχει εστίες τα σημεία Ε΄(-4, 0), Ε(4, 0) και σταθερό άθροισμα 2α = 10. Άρα, α = 5, γ = 4 και $β = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$. Επομένως, η έλλειψη έχει εξίσωση $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ή $\frac{x^2(t)}{25} + \frac{y^2(t)}{9} = 1$, αφού οι συντεταγμένες του κινητού μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου t.

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση ως προς t παίρνουμε
$\frac{2x(t)x'(t)}{25} + \frac{2y(t)y'(t)}{9} = 0$ (1).

Έστω t_o η χρονική στιγμή κατά την οποία το κινητό διέρχεται από το σημείο Μ. Η σχέση (1) για $t = t_o$ δίνει $\frac{2x(t_o)x'(t_o)}{25} + \frac{2y(t_o)y'(t_o)}{9} = 0$ ή

$\frac{2 \cdot 4 \cdot 5}{25} + \frac{2 \cdot \frac{9}{5} y'(t_o)}{9} = 0$ ή $\frac{8}{5} + \frac{2}{5}y'(t_o) = 0$ ή $y'(t_o) = -4$ μον/sec.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ομάδα

1. Ένα σφαιρικό μπαλόνι αρχίζει να ξεφουσκώνει και η ακτίνα του ελαττώνεται σύμφωνα με τον τύπο $r = 7 - 3t$, όπου t ο χρόνος σε sec και $0 \le t \le \frac{7}{3}$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του όγκου και της επιφάνειας του μπαλονιού τη χρονική στιγμή $t = 2$ sec.

2. Οι διαστάσεις x, y ενός ορθογωνίου αυξάνουν με ρυθμό 3 cm/sec και 5 cm/sec, αντίστοιχα. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου τη στιγμή που οι διαστάσεις του είναι $x = 10$ cm και $y = 15$ cm.

3. Ο όγκος μιας σφαιρικής μπάλας χιονιού μειώνεται με ρυθμό 4 cm^3/sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μείωσης της επιφάνειας της μπάλας όταν η ακτίνα της γίνει 10 cm.

4. Το ύψος ενός κυλίνδρου αυξάνει με ρυθμό $\frac{20}{\pi}$ cm/sec. Αν η ακτίνα της βάσης του κυλίνδρου είναι σταθερή και ίση με 40 cm, να υπολογιστεί ο ρυθμός αύξησης του όγκου του κυλίνδρου.

5. Έστω ΟΑΒ το τρίγωνο που ορίζεται απ' τα σημεία $O(0,0)$, $A(x,0)$, $B(0, 2xe^x)$, όπου $x > 0$. Αν το x μεταβάλλεται με ρυθμό 5 cm/sec, να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου όταν $x = 4$ cm.

6. Ο ρυθμός μεταβολής του όγκου ενός αερόστατου που υψώνεται είναι 10 m^3/sec. Με ποιο ρυθμό αυξάνεται η ακτίνα του τη χρονική στιγμή κατά την οποία αυτή είναι ίση με 20 m; (Το αερόστατο θεωρείται σαν μια σφαίρα)

7. Το κόστος παραγωγής $K(x)$ και η τιμή πώλησης $\Pi(x)$ x μονάδων ενός προϊόντος δίνονται αντίστοιχα απ' τις συναρτήσεις $K(x) = \frac{1}{3}x^3 - 125x^2 + 17.500x + 900$, $\Pi(x) = 7.500x$. Να βρεθεί πότε ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους $P(x)$ είναι θετικός.

8. Αν η επιφάνεια ενός σφαιρικού μπαλονιού που φουσκώνει αυξάνεται με ρυθμό 20 cm^2/sec, να βρεθεί ο ρυθμός με τον οποίο αυξάνεται ο όγκος του τη χρονική στιγμή κατά την οποία η ακτίνα είναι ίση με 40 cm.

9. Η ακτίνα r μιας σφαίρας μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου t σύμφωνα με τον τύπο $r = 3t + 4$, όπου το r μετριέται σε cm και το t σε sec. Να βρεθεί ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται η επιφάνεια Ε της σφαίρας κατά τη χρονική στιγμή $t = 2$ sec.

10. Το ύψος ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο αυξάνεται με ρυθμό 40 cm/sec. Αν η πλευρά του τετραγώνου της βάσης είναι σταθερή και ίση με 10 cm, να υπολογιστεί ο ρυθμός αύξησης του όγκου του παραλληλεπιπέδου.

11. Οι κάθετες πλευρές ΟΑ, ΟΒ ενός ορθογωνίου τριγώνου ΟΑΒ αυξάνουν με ρυθμό 5 cm/sec και 1 cm/sec, αντίστοιχα. Να βρεθεί ο ρυθμός αύξησης του εμβαδού και της περιμέτρου του ορθογωνίου τριγώνου τη χρονική στιγμή κατά την οποία είναι ΟΑ = 4 cm, ΟΒ = 3 cm.

12. Ένα σώμα κινείται πάνω στον άξονα x΄x και η θέση του δίνεται από τη συνάρτηση $x(t) = t^3 - t^2 + 3t$, $t \geq 0$. Το t μετριέται σε sec και το x σε μέτρα.

α) Να βρεθεί η στιγμιαία ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή t.

β) Υπάρχει χρονική στιγμή που το κινητό ηρεμεί;

γ) Να βρείτε τη χρονική στιγμή που η ταχύτητα του κινητού είναι 43 m/sec.

δ) Να βρείτε την επιτάχυνση του κινητού στο πέμπτο δευτερόλεπτο της κίνησης.

13. Ο όγκος ενός κύβου πλευράς α αυξάνεται με ρυθμό 7 cm^3/min. Να βρείτε:

α) το ρυθμό μεταβολής της πλευράς του κύβου ως προς το χρόνο, ως συνάρτηση του α.

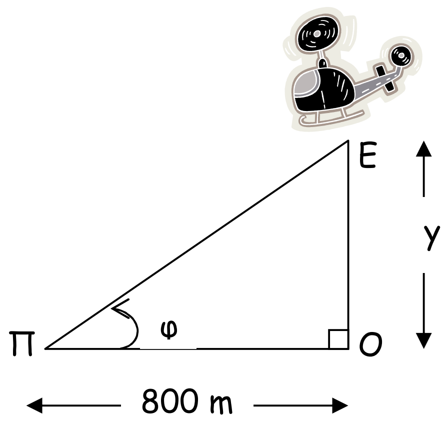
β) το ρυθμό μεταβολής της επιφάνειας του κύβου ως προς το χρόνο, ως συνάρτηση του α.

γ) το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται η επιφάνεια του κύβου όταν ο όγκος του είναι 8 cm^3.

Β΄ ομάδα

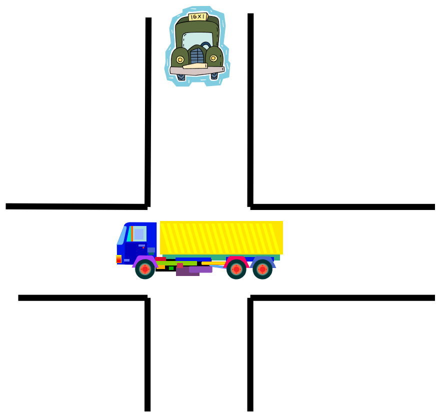
1. Ο όγκος μιας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό 100π cm^3/sec.
α) Τη χρονική στιγμή κατά την οποία η ακτίνα της σφαίρας είναι 2 cm να βρεθεί ο ρυθμός αύξησης της ακτίνας και της επιφάνειας της σφαίρας.
β) Να βρεθεί η ακτίνα της σφαίρας τη χρονική στιγμή κατά την οποία η επιφάνειά της αυξάνεται με ρυθμό 480π cm^2/sec.

2. Ένα ελικόπτερο αφήνει το έδαφος με κατακόρυφη διεύθυνση και ταχύτητα 25 m/sec. Ένας παρατηρητής Π βρίσκεται 800 m μακριά από το σημείο απογείωσης. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας φ που σχηματίζει η ευθεία ΠΕ με το έδαφος τη χρονική στιγμή κατά την οποία το ελικόπτερο βρίσκεται σε ύψος y = 600 m.



3. Τα άκρα Α και Β ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ = 10 cm ολισθαίνουν αντίστοιχα επί των ημιαξόνων Ox και Oy ενός καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων xOy. Τη χρονική στιγμή t_0 που το Α απέχει από την αρχή Ο 6 cm, η ταχύτητά του είναι 4 cm/sec.
α) Να βρείτε την ταχύτητα με την οποία το σημείο Β πλησιάζει την αρχή Ο τη χρονική στιγμή που απέχει 8 cm από αυτή.
β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε του τριγώνου ΟΑΒ ως προς το χρόνο, ως συνάρτηση των x, x΄(t).
γ) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του Ε τη χρονική στιγμή t_0.

4. Ένα αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα 60 m/sec και κατευθύνεται προς μια διασταύρωση. Τη χρονική στιγμή t_0 που απέχει 120 m από αυτή, διέρχεται από τη διασταύρωση ένα φορτηγό με ταχύτητα 40 m/sec και με διεύθυνση κάθετη προς τη διεύθυνση του αυτοκινήτου. Να βρεθεί ο ρυθμός με τον οποίο απομακρύνονται τα δύο οχήματα 2 sec μετά τη στιγμή t_0.



5. Ένα ποδήλατο Π κινείται έτσι ώστε η διαφορά των αποστάσεών του (ΠΕ΄) - (ΠΕ) από τα σημεία Ε΄(-5, 0), Ε(5, 0) να είναι σταθερή και ίση με 8 μονάδες. Καθώς το κινητό διέρχεται από το σημείο Μ(8, $3\sqrt{3}$), η τετμημένη του μειώνεται με ρυθμό $\sqrt{3}$ μον./sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του, όταν το κινητό διέρχεται από το Μ.

6. Ένα κινητό κινείται πάνω σε τέτοια καμπύλη, ώστε η απόστασή του από το σημείο Κ(1, -2) να είναι σταθερή και ίση με 4 μονάδες. Καθώς διέρχεται από το σημείο Α($\sqrt{7}+1$, 1) η τεταγμένη του αυξάνεται με ρυθμό 2 μον./sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του, όταν διέρχεται από το Α.

7. Ένα αυτοκίνητο Α απομακρύνεται από τη διασταύρωση δύο κάθετων δρόμων Οx, Oy, οι οποίοι κατευθύνονται ο ένας προς τα ανατολικά και ο άλλος προς τα βόρεια, αντίστοιχα. Η απόσταση του αυτοκινήτου από το δρόμο Oy ισούται με το τετράγωνο της απόστασής του από το δρόμο Οx. Το αυτοκίνητο απομακρύνεται προς τα ανατολικά με ρυθμό $\sqrt{10}$ km/min. Πόσο γρήγορα απομακρύνεται το αυτοκίνητο από το σημείο Ο (διασταύρωση) τη χρονική στιγμή που έχει απομακρυνθεί 3 km προς τα βόρεια;

8. Ένα σώμα κινείται πάνω στον άξονα x΄x και η θέση του δίνεται από τη συνάρτηση $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t - 4$, $t \geq 0$. Το t μετριέται σε sec και το x σε μέτρα.

α) Που βρίσκεται το σώμα τη χρονική στιγμή t = 0;

β) Προς ποια κατεύθυνση κινείται το σώμα τη χρονική στιγμή t = 0;

γ) Ποιες χρονικές στιγμές το σώμα αλλάζει κατεύθυνση;

δ) Ποια χρονική στιγμή δεν επιταχύνεται το σώμα;

9. Η τετμημένη ενός σημείου της ευθείας $5x - 2y + 1 = 0$ είναι κατά τη χρονική στιγμή t ίση με $4t^2 - 2t + 1$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης, όταν το σημείο βρίσκεται στη θέση (3, 8).

10. Ο πληθυσμός των κατοίκων μιας πόλης αυξάνεται ως προς το χρόνο t σύμφωνα με τον τύπο: $P(t) = P_o\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{t}{10}}$, όπου P_o ο πληθυσμός της πόλης τη χρονική στιγμή t_o.

α) Να βρεθεί ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού μετά από 20 έτη.

β) Να βρεθεί μετά από πόσα έτη ο πληθυσμός των κατοίκων της πόλης θα διπλασιαστεί.

11. Ευθεία ε με συντελεστή διεύθυνσης λ, με λ > 0, στρέφεται γύρω από το σημείο Α(4, 2) με ρυθμό $\lambda'(t) = \frac{1}{10^3}$. Αν η ευθεία ε τέμνει τους άξονες Οx, Oy στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΜΝ τη χρονική στιγμή που η ευθεία διέρχεται από το σημείο Β(5, 3).

12. Μια σκάλα μήκους 10m ακουμπά με το επάνω μέρος της σε ένα τοίχο, ενώ το κάτω μέρος της γλιστράει (μακριά από τον τοίχο) πάνω στο έδαφος με ρυθμό $5 \cdot 10^{-2}$m/sec. Τη χρονική στιγμή t_o που η κορυφή της σκάλας απέχει από το οριζόντιο έδαφος 8m να βρείτε:

α) το ρυθμό μεταβολής της γωνίας ω που σχηματίζει η σκάλα με το έδαφος.

β) την ταχύτητα με την οποία πέφτει η κορυφή της σκάλας.