ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

Άλγεβρα

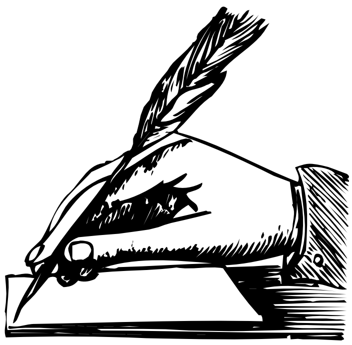
Α΄ Γενικού Ημερησίου Λυκείου

Προσθήκη θεμάτων 8 Νοεμβρίου 2014

Εκφωνήσεις - Λύσεις

των

θεμάτων



Έκδοση 3η (2/12/2014)

Περιέχονται τα θέματα

ΓΗ_Α_ΑΛΓ_2_480	**ΓΗ_Α_ΑΛΓ_4_13088**
ΓΗ_Α_ΑΛΓ_2_13073	**ΓΗ_Α_ΑΛΓ_4_13090**
ΓΗ_Α_ΑΛΓ_2_13096	**ΓΗ_Α_ΑΛΓ_4_13092**
ΓΗ_Α_ΑΛΓ_2_13152	**ΓΗ_Α_ΑΛΓ_4_13093**
ΓΗ_Α_ΑΛΓ_2_13153	**ΓΗ_Α_ΑΛΓ_4_13102**
	ΓΗ_Α_ΑΛΓ_4_13107
ΓΗ_Α_ΑΛΓ_4_13078	**ΓΗ_Α_ΑΛΓ_4_13155**
ΓΗ_Α_ΑΛΓ_4_13082	**ΓΗ_Α_ΑΛΓ_4_13156**
ΓΗ_Α_ΑΛΓ_4_13084	**ΓΗ_Α_ΑΛΓ_4_13158**
ΓΗ_Α_ΑΛΓ_4_13085	**ΓΗ_Α_ΑΛΓ_4_19364**
ΓΗ_Α_ΑΛΓ_4_13086	**ΓΗ_Α_ΑΛΓ_4_20330**

που προστέθηκαν έως τις 29 Νοεμβρίου 2014

Οι απαντήσεις και οι λύσεις
είναι αποτέλεσμα συλλογικής δουλειάς
μελών του Δικτυακού Τόπου **mathematica.gr**
με βάση υλικό που αναρτήθηκε στο mathematica
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=141&t=46957

Συνεργάστηκαν οι:

Γιώργος Βισβίκης, Κώστας Ζυγούρης, Γιώργης Καλαθάκης
Κλεάνθης Μανωλόπουλος, Θανάσης Παπασταθόπουλος,
Γιώργος Ρίζος, Σωτήρης Στόγιας, Grosrouvre

Το **Δελτίο** διατίθεται ελεύθερα
από το δικτυακό τόπο **mathematica.gr**

Θέματα $2^{ης}$ Ομάδας

GI_A_ALG_2_480

Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε σειρά έχει κ καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η 7_η σειρά έχει 36 καθίσματα και το πλήθος των καθισμάτων του σταδίου είναι 300.

α) Αποτελούν τα καθίσματα του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 12)

β) Πόσα καθίσματα έχει κάθε σειρά; (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ:

α) Αφού ο αριθμός των καθισμάτων κάθε σειράς του γηπέδου διαφέρει από την προηγούμενη κατά σταθερό αριθμό κ, σχηματίζεται αριθμητική πρόοδος με διαφορά κ.

β) Είναι $\alpha_7 = 36 \Leftrightarrow \alpha_1 + 6\kappa = 36$ και $S_{10} = 300 \Leftrightarrow \dfrac{2\alpha_1 + 9\kappa}{2}\cdot 10 = 300 \Leftrightarrow 2\alpha_1 + 9\kappa = 60$.

Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} \alpha_1 + 6\kappa = 36 \\ 2\alpha_1 + 9\kappa = 60 \end{cases}$ και βρίσκουμε $\alpha_1 = 12,\ \kappa = 4$

Οπότε οι δέκα σειρές έχουν τους εξής αριθμούς καθισμάτων:

$\alpha_1 = 12, \alpha_2 = 16, \alpha_3 = 20, \alpha_4 = 24, \alpha_5 = 28, \alpha_6 = 32, \alpha_7 = 36, \alpha_8 = 40, \alpha_9 = 44, \alpha_{10} = 48$

ΣΧΟΛΙΟ:

Οι αριθμοί των καθισμάτων κάθε σειράς κι όχι τα καθίσματα αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου. Η λεκτική διατύπωση της εκφώνησης είναι μάλλον ατυχής.

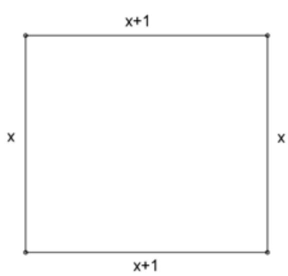
GI_A_ALG_2_13073

Το πάτωμα του εργαστήριου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις $(x+1)$ μέτρα και x μέτρα.

α) Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος. (Μονάδες 10)

β) Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90 τετραγωνικά μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ:



α) Έστω $P(x)$ η περίμετρος και $E(x)$ το εμβαδόν του πατώματος.

$P(x) = 2(x+1) + 2x \Leftrightarrow P(x) = 4x + 2,\ x > 0$

$E(x) = x(x+1) \Leftrightarrow E(x) = x^2 + x,\ x > 0$

β) $E(x) = 90 \ \Leftrightarrow\ x^2 + x - 90 = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 9$ ή $x = -10$ που απορρίπτεται.

Άρα οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι 9 μέτρα και 10 μέτρα.

GI_A_ALG_2_13096

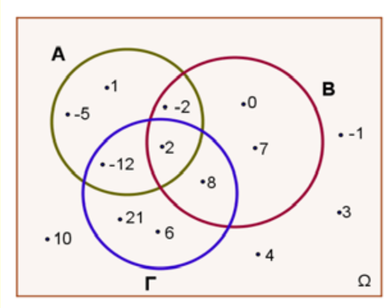
α) Αν A, B, Γ είναι τρία ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω ενός πειράματος τύχης, να διατυπώσετε λεκτικά τα παρακάτω ενδεχόμενα:

i) $A \cup B$ ii) $B \cap \Gamma$ iii) $(A \cap B) \cap \Gamma$ iv) A' (Μονάδες 12)

β) Στο παρακάτω σχήμα παριστάνονται με διάγραμμα Venn ο παραπάνω δειγματικός χώρος **Ω** και τα τρία ενδεχόμενα A, B και Γ αυτού.

Να υπολογίσετε την πιθανότητα πραγματοποίησης των ενδεχομένων του (α) ερωτήματος.

(Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ:

α) i. $A \cup B$: πραγματοποιείται τουλάχιστον ένα από τα ενδεχόμενα Α και Β.
(ή πραγματοποιείται το ενδεχόμενο Α ή το ενδεχόμενο Β).

ii. $B \cap \Gamma$: πραγματοποιούνται συγχρόνως τα ενδεχόμενα Β και Γ.
(ή πραγματοποιούνται το ενδεχόμενο Α και το ενδεχόμενο Β).

iii. $(A \cap B) \cap \Gamma$: πραγματοποιούνται συγχρόνως τα ενδεχόμενα Α , Β και Γ.

iv. A' : δεν πραγματοποιείται το ενδεχόμενο Α.

β) Είναι $A \cup B = \{-12,-5,-2,0,1,2,7,8\}$ με $N(A \cup B) = 8$

$B \cap \Gamma = \{2,8\}$ με $N(B \cap \Gamma) = 2$

$(A \cap B) \cap \Gamma = \{2\}$ με $N[(A \cap B) \cap \Gamma] = 1$

$A' = \{-1,0,3,4,6,7,8,10,21\}$ με $N(A') = 9$

Ακόμη είναι $\Omega = \{-12, -5, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 21\}$ με $N(\Omega) = 14$

Επομένως εφαρμόζοντας τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας:

i. $P(A \cup B) = \dfrac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \dfrac{8}{14}$ ii. $P(B \cap \Gamma) = \dfrac{N(B \cap \Gamma)}{N(\Omega)} = \dfrac{2}{14}$

iii. $P[(A \cap B) \cap \Gamma] = \dfrac{N[(A \cap B) \cap \Gamma]}{N(\Omega)} = \dfrac{1}{14}$ iv. $P(A') = \dfrac{N(A')}{N(\Omega)} = \dfrac{9}{14}$

GI_A_ALG_2_13152

Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2$ και $\Lambda = 2\alpha\beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β. (Μονάδες 12)

β) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ:

α) $K - \Lambda = \alpha^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 + (\alpha - \beta)^2 \geq 0 \Leftrightarrow K \geq \Lambda$

β) $K = \Lambda \Leftrightarrow \alpha = 0 \wedge \alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$

GI_A_ALG_2_13153

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - \kappa x - 2$, με $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta > 0$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου. (Μονάδες 10)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x - 2 = 0$ (1),

i) να βρείτε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών της (1) (Μονάδες 6)

ii) να κατασκευάσετε εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που να έχει ρίζες ρ_1, ρ_2, όπου $\rho_1 = 2x_1$ και $\rho_2 = 2x_2$. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ:

α) Για την διακρίνουσα του δοθέντος τριωνύμου, έχουμε ότι:

$$\Delta = \kappa^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = \kappa^2 + 8 \geq 8 > 0 \text{ για κάθε } \kappa \in \mathbb{R}.$$

βi) Από τους τύπους Vieta για το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξισωσης (1), έχουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{-3}{1} = 3 \text{ και } P = x_1 \cdot x_2 = \frac{-2}{1} = -2.$$

ii) Το άθροισμα των ριζών της υπό κατασκευή εξίσωσης, θα είναι:

$$S' = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 2S = 6$$

και το αντίστοιχο γινόμενο:

$$P' = 2x_1 \cdot 2x_2 = 4x_1 \cdot x_2 = 4P = -8.$$

Επομένως, η ζητούμενη εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού, θα είναι η:

$$x^2 - S'x + P' = 0$$

δηλαδή η:

$$x^2 - 6x - 8 = 0$$

Θέματα $4^{ης}$ Ομάδας

GI_A_ALG_4_13078

Δίνεται η εξίσωση $(8-\lambda)x^2-2(\lambda-2)x+1=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η εξίσωση να είναι 1ου βαθμού. (Μονάδες 5)

β) Αν η εξίσωση είναι $2^{ου}$ βαθμού, να βρείτε τις τιμές του λ ώστε αυτή να έχει μια διπλή ρίζα. Για τις τιμές του λ που βρήκατε, να προσδιορίσετε τη διπλή ρίζα της εξίσωσης. (Μονάδες 10)

γ) Για τις τιμές του λ που βρήκατε στο ερώτημα (β), να δείξετε ότι το τριώνυμο

$$(8-\lambda)x^2-2(\lambda-2)x+1$$

είναι μη αρνητικό, για κάθε πραγματικό αριθμό x. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ:

α) Για να είναι η εξίσωση $1^{ου}$ βαθμού πρέπει $8-\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=8$

β) Είναι $\lambda\neq 8$ και $\Delta=0\Leftrightarrow 4(\lambda-2)^2-4(8-\lambda)=0\Leftrightarrow\lambda^2-4\lambda+4-8+\lambda=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\lambda^2-3\lambda-4=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda=4 \ \vee\ \lambda=-1$$

- Για $\lambda=4$ η εξίσωση γράφεται: $4x^2-4x+1=0\Leftrightarrow(2x-1)^2=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$
- Για $\lambda=-1$ η εξίσωση γράφεται: $9x^2+6x+1=0\Leftrightarrow(3x+1)^2=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{3}$

γ) Όπως είδαμε στο β) ερώτημα, για τις τιμές $\lambda=4,\ \lambda=-1$ το τριώνυμο γράφεται αντίστοιχα:

$$(2x-1)^2\geq 0 \text{ και } (3x+1)^2\geq 0,\text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

GI_A_ALG_4_13082

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2-(\alpha+1)x+4+\alpha, \quad x\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=(\alpha-1)^2-16$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 10)

γ) Αν το τριώνυμο έχει ρίζες x_1, x_2, τότε:

i) Να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ συναρτήσει του a και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P=x_1x_2$ των ριζών του. (Μονάδες 2)

ii) Να αποδείξετε ότι: $d(x_1,1)\cdot d(x_2,1)=4$ (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ:

α) $\Delta=(\alpha+1)^2-4(4+\alpha)=\alpha^2+2\alpha+1-16-4\alpha=(\alpha^2-2\alpha+1)-16 \Leftrightarrow \Delta=(\alpha-1)^2-16$

β) Πρέπει $(\alpha-1)^2-16>0 \Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha-15>0$, που αληθεύει όταν το α βρίσκεται στον άξονα των αριθμών εκτός των ριζών του τριωνύμου.
Οι ρίζες του είναι $\alpha=-3, \ \alpha=5$. Άρα: $\alpha\in(-\infty,-3)\cup(5,+\infty)$

ΑΛΛΗ ΛΥΣΗ: $(\alpha-1)^2>16 \Leftrightarrow |\alpha-1|>4 \Leftrightarrow \alpha\in(-\infty,-3)\cup(5,+\infty)$

γ i) Είναι $\begin{cases} S=x_1+x_2=\alpha+1, \\ P=x_1x_2=4+\alpha \end{cases}$

ii) $d(x_1,1)\cdot d(x_2,1)=|x_1-1|\cdot|x_2-1|=|x_1x_2-(x_1+x_2)+1|=$
$=|4+\alpha-(\alpha+1)+1|=4$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Η διατύπωση του (γi) ερωτήματος έπρεπε να είναι: **"Να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ και το γινόμενο $P=x_1x_2$ των ριζών του συναρτήσει του α"**.

Έτσι όπως είναι διατυπωμένο, μπορεί να μπερδέψει του μαθητές και να νομίζουν ότι πρέπει να βρουν **συγκεκριμένη τιμή** στο γινόμενο των ριζών.

GI_A_ALG_4_13084

Δίνεται συνάρτηση $g(x)=\dfrac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+\kappa x+\lambda}$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{-2,1\}$

α) Να βρείτε τις τιμές των κ και λ. (Μονάδες 9)

β) Για $\kappa=1$ και $\lambda=-2$,

i) να απλοποιήσετε τον τύπο της g. (Μονάδες 9)

ii) να δείξετε ότι: $g(\alpha+3)>g(\alpha)$ όταν $\alpha\in(-1,1)\cup(1,2)$. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ:

ΣΧΟΛΙΟ: Οι ασκήσεις **GI_A_ALG_4_13084** και **GI_A_ALG_4_13085** έχουν λάθος στην εκφώνηση. Η γνώση του πεδίου ορισμού τους δεν μπορεί να προσδιορίσει τις τιμές των κ, λ. Χρειάζεται η συμπλήρωση της εκφώνησης με τη φράση:

Δίνεται συνάρτηση $g(x)=\dfrac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+\kappa x+\lambda}$, η οποία έχει ως **ευρύτερο δυνατό** πεδίο ορισμού το $R-\{-2,1\}$.

Δίχως αυτόν τον περιορισμό, για οποιαδήποτε συνάρτηση $G(x)=\dfrac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+\kappa x+\lambda}$ με πεδίο ορισμού που περιέχει το $\mathbb{R}-\{-2,1\}$, μπορεί να οριστεί μια συνάρτηση

$g(x)=\dfrac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+\kappa x+\lambda}$, περιορισμός της G(x) στο $\mathbb{R}-\{-2,1\}$

Οπότε,

α) Αν είναι $\kappa^2-4\lambda<0$ ο παρονομαστής είναι διάφορος του μηδενός για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε μια συνάρτηση $g(x)=\dfrac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+\kappa x+\lambda}$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{-2,1\}$.

Αν $\kappa^2-4\lambda=0$, το $x^2+\kappa x+\dfrac{\kappa^2}{4}=\left(x+\dfrac{\kappa}{2}\right)^2$ έχει ρίζα $x=-\dfrac{\kappa}{2}$, οπότε αρκεί $\kappa\neq 4,\ \lambda\neq 4$ και $\kappa\neq -2,\ \lambda\neq 1$.

Αν $\kappa^2-4\lambda>0$, για να έχει πεδίο ορισμού το $R-\{-2,1\}$ πρέπει να είναι μηδέν ο παρονομαστής του μόνο όταν είναι $x=-2,\ x=1$.

Είναι $\begin{cases}(-2)^2+\kappa\cdot(-2)+\lambda=0\\ 1^2+\kappa\cdot 1+\lambda=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\kappa-\lambda=4\\ \kappa+\lambda=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\kappa=1\\ \lambda=-2\end{cases}$

Τότε ο παρονομαστής του κλάσματος γράφεται $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$ που έχει μοναδικές ρίζες τα $x=-2,\ x=1$, οπότε το πεδίο ορισμού της g(x) είναι το $x\in\mathbb{R}-\{-2,1\}$

βi) Για $\kappa=1$ και $\lambda=-2$

$$g(x)=\frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+2)}=(x+1)(x-2),\ \text{με } x\in\mathbb{R}-\{-2,1\}$$

ii) Είναι $g(x)=(x+1)(x-2)=x^2-x-2$ με ρίζες το -1 και 2 .

Για το τριώνυμο x^2-x-2 έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμων

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως το πρόσημο της συνάρτησης g στο πεδίο ορισμού της είναι:

x	$-\infty$		-2		-1		α		1		2		$\alpha+3$		$+\infty$
$g(x)$		$+$	‖	$+$	0		$-$		‖		$-$		0	$+$	

Άρα όταν $\alpha\in(-1,1)\cup(1,2)$, δηλαδή $-1<\alpha<2$ τότε $2<\alpha+3$.

Έτσι όπως φαίνεται στον παραπάνω πίνακα είναι $g(\alpha+3)>0$ και $g(\alpha)<0$ δηλαδή $g(\alpha+3)>g(\alpha)$.

ΣΧΟΛΙΟ: Υπάρχει κακή διατύπωση στην εκφώνηση στο (βii). Αν ζητούν τη συνεπαγωγή $\alpha\in(-1,1)\cup(1,2)\Rightarrow g(\alpha+3)>g(\alpha)$, η εκφώνηση πρέπει να γραφτεί

"**αν** $\alpha\in(-1,1)\cup(1,2)$ **τότε** να δείξετε ότι $g(\alpha+3)>g(\alpha)$"

Ειδάλως, το Σύνολο Αλήθειας της ανισότητας είναι το $(-1,1)\cup(1,+\infty)$, που περιέχει το $(-1,1)\cup(1,2)$

ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ ΣΥΝΟΛΟΥ ΑΛΗΘΕΙΑΣ της ΑΝΙΣΟΤΗΤΑΣ $g(\alpha)\cdot g(\beta)>0$

Τα $\alpha,\ \alpha+3$ ανήκουν στο πεδίο ορισμού της g(x),

άρα πρέπει να είναι $\begin{cases}\alpha\neq 1\\ \alpha\neq -2\end{cases},\ \begin{cases}\alpha+3\neq 1\\ \alpha+3\neq -2\end{cases}$ δηλαδή $\begin{cases}\alpha\neq 1\\ \alpha\neq -2\\ \alpha\neq -5\end{cases}$

Για αυτά τα α, έχουμε

$$g(\alpha+3)>g(\alpha)\Leftrightarrow(\alpha+3+1)(\alpha+3-2)>(\alpha+1)(\alpha-2)$$

$$\Leftrightarrow\alpha^2+5\alpha+4>\alpha^2-\alpha-2\Leftrightarrow 6\alpha+6>0\Leftrightarrow\alpha>-1,$$

οπότε με βάση τους περιορισμούς είναι $\alpha\in(-1,1)\cup(1,+\infty)$

GI_A_ALG_4_13085

Δίνεται συνάρτηση $g(x)=\dfrac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+\kappa x+\lambda}$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{-2,1\}$

α) Να βρείτε τις τιμές των κ και λ. (Μονάδες 9)

β) Για $\kappa=1$ και $\lambda=-2$,

i) να απλοποιήσετε τον τύπο της g. (Μονάδες 9)

ii) να δείξετε ότι: $g(\alpha)\cdot g(\beta)>0$ όταν $\alpha,\beta\in(-1,1)\cup(1,2)$. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ:

ΣΧΟΛΙΟ: Για το ερώτημα (α) ισχύει ότι γράψαμε στην προηγούμενη άσκηση **GI_A_ALG_4_13084**

βi) Για $\kappa=1$ και $\lambda=-2$,

Τότε $g(x)=\dfrac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+2)}=(x+1)(x-2)$, με $x\in\mathbb{R}-\{-2,1\}$

ii) Θα δείξουμε ότι αν $\alpha,\beta\in(-1,1)\cup(1,2)$, τότε $g(\alpha)\cdot g(\beta)>0$.

Πράγματι, είναι $-1<\alpha\Leftrightarrow\alpha+1>0,\quad \alpha<2\Leftrightarrow\alpha-2<0$

και $-1<\beta\Leftrightarrow\beta+1>0,\quad \beta<2\Leftrightarrow\beta-2<0$, οπότε

$$g(\alpha)\cdot g(\beta)=(\alpha+1)(\alpha-2)(\beta+1)(\beta-2)>0$$

ΣΧΟΛΙΟ: Όπως και στην **4_13804** πιστεύουμε ότι υπάρχει κακή διατύπωση στην εκφώνηση στο (βii). Αν ήθελαν οι θεματοδότες να ζητήσουν τη συνεπαγωγή

$$\alpha,\beta\in(-1,1)\cup(1,2)\Rightarrow g(\alpha)\cdot g(\beta)>0,$$

θα έπρεπε να το διατυπώσουν σαφέστερα με τη διατύπωση:

ii) **αν** $\alpha,\beta\in(-1,1)\cup(1,2)$, **τότε** να δείξετε ότι: $g(\alpha)\cdot g(\beta)>0$. (Μονάδες 7)

Σε μια συνεπαγωγή συνηθίζουμε να γράφουμε πρώτα την υπόθεση και κατόπιν την απόδειξη. Έτσι όπως διατυπώνεται οδηγεί τους μαθητές στην αναζήτηση όλων των τιμών των α,β για τις οποίες ισχύει η ανισότητα, κάτι που είναι αρκετά δύσκολο για μαθητές Α΄ Λυκείου.

ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ ΣΥΝΟΛΟΥ ΑΛΗΘΕΙΑΣ της ΑΝΙΣΟΤΗΤΑΣ $g(\alpha)\cdot g(\beta)>0$

Τα α, β ανήκουν στο πεδίο ορισμού της g(x) άρα πρέπει να είναι $\begin{cases}\alpha,\beta\neq 1\\ \alpha,\beta\neq -2\end{cases}$

Για αυτά τα α, β, έχουμε

$$g(\alpha)\cdot g(\beta) > 0 \Leftrightarrow (\alpha+1)(\alpha-2)(\beta+1)(\beta-2) > 0$$

Η ανισότητα αυτή ισχύει όταν είναι

$\alpha, \beta \in (-\infty, -2)\cup(-2,-1)$ ή $\alpha, \beta \in (-1,1)\cup(1,2)$ ή $\alpha, \beta \in (2,+\infty)$

ή $\begin{cases}\alpha \in (-\infty,-2)\cup(-2,-1)\\ \beta \in (2,+\infty)\end{cases}$ ή $\begin{cases}\beta \in (-\infty,-2)\cup(-2,-1)\\ \alpha \in (2,+\infty)\end{cases}$

GI_A_ALG_4_13086

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$. (Μονάδες 9)

β) Για ποιες τιμές του λ το παραπάνω τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε $\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda \le 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ:

α) $\Delta=(\lambda^2+1)^2-4\lambda^2=\left(\lambda^2+1-2\lambda\right)\left(\lambda^2+1+2\lambda\right) \Leftrightarrow \Delta=(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2 \ge 0$.

Άρα το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in R-\{0\}$.

β) Για να έχει το τριώνυμο ίσες ρίζες θα πρέπει

$$\Delta=0 \Leftrightarrow \lambda-1=0 \vee \lambda+1=0 \Leftrightarrow \lambda=1 \vee \lambda=-1$$

γ) Πρέπει $\lambda<0$ και $\Delta \le 0$. Αλλά είναι $\Delta \ge 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$.

Οπότε $\lambda<0$ και $\Delta=0$, δηλαδή $\lambda=-1$.

GI_A_ALG_4_13088

Εξαιτίας ενός ατυχήματος σε διυλιστήριο πετρελαίου, διαρρέει στην θάλασσα πετρέλαιο που στο τέλος της $1^{ης}$ ημέρας καλύπτει 3 τετραγωνικά μίλια (τ.μ), στο τέλος της $2^{ης}$ ημέρας καλύπτει 6 τ.μ, στο τέλος της $3^{ης}$ ημέρας καλύπτει 12 τ.μ. και γενικά εξαπλώνεται έτσι, ώστε στο τέλος κάθε ημέρας να καλύπτει επιφάνεια διπλάσια από αυτήν που κάλυπτε την προηγούμενη.

α) Να βρείτε την επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος της $5^{ης}$ ημέρας μετά το ατύχημα. (Μονάδες 7)

β) Πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο θα καλύπτει 768 τ.μ.; (Μονάδες 9)

γ) Στο τέλος της $9^{ης}$ ημέρας επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός και αυτομάτως σταματάει η εξάπλωση του πετρελαίου. Στο τέλος της επόμενης ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο έχει μειωθεί κατά 6 τ.μ. και συνεχίζει να μειώνεται κατά 6 τ.μ. την ημέρα. Να βρείτε πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ:

α) Η εξάπλωση του πετρελαίου στην επιφάνεια της θάλασσας ανά ημέρα, αυξάνεται με γεωμετρική πρόοδο $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$, όπου ο πρώτος όρος είναι $\alpha_1 = 3$ και ο λόγος $\lambda = 2$.

Στο τέλος της $5^{ης}$ ημέρας θα καλύπτει επιφάνεια ίση με $\alpha_5 = 3 \cdot 2^4 = 48$ τ. μ.

β) Αναζητούμε το ν ώστε $\alpha_\nu = 768$.

$$768 = 3\lambda^{\nu-1} \Leftrightarrow \lambda^{\nu-1} = 256 = 2^8 \Leftrightarrow \nu = 9.$$

Άρα, 9 ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο θα καλύπτει 768 τ.μ.

γ) Το πετρέλαιο στην επιφάνεια της θάλασσας μειώνεται με αριθμητική πρόοδο $\beta_\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$, όπου ο πρώτος όρος, την επόμενη μέρα της επέμβασης, είναι $\beta_1 = 768 - 6 = 762$, η διαφορά της προόδου $\omega = -6$ και ο νιοστός όρος $\beta_\nu = 12$. Έχουμε λοιπόν:

$$12 = 762 - 6(\nu - 1) \Leftrightarrow \nu - 1 = \frac{762 - 12}{6} \Leftrightarrow \nu = 126$$

Άρα σε 126 ημέρες από τη στιγμή που επενέβη ο κρατικός μηχανισμός, δηλαδή σε 135 ημέρες από τη στιγμή του ατυχήματος, η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ.

GI_A_ALG_4_13090

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+3x+2$ και $g(x)=x+1, x\in\mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο στη συνέχεια να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

β) Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=x+\alpha$. Να δείξετε ότι:

i) αν $\alpha>1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,h έχουν δύο κοινά σημεία.

ii) αν $\alpha<1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,h δεν έχουν κοινά σημεία. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ:

α) $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2+3x+2=x+1\Leftrightarrow x^2+2x+1=0\Leftrightarrow (x+1)^2=0\Leftrightarrow x=-1$,
απ' όπου προκύπτει $f(-1)=g(-1)=0$. Άρα οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $A(-1,0)$.

β) Από το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$f(x)=h(x)\Leftrightarrow x^2+3x+2=x+\alpha\Leftrightarrow x^2+2x+2-\alpha=0,$$

θα προσδιορίσουμε και το πλήθος των σημείων τομής των γραφικών τους παραστάσεων.
Είναι $\Delta=4-8+4\alpha \quad\Leftrightarrow\quad \Delta=4(\alpha-1)$

i) Αν $\alpha>1$, τότε $\Delta>0$, οπότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,h έχουν δύο κοινά σημεία.

ii) Αν $\alpha<1$, τότε $\Delta<0$, οπότε η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες. Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,h δεν έχουν κοινά σημεία.

GI_A_ALG_4_13092

Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες 51200 βακτήρια, και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μια ώρα.

α) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες; (Μονάδες 6)

β) Τη χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 3200, ο οργανισμός παρουσίασε ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες. Συμβολίζουμε με βν το πλήθος των βακτηρίων ν ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης ($\nu \leq 5$).

i) Να δείξετε ότι η ακολουθία (βν) είναι γεωμετρική πρόοδος, και να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της.

ii) Να εκφράσετε το πλήθος βν των βακτηρίων συναρτήσει του ν. (Μονάδες 12)

iii) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης; (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ:

α) Αφού «γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μια ώρα» (δηλαδή ο αριθμός τους γίνεται $102400,\ 51200,\ 25600,....$) σύμφωνα με τον ορισμό της γεωμετρικής προόδου, τα πλήθη των βακτηρίων μετά από ν ώρες αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$ με λόγο $\lambda = \frac{1}{2}$ και πρώτο όρο $\alpha_1 = 102400$.

Ο γενικός τύπος θα είναι $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} \Leftrightarrow \alpha_\nu = 102400\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}$

Επομένως, μετά από 6 ώρες, (για $\nu = 6$), θα υπάρχουν:

$$\alpha_6 = 102400\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 102400 \cdot \frac{1}{32} = 3200 \text{ βακτήρια.}$$

β) Σύμφωνα με την εξέλιξη του φαινομένου, μετά την έκτη ώρα ο αριθμός των βακτηρίων τριπλασιάζεται ύστερα από κάθε μια ώρα (δηλαδή γίνεται : $9600,\ 28800,\ 86400,...$)

Επομένως τα πλήθη των βακτηρίων ν ώρες μετά από την επιδείνωση αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου $\beta_\nu, \nu \in \mathbb{N}^*, \nu \leq 5$ με λόγο $\lambda = 3$ και πρώτο όρο $\beta_1 = 9600$.

Ο γενικός τύπος είναι $\beta_\nu = \beta_1\lambda^{\nu-1} \Leftrightarrow \beta_\nu = 9600 \cdot 3^{\nu-1}$.

Το πλήθος των βακτηρίων που θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης θα δίνονται από τον γενικό τύπο για $\nu = 3$.

Επομένως $\beta_3 = 9600 \cdot 3^2 = 9600 \cdot 9 = 86400$ βακτήρια.

GI_A_ALG_4_13093

Ο ιδιοκτήτης ενός ταξιδιωτικού γραφείου εκτιμά ότι, όταν για μια συγκεκριμένη διαδρομή διαθέτει τα εισιτήρια στην κανονική τιμή των 21 € ανά εισιτήριο, τότε πουλά κατά μέσο όρο 30 μόνο εισιτήρια, ενώ το λεωφορείο έχει 51 θέσεις.

Θέλοντας να αυξήσει τη πελατεία του, κάνει την ακόλουθη προσφορά: Ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει 3€ και κάθε επόμενος επιβάτης θα πληρώνει $0,5$€ περισσότερο από τον προηγούμενο.

α) Να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος επιβάτης. (Μονάδες 4)

β) Αν, για κάθε $\nu \le 51$ ο αριθμός α_ν εκφράζει το ποσό που θα πληρώσει ο ν-οστός επιβάτης, να δείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha_1, \ \alpha_2, \dots, \alpha_{51}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τη διαφορά ω αυτής της προόδου. (Μονάδες 6)

γ) Αν το λεωφορείο γεμίσει, να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο 51ος επιβάτης. (Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε πόσα τουλάχιστον εισιτήρια θα πρέπει να πουληθούν ώστε η είσπραξη του γραφείου με αυτή την προσφορά να ξεπερνά την είσπραξη που θα έκανε αν πουλούσε 30 εισιτήρια στην τιμή των 21 € ανά εισιτήριο. (Δίνεται ότι: $\sqrt{10201}=101$) (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ:

α) Ο δεύτερος ο τρίτος και ο τέταρτος επιβάτης θα πληρώσουν αντίστοιχα, $3,5$€, 4€, $4,5$ €

β) Οι αριθμοί $\alpha_1, \ \alpha_2, \dots, \alpha_{51}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου γιατί ο καθένας (μετά τον α_1) προκύπτει από τον προηγούμενο με πρόσθεση του ίδιου αριθμού $\omega = 0,5$, που είναι και η διαφορά της προόδου.

γ) Ο 51ος επιβάτης θα πληρώσει $\alpha_{51} = \alpha_1 + 50\omega = 3 + 25 = 28$€

δ) Για να συμβεί αυτό θα πρέπει: $S_\nu > 30 \cdot 21$, όπου S_ν το άθροισμα των ν πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου.

$$\frac{[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega]\nu}{2} > 630 \Leftrightarrow 6\nu + \frac{1}{2}\nu^2 - \frac{1}{2}\nu > 1260 \Leftrightarrow \ \nu^2 + 11\nu - 2520 > 0 \Leftrightarrow \nu > 45$$

Θα πρέπει λοιπόν να πουληθούν τουλάχιστον 46 εισιτήρια.

GI_A_ALG_4_13102

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι αν $\lambda = 5$ η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα. (Μονάδες 5)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει και άλλη τιμή του λ, ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες άνισες. (Μονάδες 10)

δ) Αν $\left|\lambda^2 - 4\lambda - 5\right| = 4\lambda - \lambda^2 + 5,\ \lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 5\}$, να δείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει ρίζες. (Μονάδες 5)

α) Για $\lambda = 5$ η εξίσωση γίνεται $x^2 - 10x + 25 = 0$ με $\Delta = 0$, οπότε η εξίσωση έχει διπλή ρίζα.

β) Για να εξετάσουμε αν υπάρχει άλλη τιμή του λ ώστε να έχει η εξίσωση διπλή ρίζα αρκεί να βρούμε αν υπάρχει άλλη τιμή του λ ώστε $\Delta = 0$.

Είναι $\Delta = (-2\lambda)^2 - 4(4\lambda + 5) = 4\lambda^2 - 16\lambda - 20$.

Οπότε $\Delta = 0 \Leftrightarrow \lambda = 5$ ή $\lambda = -1$.

γ) Για να έχει η δευτεροβάθμια εξίσωση δύο ρίζες άνισες πρέπει και αρκεί

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 16\lambda - 20 > 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$$

δ) Από την δοθείσα σχέση έχουμε ότι $\lambda^2 - 4\lambda - 5 < 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-1, 5)$ για τις τιμές τις οποίες η διακρίνουσα της αρχικής εξίσωσης είναι αρνητική και επομένως δεν έχει πραγματικές ρίζες.

GI_A_ALG_4_13107

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$. (Μονάδες 9)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda\neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P=x_1x_2$ των ριζών. (Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda>0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

δ) Αν $0<\lambda\neq 1$ και x_1, x_2, με $x_1<x_2$, είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $f(0)\cdot f(\kappa)\cdot f(\mu)$, όπου κ, μ είναι αριθμοί τέτοιοι ώστε $x_1<\kappa<x_2<\mu$. (Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ:

α) $\Delta=(\lambda^2+1)^2-4\lambda^2=\lambda^4-2\lambda^2+1=(\lambda^2-1)^2\geq 0$. Άρα το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

β) $S=x_1+x_2=\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda}$, $\quad P=x_1x_2=\dfrac{\lambda}{\lambda}\Leftrightarrow P=1$

γ) Οι ρίζες είναι θετικές γιατί έχουν άθροισμα και γινόμενο θετικό.

δ) Για $0<\lambda\neq 1$, το τριώνυμο γράφεται: $f(x)=\lambda(x-x_1)(x-x_2)$

$$f(0)\cdot f(\kappa)\cdot f(\mu)=\lambda^3(\kappa-x_1)(\kappa-x_2)(\mu-x_1)(\mu-x_2)$$

Από την υπόθεση όμως έχουμε: $\lambda>0,\quad \kappa-x_1>0,\quad \kappa-x_2<0,\quad \mu-x_1>0,\quad \mu-x_2>0$.

Άρα, $f(0)\cdot f(\kappa)\cdot f(\mu)<0$

GI_A_ALG_4_13155

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=4x+2$ και $g(x)=x^2-9$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα x΄x . (Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία (3, 0) και (-3, 0). (Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω σε κάποιον από τους άξονες. (Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε συνάρτηση h της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία, διέρχεται από το A(0, 3) και τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημείο του ημιάξονα Ox. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ:

α) Η γραφική παράσταση της g(x) τέμνει τον άξονα x΄x σε σημεία των οποίων η τετμημένη επαληθεύει την εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow x^2-9=0 \Leftrightarrow x=3 \vee x=-3$, δηλαδή στα σημεία $B(-3,0),\ \Gamma(3,0)$

β) Είναι $f(x)=0 \Leftrightarrow 4x+2=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$, οπότε η γραφική παράσταση της f(x) δεν τέμνει τον άξονα x΄x στα B, Γ.

γ) Όπως είπαμε παραπάνω οι γραφικές παραστάσεις f(x) και g(x) δεν τέμνονται στον άξονα x΄x. Επίσης είναι $f(0)=2$ και $g(0)=-9$ άρα ούτε στον άξονα y΄y τέμνονται.

δ) Η γραφική παράσταση της g τέμνει τον ημιάξονα Ox στο σημείο $\Gamma(3,0)$.

Οπότε η συνάρτηση h(x) έχει γραφική παράσταση που είναι πλάγια ευθεία της μορφής $y=\alpha x+\beta$ και διέρχεται από τα σημεία $A(0,3), \Gamma(3,0)$.

Άρα είναι $\begin{cases} 3=0\cdot\alpha+\beta \\ 0=3\cdot\alpha+3 \end{cases}$ οπότε $\alpha=-1,\ \beta=3$, άρα $h(x)=-x+3$

GI_A_ALG_4_13156

Δίνεται μια αριθμητική πρόοδος (α_ν), όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Αν οι τρεις πρώτοι όροι της προόδου είναι:

$$\alpha_1 = x,\ \alpha_2 = 2x^2 - 3x - 4,\ \alpha_3 = x^2 - 2,\ \text{όπου } x \in \mathbb{Z}$$

τότε,

α) να αποδειχθεί ότι $x = 3$. (Μονάδες 10)

β) να βρεθεί ο ν-οστός όρος της προόδου και να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 2014. (Μονάδες 8)

γ) να υπολογιστεί το άθροισμα $S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + ... + \alpha_{15}$. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ:

α) Αφού η (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος, τότε

$\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_3 - \alpha_2 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 4 = -x^2 + 3x + 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 7x - 6 = 0$, όπου $x \in \mathbb{Z}$

Η εξίσωση έχει ρίζες $x_{1,2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{121}}{6} = \dfrac{7 \pm 11}{6} \Rightarrow x_1 = 3,\ x_2 = -\dfrac{2}{3}$,

άρα η ακέραιη ρίζα είναι $x = 3$

β) Τότε $\alpha_1 = 3,\ \ \alpha_2 = 2\cdot 3^2 - 3\cdot 3 - 4 = 5$ άρα $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 = 2$,

οπότε $\alpha_\nu = 3 + (\nu - 1)\cdot 2 = 2\nu + 1$

Η εξίσωση $\alpha_\nu = 2014$ γράφεται $2\nu + 1 = 2014 \Leftrightarrow \nu = \dfrac{2013}{2} \notin N$, άρα είναι αδύνατη.

γ) Σχηματίζουμε την ακολουθία $\alpha_1,\ \alpha_3, \alpha_5, ...$ που είναι επίσης αριθμητική πρόοδος με πρώτο όρο $\beta_1 = 3$ και διαφορά $\omega' = 4$, άρα $\beta_\nu = 3 + 4(\nu - 1) \Leftrightarrow \beta_\nu = 4\nu - 1$

Τότε $\alpha_{15} = 31$, άρα $\beta_\nu = 31 \Leftrightarrow 4\nu - 1 = 31 \Leftrightarrow \nu = 8$. Οπότε $S = \dfrac{\beta_1 + \beta_8}{2}\cdot 8 = \dfrac{3+31}{2}\cdot 8 = 136$

ΣΧΟΛΙΟ: Γενικότερα, μπορούμε να αποδείξουμε ότι ισχύει: $\beta_\nu = \alpha_{2\nu-1}$

αφού είναι $\beta_\nu = 4\nu - 1 = 2(2\nu - 1) + 1 = \alpha_{2\nu-1}$

GI_A_ALG_ 4_13158

Δυο φίλοι αποφάσισαν να κάνουν το χόμπι τους δουλειά. Τους άρεσε να ζωγραφίζουν μπλουζάκια και έστησαν μια μικρή επιχείρηση για να τα πουλήσουν μέσω διαδικτύου.

Σε διάστημα ενός μηνός τα έξοδα κατασκευής (σε ευρώ) για x μπλουζάκια δίνονται από τη συνάρτηση $K(x)=12,5x+120$ και τα έσοδα από την πώλησή τους (σε ευρώ), από τη συνάρτηση $E(x)=15,5x$.

α) Αν η επιχείρηση κάποιο μήνα δεν κατασκευάσει μπλουζάκια, έχει έξοδα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

β) Τι εκφράζει ο αριθμός $12,5$ και τι ο αριθμός $15,5$ στο πλαίσιο του προβλήματος; (Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε πόσα μπλουζάκια πρέπει να πουλήσουν ώστε να έχουν έσοδα όσα και έξοδα (δηλαδή να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση) (Μονάδες 6)

δ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια θα έχουν κέρδος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ:

α) Αν η επιχείρηση κάποιο μήνα δεν κατασκευάσει μπλουζάκια, τότε από την συνάρτηση των εξόδων κατασκευής, για $x=0$ μας παίρνουμε $K(0)=12,5\cdot 0+120=120$ ευρώ.

Δηλαδή η επιχείρηση έχει πάγια έξοδα (ανεξάρτητα από το ύψος της παραγωγής) 120 ευρώ το μήνα.

β) Ο συντελεστής $12,5$ στην συνάρτηση των εξόδων κατασκευής, εκφράζει την αύξηση των εξόδων για κάθε ένα μπλουζάκι που κατασκευάζεται, (το κόστος που έχει το κάθε μπλουζάκι). Π.χ. για $x=0$, $K(0)=120$, για $x=1$, $K(1)=132,5$, για $x=2$, $K(2)=145$ κλπ.

Όμοια ο συντελεστής $15,5$ στην συνάρτηση των εσόδων εκφράζει την τιμή πώλησης για το κάθε μπλουζάκι που πουλιέται. Π.χ. $x=0$, $K(0)=0$, για $x=1$, $K(1)=15,5$, για $x=2$, $K(2)=31$ κλπ.

γ) Θα πρέπει $K(x)=E(x)\Leftrightarrow 15,5x=12,5x+120\Leftrightarrow 15,5x-12,5x=120$

$$\Leftrightarrow 3x=120\Leftrightarrow x=40$$

Επομένως για να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση πρέπει να πουλήσουν 40 μπλουζάκια.

δ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια, τότε θα έχουν έσοδα $E(60)=15,5\cdot 60=930$

και έξοδα $K(60)=12,5\cdot 60+120=870$, επομένως θα έχουν κέρδος : $930-870=60$ ευρώ.

ΑΛΛΗ ΛΥΣΗ:

Η συνάρτηση του κέρδους είναι

$$P(x)=E(x)-K(x)=15,5\cdot x-(12,5\cdot x+120)=3\cdot x-120 \text{ με } x\geq 0$$

Για $x=60$ θα είναι $P(60)=3\cdot 60-120=180-120=60$. Αφού είναι $P(60)=60>0$ θα έχουν κέρδος 60 ευρώ .

GI_A_ALG_ 4_19364

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2-(\alpha+1)x+4+\alpha, \alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$$\Delta=(\alpha-1)^2-16$$

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 10)

γ) Αν το τριώνυμο έχει ρίζες x_1, x_2, τότε:

i. Να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ και το γινόμενο $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών του συναρτήσει του α.

(Μονάδες 2)

ii. Να αποδείξετε ότι: $d(x_1,1)\cdot d(x_2,1)=4$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ:

α) Από τον τύπο της διακρίνουσας έχουμε:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\left(-(\alpha+1)\right)^2-4\cdot1\cdot(4+\alpha)=(\alpha+1)^2-16-4\alpha=$$
$$=\alpha^2+2\alpha+1-16-4\alpha=\alpha^2-2\alpha+1-16=(\alpha-1)^2-16$$

β) Το τριώνυμό μας έχει πραγματικές ρίζες και άνισες μεταξύ τους όταν $\Delta>0$.

Άρα έχουμε:

α΄ τρόπος

$$(\alpha-1)^2-16>0\Leftrightarrow(\alpha-1)^2>16\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\alpha-1>\sqrt{16}\\ \text{ή}\\ \alpha-1<-\sqrt{16}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\alpha-1>4\\ \text{ή}\\ \alpha-1<-4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\alpha>5\\ \text{ή}\\ \alpha<-3\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\alpha\in(-\infty,-3)\cup(5,+\infty)$$

Οπότε όταν $\alpha\in(-\infty,-3)\cup(5,+\infty)$ το τριώνυμό μας έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

β΄ τρόπος

$$(\alpha-1)^2-16>0\Leftrightarrow\alpha^2-2\alpha+1-16>0\Leftrightarrow\alpha^2-2\alpha-15>0\Leftrightarrow$$
$$\Delta=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-15)=4+60=64$$

Οπότε οι ρίζες είναι:

$$\alpha_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{64}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm 8}{2}=\begin{cases}\alpha_1=\dfrac{2+8}{2}=\dfrac{10}{2}=5\\ \alpha_2=\dfrac{2-8}{2}=\dfrac{-6}{2}=-3\end{cases}$$

Από τον πίνακα προσήμων του τριωνύμου έχουμε:

α	$-\infty$	3	5	$+\infty$
$\alpha^2-2\alpha-15$	$+$	0 $-$	0 $+$	

Άρα: $\begin{cases}\alpha<-3\\ \quad ή\\ \alpha>5\end{cases}\Leftrightarrow \alpha\in(-\infty,-3)\cup(5,+\infty)$, διότι θέλουμε το τριώνυμό μας να είναι θετικό.

Οπότε όταν $\alpha\in(-\infty,-3)\cup(5,+\infty)$ το τριώνυμό μας έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

γi) Από τους τύπου Vieta έχουμε:

$$S=x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{-(\alpha+1)}{1}=\alpha+1$$

και

$$P=x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{4+\alpha}{1}=\alpha+4$$

ii) Από τον τύπο της απόστασής δύο σημείων, αλλά και από τους τύπους Vieta του προηγούμενου ερωτήματος έχουμε:

$$\begin{aligned} d(x_1,1)\cdot d(x_2,1)&=|x_1-1|\cdot|x_2-1|=|(x_1-1)\cdot(x_2-1)|=\\ &=|x_1\cdot x_2-x_1-x_2+1|=|x_1\cdot x_2-(x_1+x_2)+1|=|P-S+1|=\\ &=|\alpha+4-(\alpha+1)+1|=|\alpha+4-\alpha-1+1|=|4|=4\end{aligned}$$

GI_A_ALG_4_20330

Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος y (σε m) στο οποίο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή t (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από τη σχέση: $y = 60t - 5t^2$

α) Μετά από πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος;

(Μονάδες 8)

β) Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί σε ύψος $y = 175\,\text{m}$;

(Μονάδες 8)

γ) Να βρεθεί το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από $100\,\text{m}$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ:

α) Προφανώς είναι $t \ge 0$.

Ακόμα: $y \ge 0 \Leftrightarrow 60t - 5t^2 \ge 0 \Leftrightarrow t(60-5t) \ge 0 \Leftrightarrow 60 - 5t \ge 0$ (αφού $t \ge 0$),

οπότε $60 - 5t \ge 0 \Leftrightarrow t \le 12$, άρα είναι $0 \le t \le 12$

Η σφαίρα είναι στο έδαφος όταν $y = 0$

Οπότε $y = 0 \Leftrightarrow 60t - 5t^2 = 0 \Leftrightarrow t(60-5t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$, (κατά την εκτόξευση)

ή $60 - 5t = 0 \Leftrightarrow t = 12$

Επομένως μετά από $12\,\text{sec}$ θα επανέλθει στο έδαφος

β) $y = 175 \Leftrightarrow 60t - 5t^2 = 175 \Leftrightarrow 5t^2 - 60t + 175 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 12t + 35 = 0 \Leftrightarrow t = 5$ ή $t = 7$,

που είναι δεκτές .

γ) Είναι $y > 100 \Leftrightarrow 60t - 5t^2 > 100 \Leftrightarrow 5t^2 - 60t + 100 < 0 \Leftrightarrow t^2 - 12t + 20 < 0$

Το τριώνυμο έχει $\Delta = 144 - 80 = 64 > 0$ και επομένως έχει δυο λύσεις, τις :

$$t_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{64}}{2} = \begin{cases} t_1 = \dfrac{12+8}{2} = 10 \\ t_2 = \dfrac{12-8}{2} = 2 \end{cases}$$

κι αφού $\alpha = 1 > 0$, το τριώνυμο είναι αρνητικό στο διάστημα ανάμεσα στις ρίζες, δηλαδή όταν $2 < t < 10$

Επομένως η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από $100\,\text{m}$ στο (ανοιχτό) χρονικό διάστημα από 2 έως 10 sec.