ΣΤΑΘΕΡΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Θεώρημα

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι σταθερή σ' όλο το διάστημα Δ.

Πόρισμα

Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς σ' ένα διάστημα Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε να ισχύει
$f(x) = g(x) + c$ για κάθε $x \in \Delta$.

Παρατήρηση

Το Θεώρημα και το Πόρισμα ισχύουν σε διαστήματα και όχι σε ένωση διαστημάτων.

Αρχική ή Παράγουσα συνάρτηση

Με αφορμή το Πόρισμα παρατηρούμε πως όταν είναι ίσες οι παράγωγοι δυο συναρτήσεων, τότε δεν έπεται ότι θα είναι ίσες και οι συναρτήσεις. Τελικά, για μια συνάρτηση f υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις F τέτοιες, ώστε $F'(x) = f(x)$.
Στην περίπτωση αυτή η F λέγεται παράγουσα ή αρχική συνάρτηση της f.
Είναι φανερό ότι αν η F είναι παράγουσα της f, τότε και κάθε συνάρτηση της μορφής $F + c$ θα είναι επίσης παράγουσα της f, αφού $(F + c)' = F' = f$.
Για τον προσδιορισμό των παραγουσών μιας συνάρτησης υπάρχουν κανόνες και τύποι, αντίστροφοι των κανόνων και των τύπων που προσδιορίζουν την παράγωγο βασικών συναρτήσεων.

ΚΑΝΟΝΕΣ	
Συνάρτηση	**Παράγουσα**
$\kappa f'(x)$	$\kappa f(x) + c$
$f'(x) + g'(x)$	$f(x) + g(x) + c$
$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	$f(x)g(x) + c$
$\dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$	$\dfrac{f(x)}{g(x)} + c$

ΠΑΡΑΓΟΥΣΕΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ	
Συνάρτηση	**Παράγουσα**
0	c
1	$x + c$
$κ$	$κx + c$
$x^ν$	$\frac{x^{ν+1}}{ν+1} + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$
$ημx$	$-συνx + c$
$συνx$	$ημx + c$
$\frac{1}{συν^2x}$	$εφx + c$
$\frac{1}{ημ^2x}$	$-σφx + c$
e^x	$e^x + c$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + c$

- Για παράδειγμα, η παράγουσα συνάρτηση της $f(x) = 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 7$ είναι η $F(x) = 2\frac{x^6}{6} - 3\frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 7x + c = \frac{x^6}{3} - \frac{3x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 7x + c$.

- Για την $f(x) = (10x + 6)e^{5x^2+6x+1}$, η οποία γράφεται την $f(x) = (10x + 6)e^{5x^2+6x+1}$ $= (5x^2 + 6x + 1)΄\, e^{5x^2+6x+1} = (e^{5x^2+6x+1})΄$, είναι η $F(x) = e^{5x^2+6x+1} + c$.

- Για την $f(x) = 2xημx + x^2συνx$, η οποία γράφεται την $f(x) = (x^2)΄ημx + x^2(ημx)΄ = (x^2ημx)΄$, είναι η $F(x) = x^2ημx + c$.

- Για την $f(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$, η οποία γράφεται την $f(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} =$

$\frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot (x)'}{x^2} = \left(\frac{\ln x}{x}\right)'$, είναι η $F(x) = \frac{\ln x}{x} + c$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

ΜΕΘΟΔΟΣ 1η

Όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση f είναι σταθερή σ' ένα διάστημα Δ, αρκεί να αποδείξουμε ότι $f'(x) = 0$, για κάθε $x \in \Delta$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Έστω μια συνάρτηση f, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$, για την οποία ισχύει ότι $f'(x) \cdot f''(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \Re$ και $f(0) = f'(0) = 1$. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $g(x) = 3[f(x)]^2 + 2[f'(x)]^3$ είναι σταθερή και να βρεθεί η τιμή της.

Λύση

Αφού η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$, η g είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$.
Για να είναι η g σταθερή στο $\Re$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $g'(x) = 0$ στο $\Re$.
Πράγματι, $g'(x) = [3(f(x))^2 + 2(f'(x))^3]' = 6f(x) \cdot f'(x) + 6[f'(x)]^2 \cdot f''(x) = 6f'(x)[f(x) + f'(x) \cdot f''(x)] = 6f'(x)[f(x) - f(x)] = 0$.
Άρα, η g είναι σταθερή στο $\Re$ κι επομένως $g(x) = c$ για κάθε $x \in \Re$.
Για $x = 0$ έχουμε: $g(0) = c$ ή $3[f(0)]^2 + 2[f'(0)]^3 = c$ ή $3.1^2 + 2.1^3 = c$ ή $c = 5$.
Άρα, $g(x) = 5$ για κάθε $x \in \Re$.

ΜΕΘΟΔΟΣ 2η

Όταν θέλουμε να βρούμε τον τύπο μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και μας δίνεται μια ισότητα που περιέχει την f΄ και x, θεωρούμε τη συνάρτηση g που προκύπτει από την ισότητα και αποδεικνύουμε ότι $g'(x) = 0$. Επομένως, θα είναι $g(x) = c$. Το c βρίσκεται αν χρησιμοποιήσουμε κάποιο $x_0 \in \Delta$ του οποίου γνωρίζουμε το $f(x_0)$. Στη συνέχεια από την εξίσωση $g(x) = c$ βρίσκουμε τον τύπο της f.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0, +\infty) \to \Re$ τέτοια, ώστε για κάθε $x > 0$ να ισχύει $f(x) = x \cdot f'(x)$ και $f(1) = 5$. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in [0, +\infty)$ ισχύει $f(x) = 5x$.

Λύση

Ισχύει ότι $x \cdot f'(x) - f(x) = 0$ ή $\dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 0$.

Το πρώτο μέλος της παραπάνω ισότητας είναι η παράγωγος της συνάρτησης $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

Η g είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με:

$g'(x) = \left[\dfrac{f(x)}{x}\right]' = \dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 0$.

Επομένως, είναι $g(x) = c$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Ακόμα, $g(1) = 5$ ή $c = 5$, οπότε: $g(x) = 5$ ή $\dfrac{f(x)}{x} = 5$ ή

$f(x) = 5x$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$, είναι και συνεχής στο 0.

Άρα, $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 5x = 0$.

Δηλαδή, για κάθε $x \in [0, +\infty)$ είναι $f(x) = 5x$.

☞ ΜΕΘΟΔΟΣ 3η

Από μια ισότητα ν-στών παραγώγων δύο συναρτήσεων (π. χ. $f''(x) = g''(x)$) μπορεί να προκύψει ισότητα παραγώγων μιας τάξης μικρότερης με τη βοήθεια του Πορίσματος της παραγράφου. Τη σταθερά c του Πορίσματος τη βρίσκουμε από κάποια συνθήκη που δίνεται. Π. χ. $f(1) = g(1)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες στο $\Re$ για τις οποίες ισχύουν:

- $f^{(3)}(x) = 5g^{(3)}(x)$ για κάθε $x \in \Re$
- $f''(2) = 5g''(2)$
- $f'(1) = 5g'(1) + 3$
- $f(1) = 5g(1) + 5$.

α) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = 5g(x) + 3x + 2$, για κάθε $x \in \Re$.

β) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 5g(x)$.
γ) Αν η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει ρίζες τους αριθμούς -2, 2, τότε να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $(-2, 2)$.

<u>Λύση</u>

α) Για κάθε $x\in\Re$ ισχύει: $f^{(3)}(x) = 5g^{(3)}(x)$ ή $[f''(x)]' = [5g''(x)]'$ ή
$f''(x) = 5g''(x) + c_1$.
Για $x = 2$ η παραπάνω ισότητα δίνει: $f''(2) = 5g''(2) + c_1$ ή $c_1 = 0$.
Άρα, $f''(x) = 5g''(x)$ για κάθε $x\in\Re$.
Για κάθε $x\in\Re$ ισχύει: $f''(x) = 5g''(x)$ ή $[f'(x)]' = [5g'(x)]'$ ή $f'(x) = 5g'(x) + c_2$.
Για $x = 1$ η παραπάνω ισότητα δίνει: $f'(1) = 5g'(1) + c_2$ ή $5g'(1) + 3 = 5g'(1) + c_2$ ή $c_2 = 3$.
Άρα, $f'(x) = 5g'(x) + 3$ για κάθε $x\in\Re$.
Για κάθε $x\in\Re$ ισχύει: $f'(x) = 5g'(x) + 3$ ή $f'(x) = [5g(x) + 3x]'$ ή
$f(x) = 5g(x) + 3x + c_3$.
Για $x = 1$ η παραπάνω ισότητα δίνει: $5g(1) + 5 = 5g(1) + 3 + c_3$ ή $c_3 = 2$.
Άρα, $f(x) = 5g(x) + 3x + 2$, για κάθε $x\in\Re$.
β) Η εξίσωση $f(x) = 5g(x)$ γράφεται διαδοχικά: $f(x) = 5g(x)$ ή $f(x) - 5g(x) = 0$ ή
$3x + 2 = 0$ ή $3x = -2$ ή $x = -\frac{2}{3}$.
γ) Θα εφαρμόσουμε Θεώρημα Bolzano για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[-2, 2]$.

- Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[-2, 2]$ ως παραγωγίσιμη στο $\Re$.
- $f(-2) = 5g(-2) + 3(-2) + 2 = 5\cdot 0 - 6 + 2 = -4 < 0$
  $f(2) = 5g(2) + 3\cdot 2 + 2 = 5\cdot 0 + 6 + 2 = 8 > 0$.

Άρα, $f(-2)\cdot f(2) < 0$ και σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μια λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $(-2, 2)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ομάδα

1. Δύο συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = 3[g(x)]^2$, $g'(x) = -2f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$, $g(0) = 1$. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $[f(x)]^2 + [g(x)]^3$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$ και να βρεθεί η τιμή της.

2. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = ημ^6x + 3ημ^2x \cdot συν^2x + συν^6x$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

3. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $συν^4x - ημ^4x - συν2x = 0$.

4. Έστω δύο συναρτήσεις f, g τρεις φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Αν $f^{(3)}(x) = 3g^{(3)}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f''(0) = 2 + 3g''(0)$, $f'(0) = 1 + 3g'(0)$ και $f(0) = 3g(0)$,
α) να αποδειχθεί ότι $f(x) = 3g(x) + x^2 + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
β) αν $g(0) = g'(0) = 1$, να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο M(0, f(0)).

5. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει $f'(x) \cdot f(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

6. Να βρεθεί συνάρτηση f αν γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x) = 0$ και $f(1) = 4$, $f(2) = 8$.

7. Έστω η συνάρτηση f που ορίζεται στο $\mathbb{R}$. Αν ισχύει $|f(x) - f(y)| \le (x - y)^4$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$

8. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει ότι $f'(x^2) = x$ και $f(1) = 0$, να βρεθεί ο τύπος της f.

Β΄ ομάδα

1. Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι $f'(x) = -2f(x)$ αν και μόνο αν υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$, ώστε να είναι $f(x) = ce^{-2x}$.

2. **α)** Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για την οποία ισχύει $f'(x) = cf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου c σταθερά. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $λ \in \mathbb{R}$ σταθερά έτσι, ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $f(x) = λ \cdot e^{cx}$.
β) Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- $f'(x) - f(x) = g'(x) - g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(2004) = g(2004)$.

Να δειχθεί ότι $f = g$.

3. **α)** Αν $f'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f(x) = ce^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρεθεί η συνάρτηση g ορισμένη στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $g'(x)συνx + g(x)ημx = g(x)συνx$
- $g(0) = 2002$.

4. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f: $(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x > 0$ ισχύουν:

- $f(x) > 0$
- $f'(x) + 2xf(x) = 0$.

Αν επιπλέον η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, 1)$, τότε:

α) Να δείξετε ότι η παράγωγος της f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f.

5. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x + y) = f(x) + f(y) + 3xy(x + y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$
- $f'(0) = 0$.

Να βρεθεί ο τύπος της f.

6. Έστω η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x + y) = f(x)\cdot f(y) - ημx\cdot ημy$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$
- $f(0) \neq 0$
- $f'(0) = 0$.

α) Να δειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

β) Να βρεθεί ο τύπος της f.

7. Δίνεται η συνάρτηση f: $(1, +\infty) \to \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη με $2f(x) = -x\cdot f'(x)\cdot \ln x$, $x > 1$. Αν $f(e) = 1$, να βρεθεί ο τύπος της f.

8. Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ για τις οποίες υποθέτουμε ότι:

- είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο Δ
- $f'' = g''$
- $0 \in \Delta$ και $f(0) = g(0)$.

Να δειχθεί ότι:

α) Για κάθε $x \in \Delta$, είναι $f(x) - g(x) = cx$, $x \in \mathbb{R}$.
β) Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες ετερόσημες ρ_1, ρ_2, τότε η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $[\rho_1, \rho_2]$.

9. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε για κάθε $x > 0$ να είναι $f(x) > 0$. Επιπλέον, για κάθε $x, y > 0$ ισχύει $f(x) - f(y) = (x - y)\left(\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}\right)$.

α) Να αποδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη.
β) Να δειχθεί ότι υπάρχει σταθερά $\alpha \geq 0$ τέτοια, ώστε για κάθε $x > 0$ να είναι $f(x) = (x + \alpha)^2$.

10. Έστω οι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, g, h με $f(1) = g(1) = 0$. Επιπλέον, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν: $f'(x) = g(x) \cdot h(x)$ και $g'(x) = -f(x) \cdot h(x)$.
α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = f^2(x) + g^2(x)$ είναι σταθερή.
Να δειχθεί ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) = g(x) = 0$.

11. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x + y) + 2f(xy) = f(x)f(y) + 2$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$
- $f'(0) = 2$.

Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x) - 2x - 1}{e^{2x}}$ είναι σταθερή και να βρεθεί ο τύπος της f.