mathematica.gr

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

Άλγεβρας

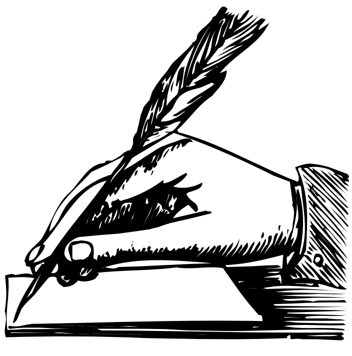
Β΄ τάξης Γενικού Λυκείου

2ο Θέμα

Εκφωνήσεις - Λύσεις

των

θεμάτων



Έκδοση 2η (2/12/2014)

Οι απαντήσεις και οι λύσεις
είναι αποτέλεσμα συλλογικής δουλειάς
των Επιμελητών των φακέλων του Λυκείου
του Δικτυακού Τόπου **mathematica.gr**
με βάση υλικό που αναρτήθηκε στο mathematica
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=147&t=46866

Συνεργάστηκαν οι:

Γιώργος Απόκης, Γιώργος Βισβίκης, Κωνσταντίνος Γεωργίου
Δημήτρης Ιωάννου, Γιώργης Καλαθάκης, Δημήτρης Κατούνης,
Θόδωρος Καραμεσάλης, Γιώργος Λέκκας, Μπάμπης Στεργίου,
Θανάσης Παπασταθόπουλος, Περικλής Παντούλας, Γιώργος Ρίζος,
Γιώργος Ροδόπουλος, Χρήστος Τσιφάκης, Σωτήρης Χασάπης,
Antonis_A, gGa, Grosrouvre, emag57

Θέματα 2ης Ομάδας

Άλγεβρα Γενικής Παιδείας Β΄ Λυκείου

GI_V_ALG_2_16950

α) Να κατασκευάσετε ένα γραμμικό σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους με συντελεστές διάφορους του μηδενός, το οποίο να είναι αδύνατο.

(Μονάδες 10)

β) Να παραστήσετε γραφικά στο επίπεδο τις δυο εξισώσεις του συστήματος που ορίσατε στο (α) ερώτημα και, με βάση το γράφημα, να εξηγήσετε γιατί το σύστημα είναι αδύνατο.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ:

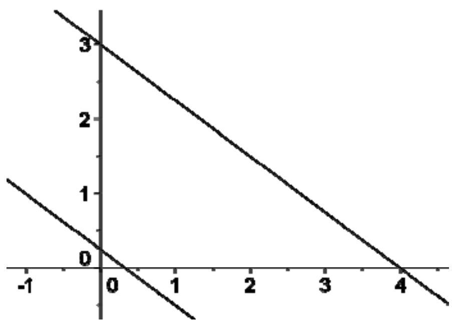
α) Θεωρούμε το σύστημα $\begin{cases} 3x+4y=12 \\ 6x+8y=2 \end{cases}$

Αν πολλαπλασιάσουμε την πρώτη εξίσωση με -2 και την προσθέσουμε στη δεύτερη, προκύπτει το ισοδύναμο σύστημα $\begin{cases} 3x+4y=12 \\ 0x+0y=-22 \end{cases}$

Η δεύτερη εξίσωση είναι αδύνατη άρα το σύστημα είναι πράγματι αδύνατο.

β) Οι εξισώσεις του συστήματος γράφονται αντίστοιχα

$$y=-\frac{3}{4}x+3 \ , \ \ y=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}.$$



Οι ευθείες που ορίζουν οι εξισώσεις του συστήματος έχουν ίδιο συντελεστή διεύθυνσης, οπότε είναι παράλληλες και επομένως το σύστημα είναι αδύνατο.

GI_V_ALG_2_16954

Δίνεται η εξίσωση : $8x+2y=7$ (1)

α) Να γράψετε μια άλλη εξίσωση που να μην έχει καμία κοινή λύση με την (1)

(Μονάδες 10)

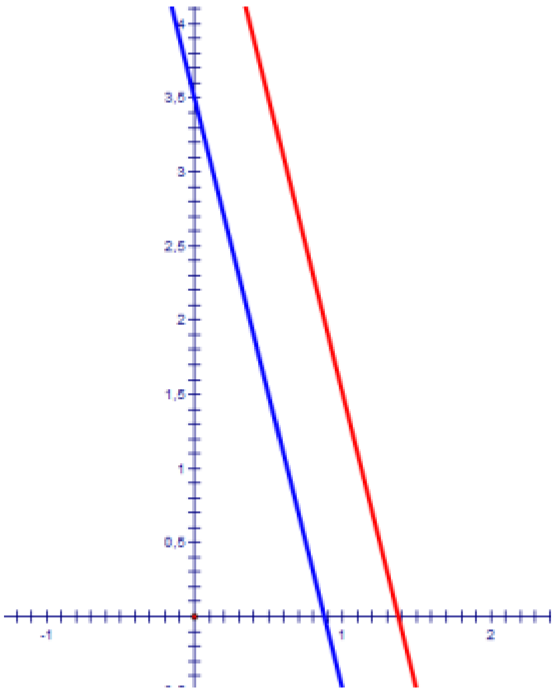
β) Να παραστήσετε γραφικά τις δύο εξισώσεις και, με βάση το γράφημα, να εξηγήσετε γιατί το σύστημα είναι αδύνατο.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ:

α) Πρέπει το σύστημα να είναι αδύνατο. Επιλέγουμε π.χ. $8x+2y=11$

β) Παρατηρούμε ότι οι ευθείες είναι παράλληλες, άρα το σύστημα είναι αδύνατο.



GI_V_ALG_2_16957

Δύο φίλοι, ο Μάρκος και ο Βασίλης, έχουν άθροισμα ηλικιών 27 χρόνια, και ο Μάρκος είναι μεγαλύτερος από το Βασίλη.

α) Μπορείτε να υπολογίσετε την ηλικία του καθενός ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

β) Δίνεται επιπλέον η πληροφορία ότι η διαφορά των ηλικιών τους είναι 5 χρόνια. Να υπολογίσετε την ηλικία του καθενός.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ:

Έστω x η ηλικία του Μάρκου και y η ηλικία του Βασίλη. Από τα δεδομένα, προκύπτει ότι:

$$x+y=27 \quad (1) \quad \text{και} \quad x>y \quad (2)$$

α) Υποθέτουμε ότι οι x, y είναι θετικοί ρητοί αριθμοί.

Από τα παραπάνω, δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την ηλικία του καθενός, διότι η (1) αποτελεί μία γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους, ενώ η (2) δεν εξασφαλίζει τη μοναδικότητα ττης λύσης. Για παράδειγμα, θα μπορούσε (x,y) = (18,9) ή $(x,y)=(17,10)$ κ.ο.κ.

β) Τώρα , ξέρουμε ότι και $x-y=5$ (3) (καθώς και $x>y$)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1),(3), παίρνουμε την εξίσωση $2x=32 \Leftrightarrow x=16$.

Για $x=16$, από την (1) έχουμε: $16+y=27 \Leftrightarrow y=11$

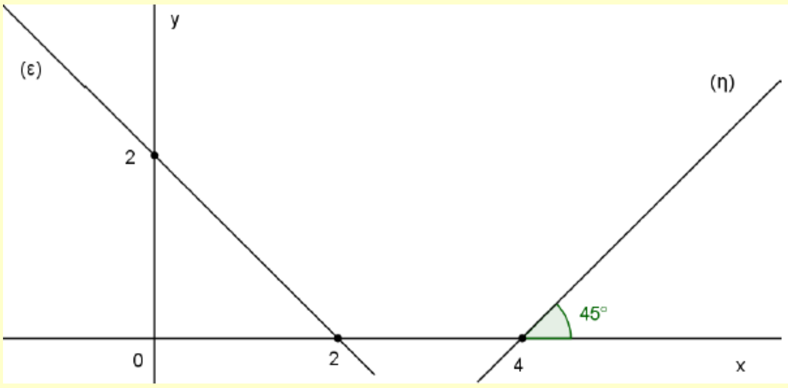
Δηλαδή, ο Μάρκος είναι 16 ετών και ο Βασίλης 11.

Τα αποτελέσματα αυτά, επαληθεύουν όλα τα δεδομένα.

GI_V_ALG_2_16960

α) Με βάση τα δεδομένα του σχήματος, να προσδιορίσετε τις εξισώσεις των ευθειών (ε) , (η) .

(Μονάδες 12)



β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ:

α) Η εξίσωση η οποία παριστάνει μια ευθεία (που δεν είναι κάθετη στον άξονα x'x) είναι της μορφής $y=\lambda x+\beta$, όπου λ ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας αυτής (λ = εφω, όπου ω είναι η γωνία κλίσης της ευθείας με τον άξονα x'x).

Παρατηρώ ότι η ευθεία (ε) με εξίσωση $y=\lambda x+\beta$ τέμνει τους άξονες στα σημεία, Α(0,2) και Β(2,0), οπότε:

για το σημείο Α(0,2) είναι $2=\lambda 0+\beta \Rightarrow \beta=2$

για το σημείο Β(2,0) είναι $0=2\lambda+\beta \Rightarrow 2\lambda=-\beta \Rightarrow \lambda=-1$

Και έτσι η ευθεία (ε) θα έχει εξίσωση: $y=-x+2$

Η ευθεία (η) τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο Γ(4,0) και σχηματίζει γωνία 45° με τον x'x, οπότε $\lambda=\epsilon\phi 45^{\circ}=1$.

Επομένως η εξίσωση της ευθείας (η) γίνεται : $y=x+\beta$ και επειδή το σημείο Γ(4,0) ανήκει στην ευθεία αυτή τότε : $0=4+\beta \Rightarrow \beta=-4$.

Τελικά η ευθεία (η) θα έχει εξίσωση $y=x-4$

Για να βρούμε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών αυτών θα λύσουμε σύστημα: $\begin{cases} y=x-4 \\ y=-x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x-4 \\ -x+2=x-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=3 \end{cases}$.

Άρα το σημείο τομής έχει συντεταγμένες (3, -1).

GI_V_ALG_2_16962

α) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους παρακάτω αριθμούς:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6},\quad \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4},\quad \sigma\upsilon\nu\frac{17\pi}{10}$$ (Μονάδες 12)

β) Αν $\pi < x_1 < x_2 < \frac{3\pi}{2}$, να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x_1\right)$, $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x_2\right)$

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ:

α) Κάνω αναγωγή στο πρώτο τεταρτημόριο για το $\sigma\upsilon\nu\frac{17\pi}{10}$

Χρησιμοποιώντας διαδοχικά γωνίες που διαφέρουν κατά π και στην συνέχεια γωνίες που έχουν άθροισμα π παίρνουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{17\pi}{10}=\sigma\upsilon\nu\left(\pi+\frac{7\pi}{10}\right)=-\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{10}=\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{10}\ \left(\text{Αφού } \frac{7\pi}{10}+\frac{3\pi}{10}=\pi\right)$$

Έτσι οι γωνίες $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{10}$ ανήκουν στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, στο οποίο η συνάρτηση του $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Επομένως: $\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{10}\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}>\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}>\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{10}$

β) Ισχύει ότι $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x_1\right)=\sigma\upsilon\nu x_1$ (Γωνίες συμπληρωματικές)

και $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x_2\right)=\sigma\upsilon\nu x_2$ (Γωνίες συμπληρωματικές)

Ισχύει $\pi<x_1<x_2<\frac{3\pi}{2}$ δηλαδή $x_1,x_2\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$.

Στο διάστημα αυτό η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ είναι γνησίως αύξουσα.

Επομένως: $x_1<x_2\Rightarrow \sigma\upsilon\nu x_1<\sigma\upsilon\nu x_2 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x_1\right)<\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x_2\right)$

Άλλη λύση:

Αφού $\pi<x_1<x_2<\frac{3\pi}{2}\overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow}-\pi>-x_1>-x_2>-\frac{3\pi}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}-\pi>\frac{\pi}{2}-x_1>\frac{\pi}{2}-x_2>\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}>\frac{\pi}{2}-x_1>\frac{\pi}{2}-x_2>-\pi$$

Άρα οι γωνίες $\frac{\pi}{2}-x_1$, $\frac{\pi}{2}-x_2$ ανήκουν στο διάστημα $\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$, που όπως γνωρίζουμε η συνάρτηση $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Επομένως $\frac{\pi}{2}-x_1>\frac{\pi}{2}-x_2 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x_1\right)<\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x_2\right)$.

GI_V_ALG_2_16965

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $x \in R$

α) Να αποδείξετε ότι η f γράφεται στη μορφή $f(x) = (x-2)^2 + 1$.

(Μονάδες 12)

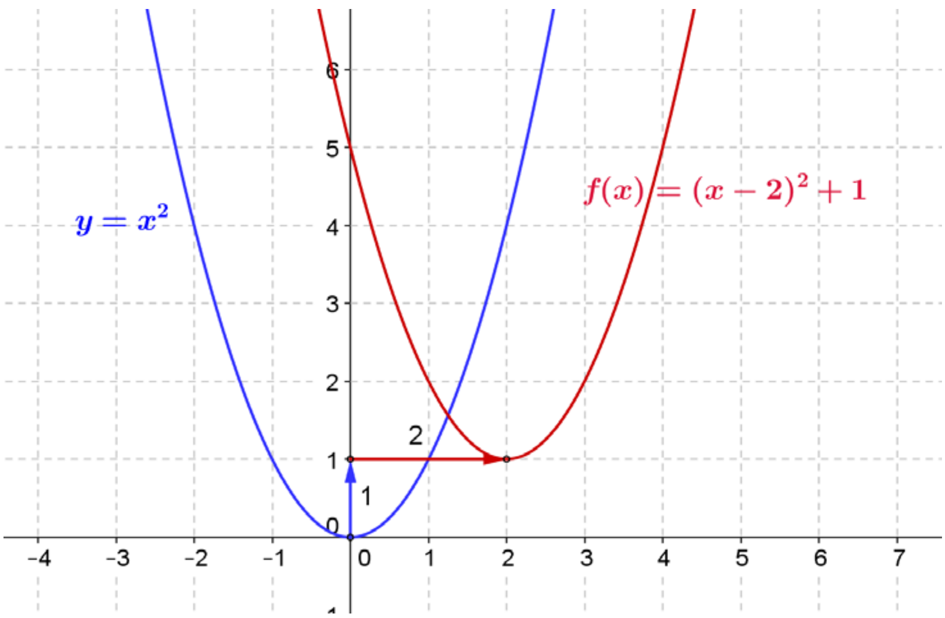
β) Στο σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f , μετατοπίζοντας κατάλληλα την $y = x^2$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ:

α) $f(x) = x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x-2)^2 + 1$

β) Η γραφική παράσταση της f με τη μορφή $f(x) = (x-2)^2 + 1$ είναι μία οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = x^2$ κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και ταυτόχρονα κατακόρυφη μετατόπιση κατά 1 μονάδα προς τα πάνω. Όλα αυτά φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



GI_V_ALG_2_16968

α) Είναι η τιμή $x=\frac{\pi}{4}$ λύση της εξίσωσης $3συν4x+3=0$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=συν4x$ με την ευθεία $y=-1$. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ:

α) Είναι $3συν4\frac{\pi}{4}+3=3(συν\pi+1)=3(-1+1)=0$, άρα η τιμή $x=\frac{\pi}{4}$ είναι λύση της εξίσωσης $3συν4x+3=0$

β) Αναζητούμε τις λύσεις της εξίσωσης $f(x)=y$.

$$συν4x=-1=συν\pi \Leftrightarrow 4x=2k\pi+\pi \Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}, k\in\mathbb{Z}$$

GI_V_ALG_2_17647

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} x-2y=8 & (1) \\ \alpha x+\beta y=\gamma & (2) \end{cases}$ με παραμέτρους $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.

α) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α,β,γ ώστε το σύστημα αυτό να έχει μοναδική λύση το ζεύγος (2, -3).

(Μονάδες 13)

β) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α,β,γ ώστε το σύστημα αυτό να είναι αδύνατο.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ:

α) Αρκεί η ευθεία (2) να διέρχεται από το σημείο (2,-3)). Αρκεί να "επιλέξουμε" μια ευθεία που διέρχεται από αυτό το σημείο, π.χ. την $x=2$, η οποία προκύπτει με $\alpha=1, \beta=0, \gamma=2$

Η (1) επαληθεύεται από το σημείο (2,-3) ,αφού ισχύει : $2-2(-3)=8 \Leftrightarrow 8=8$,οπότε διέρχεται από το δοσμένο σημείο και επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση.

β) Θα επιλέξουμε ευθεία παράλληλη της (1). Επιλέγουμε ($\alpha=1,\beta=-8,\gamma=0$), οπότε το σύστημα είναι αδύνατο.

GI_V_ALG_2_17650

Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκος $x\,cm$, πλάτος $y\,cm$, περίμετρο ίση με $38\,cm$ και με την ακόλουθη ιδιότητα:

Αν αυξήσουμε το μήκος του κατά $2\,cm$ και μειώσουμε το πλάτος του κατά $4\,cm$, θα προκύψει ένα ορθογώνιο με εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του αρχικού.

α) Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές των διαστάσεων x,y του ορθογωνίου.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ:

α) Το δοσμένο ορθογώνιο έχει εμβαδόν xy και περίμετρο $2x+2y=38$.

Αν γίνουν οι αλλαγές στις διαστάσεις του , το εμβαδόν του θα γίνει $(x+2)(y-4)$ και θα είναι ίσο με το αρχικό .

Επομένως έχουμε το σύστημα : $\begin{cases} 2x+2y=38 \\ (x+2)(y-4)=xy \end{cases}$

β) Είναι :

$$\begin{cases} 2x+2y=38 \\ (x+2)(y-4)=xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=19 \\ xy-4x+2y-8=xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=19 \\ -4x+2y=8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=19-x \\ -2x+19-x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=19-x \\ -3x=-15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=14 \\ x=5 \end{cases}$$

Επομένως οι διαστάσεις του είναι $x=5, y=14$

Σχόλιο :

Επειδή, παραδοσιακά, λέμε μήκος τη μεγαλύτερη πλευρά και επειδή εδώ προκύπτει ότι το μήκος είναι μικρότερο από το πλάτος , ας μην παρασυρθούν οι μαθητές από τις λέξεις.

GI_V_ALG_2_17651

Στο δημοτικό parking μιας επαρχιακής πόλης στις 10 το πρωί, το σύνολο των δίκυκλων και τετράτροχων οχημάτων που έχουν παρκάρει είναι 830 και το πλήθος των τροχών τους 2.700.

α) Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τον αριθμό των δίκυκλων καθώς και τον αριθμό των τετράτροχων οχημάτων.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ:

α) Έστω x,y ο αριθμός των δίκυκλων και των τετράτροχων οχημάτων αντίστοιχα.

Η μία εξίσωση του συστήματος είναι $x+y=830 \quad (1)$

Τα δίκυκλα έχουν συνολικά $2x$ τροχούς, ενώ τα τετράτροχα $4y$ τροχούς. Η άλλη εξίσωση λοιπόν του συστήματος είναι $2x+4y=2700$ ή $x+y=1350 \quad (2)$

β) $\begin{cases} x+y=830 \\ x+2y=1350 \end{cases} \overset{(-)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y=830 \\ y=520 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=310 \\ y=520 \end{cases}$

Έχουμε λοιπόν 310 δίκυκλα και 520 τετράτροχα οχήματα.

GI_V_ALG_2_17652

Δίνεται γωνία $ω$ που ικανοποιεί τη σχέση: $(ημω+συνω)^2=1$

α) Να αποδείξετε ότι είτε $ημω=0$ είτε $συνω=0$. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές της γωνίας $ω$. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ:

α) Είναι $(ημω+συνω)^2=1 \Leftrightarrow ημ^2ω+συν^2ω+2ημω\cdot συνω=1$

$$\Leftrightarrow 1+2ημω\cdot συνω=1 \Leftrightarrow 2ημω\cdot συνω=0$$

$$\Leftrightarrow ημω=0 \text{ ή } συνω=0$$

β) • $ημω=0 \Leftrightarrow ω=2κπ$ ή $ω=2κπ+π=(2κ+1)π$ $,κ\in\mathbb{Z}$. Γενικά $ω=κπ$, $κ\in\mathbb{Z}$

• $συνω=0 \Leftrightarrow συνω=συν\frac{π}{2} \Leftrightarrow ω=2κπ\pm\frac{π}{2}$ $,κ\in\mathbb{Z}$. Γενικά $ω=κπ+\frac{π}{2}$, $κ\in\mathbb{Z}$

(Το σύνολο των δυνατών τιμών της γωνίας $ω$ θα μπορούσε να εκφραστεί γενικά από την σχέση $ω=κ\frac{π}{2}$, $κ\in\mathbb{Z}$).

GI_V_ALG_2_17656

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{2}συν2x, x\in\mathbb{R}$

α) Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης; Ποια είναι η περίοδος της f;

(Μονάδες 9)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

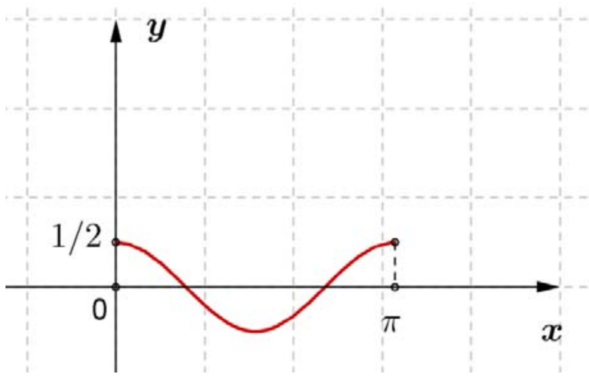
(Μονάδες 10)

γ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση μπορεί να πάρει την τιμή 1. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ:

α) Η f έχει ελάχιστη τιμή $-\frac{1}{2}$ και μέγιστη τιμή $\frac{1}{2}$. Κάθε τιμή της συνάρτησης επαναλαμβάνεται όταν το $2x$ αυξηθεί κατά 2π, οπότε το x αυξάνεται κατά π.
Επομένως η περίοδος της f είναι $T=\pi$.



β) Σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση στο διπλανό σχήμα

γ) Η συνάρτηση δεν μπορεί να πάρει την τιμή 1, επειδή έχει μέγιστη τιμή το $\frac{1}{2}$.

Αυτό άλλωστε φαίνεται και στη γραφική παράσταση.

Η f δεν μπορεί να πάρει τιμές εκτός του διαστήματος $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

ΣΧΟΛΙΟ: Το (β) ερώτημα είναι κάπως ασαφές. Το διάστημα πλάτους μιας περιόδου μπορεί να είναι οποιοδήποτε διάστημα έχει πλάτος π, π. χ το $\left[\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]$.

GI_V_ALG_2_17659

α) Να λύσετε αλγεβρικά το σύστημα $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$

(Μονάδες 15)

β) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τις λύσεις του συστήματος που βρήκατε στο ερώτημα (α).

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ:

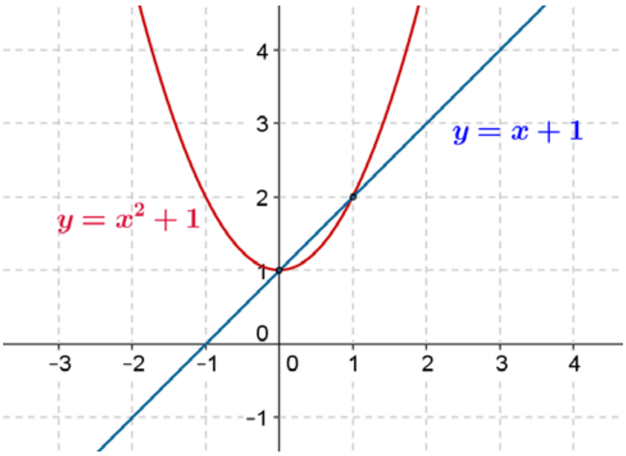
α)

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = x^2 + 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) = 0 \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \ \text{ ή } \ x - 1 = 0 \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \ \text{ ή } \ x = 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \ \text{ και } \ y = 1 \\ \text{ή } \ x = 1 \ \text{και } \ y = 2 \end{cases}$$

Επομένως το σύστημα έχει τις λύσεις $(x,y) = (0,1)$ ή $(x,y) = (1,2)$

β) Οι λύσεις του συστήματος είναι τα σημεία τομής της παραβολής με εξίσωση $y = x^2 + 1$ και της ευθείας με εξίσωση $y = x + 1$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα



GI_V_ALG_2_17663

Αν $0<x<\frac{\pi}{2}$ και $(2\text{συν}x+1)\cdot(5\text{συν}x-4)=0$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\text{συν}x=\frac{4}{5}$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ:

α) Αφού $0<x<\frac{\pi}{2}$ (1ο τεταρτημόριο), είναι $\text{συν}x>0$.

$(2\text{συν}x+1)\cdot(5\text{συν}x-4)=0 \Leftrightarrow 2\text{συν}x+1=0$ ή $5\text{συν}x-4=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \text{συν}x=-\frac{1}{2} \text{ ή } \text{συν}x=\frac{4}{5}.$$

Αφού $\text{συν}x>0$, δεκτό είναι μόνο το $\text{συν}x=\frac{4}{5}$.

β) Ισχύει ότι

$$\text{ημ}^2x+\text{συν}^2x=1 \Leftrightarrow \text{ημ}^2x+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1 \Leftrightarrow \text{ημ}^2x+\frac{16}{25}=1 \Leftrightarrow \text{ημ}^2x=\frac{9}{25}.$$

Άρα $\text{ημ}x=\frac{3}{5}$ ή $\text{ημ}x=-\frac{3}{5}$.

Επειδή $\text{ημ}x>0$, για κάθε x με $0<x<\frac{\pi}{2}$, είναι τελικά $\text{ημ}x=\frac{3}{5}$.

Επίσης $\text{εφ}x=\frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}$ και $\text{σφ}x=\frac{1}{\text{εφ}x}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$.

GI_V_ALG_2_17664

Δίνονται οι γωνίες ω, θ με $συνω \neq 0$ και $συνθ \neq 0$, για τις οποίες ισχύει:

$$ω + θ = 135^0$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $εφ(ω+θ) = -1$ (Μονάδες 10)

β) $εφω + εφθ + 1 = εφω \cdot εφθ$ (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ:

α) Είναι $εφ(ω+θ) = εφ135^0 = εφ(180^0 - 45^0) = -εφ45^0 = -1$

β) Οπότε,

$$εφ(ω+θ) = -1 \Leftrightarrow \frac{εφω + εφθ}{1 - εφω \cdot εφθ} = -1 \Leftrightarrow εφω + εφθ = -(1 - εφω \cdot εφθ) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow εφω + εφθ = -1 + εφωεφθ \Leftrightarrow \boxed{εφω + εφθ + 1 = εφω \cdot εφθ}$$

GI_V_ALG_2_17681

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2ημx + 1, x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f

(Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του $x \in [0, 2π]$ η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή;

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ:

α) Η συνάρτηση $g(x) = 2ημx$ έχει ελάχιστη τιμή -2 και μέγιστη 2, άρα η $f(x) = g(x) + 1$ θα έχει ελάχιστη τιμή $-2+1=-1$ και μέγιστη $2+1=3$.

β) Έχουμε $f(x) = 3 \Leftrightarrow 2ημx + 1 = 3 \Leftrightarrow 2ημx = 2 \Leftrightarrow ημx = 1 = ημ\frac{π}{2}$ και αφού $x \in [0, 2π]$,

είναι $x = \frac{π}{2}$

GI_V_ALG_2_17683

Δίνεται το σύστημα : $\begin{cases}(\lambda+1)x+2y=3\\ 4x+(\lambda-1)y=-6\end{cases}$ με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Αν $\lambda=-3$, να δείξετε ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Να βρείτε μία λύση.

(Μονάδες 8)

β) Αν $\lambda=3$, να δείξετε ότι το σύστημα είναι αδύνατο.

(Μονάδες 8)

γ) Αν $\lambda=0$, να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση την οποία και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ:

α) Για $\lambda=-3$ έχουμε $\begin{cases}-2x+2y=3\\ 4x-4y=-6\end{cases}\Leftrightarrow y=x+\dfrac{3}{2},\ \ x\in\mathbb{R}$ (άπειρες λύσεις).

Για $x=\dfrac{1}{2}$ έχουμε $y=2$ άρα μια λύση είναι η $(x,y)=\left(\dfrac{1}{2},2\right)$.

β) Για $\lambda=3$ έχουμε $\begin{cases}4x+2y=3\\ 4x+2y=-6\end{cases}$ (αδύνατο).

γ) Για $\lambda=0$ έχουμε $\begin{cases}x+2y=3\\ 4x-y=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y=3\\ 8x-2y=-12\end{cases}$.

Προσθέτουμε κατά μέλη:

$9x=-9\Leftrightarrow x=-1$ και με αντικατάσταση στην 1η : $-1+2y=3\Leftrightarrow y=2$

GI_V_ALG_2_17688

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$

α) Να δείξετε ότι $f(x)\le 1$. (Μονάδες 8)

β) Είναι το 1 η μέγιστη τιμή της συνάρτησης; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ:

α) Είναι $x^2+1>0$, οπότε η $f(x)$ έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$.

Είναι :

$$f(x)\le 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+1}\le 1 \Leftrightarrow 2x\le x^2+1 \Leftrightarrow 0\le x^2-2x+1 \Leftrightarrow (x-1)^2\ge 0$$

που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με το ίσον να ισχύει όταν $x=1$

β) Όπως αποδείξαμε παραπάνω είναι $f(x)\le 1 \Leftrightarrow f(x)\le f(1)$, οπότε η $f(x)$ έχει μέγιστο το 1, όταν x = 1.

γ) Η $f(x)$ έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$, οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θα είναι και $-x\in\mathbb{R}$ με

$$f(-x)=\frac{2(-x)}{(-x)^2+1}=-\frac{2x}{x^2+1}=-f(x)$$, άρα η $f(x)$ είναι περιττή.

GI_V_ALG_2_17692

α) Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sigma\upsilon\nu(\pi+x)=0$

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x\in[0,2\pi)$ για τις οποίες ισχύει: $\sigma\upsilon\nu x=-\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ:

α) Ισχύει : $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ (αφού $\left(\frac{\pi}{2}+\cancel{x}\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\cancel{x}\right)=\pi$)

Όμως $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sigma\upsilon\nu x$ (γωνίες συμπληρωματικές)

Δηλαδή $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sigma\upsilon\nu x$.

Ακόμη $\sigma\upsilon\nu(\pi+x)=-\sigma\upsilon\nu x$ (γωνίες που διαφέρουν κατά π)

Συνεπώς $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sigma\upsilon\nu(\pi+x)=\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu x=0$

β) Είναι $\sigma\upsilon\nu x=-\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=-\sigma\upsilon\nu x$ (από το (α) ερώτημα)

$\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=0$

$\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{2}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

Όμως $x\in[0,2\pi)$, επομένως

- $0\le 2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}<2\pi\overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow}0\le 4\kappa\cancel{\pi}+\cancel{\pi}<4\cancel{\pi}\Leftrightarrow 0\le 4\kappa+1<4\Leftrightarrow -1\le 4\kappa<3\Leftrightarrow\frac{-1}{4}\le\kappa<\frac{3}{4}$, , $\kappa\in\mathbb{Z}$

  Άρα $\kappa=0$ και $x=\frac{\pi}{2}$

- $0\le 2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}<2\pi\overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow}0\le 4\kappa\cancel{\pi}-\cancel{\pi}<4\cancel{\pi}\Leftrightarrow 0\le 4\kappa-1<4\Leftrightarrow 1\le 4\kappa<5\Leftrightarrow\frac{1}{4}\le\kappa<\frac{5}{4}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$

  Άρα $\kappa=1$ και $x=2\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$

GI_V_ALG_2_17693

α) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους παρακάτω αριθμούς:

$$συν\frac{π}{6},\quad συν\frac{π}{4},\quad συν\frac{17π}{10}$$

(Μονάδες 12)

β) Αν $π < x_1 < x_2 < \frac{3π}{2}$, να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$ημ\left(\frac{π}{2}-x_1\right),\quad ημ\left(\frac{π}{2}-x_2\right)$$

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ:

α) Κάνω αναγωγή στο πρώτο τεταρτημόριο για το $συν\frac{17π}{10}$

Χρησιμοποιώντας διαδοχικά γωνίες που διαφέρουν κατά $π$, και στην συνέχεια γωνίες που έχουν άθροισμα $π$ παίρνουμε:

$$συν\frac{17π}{10} = συν\left(π+\frac{7π}{10}\right) = -συν\frac{7π}{10} = συν\frac{3π}{10} \qquad \left(\text{αφού } \frac{7π}{10}+\frac{3π}{10}=π\right)$$

Έτσι οι γωνίες $\frac{π}{6}$, $\frac{π}{4}$, $\frac{3π}{10}$ ανήκουν στο διάστημα $\left[0,\frac{π}{2}\right]$, στο οποίο η συνάρτηση y = συνx είναι γνησίως φθίνουσα.

Επομένως: $\frac{π}{6} < \frac{π}{4} < \frac{3π}{10} \Rightarrow συν\frac{π}{6} > συν\frac{π}{4} > συν\frac{3π}{10}$

β) **Α ΤΡΟΠΟΣ**

Ισχύει ότι $ημ\left(\frac{π}{2}-x_1\right) = συνx_1$ (γωνίες συμπληρωματικές)

και $ημ\left(\frac{π}{2}-x_2\right) = συνx_2$ (γωνίες συμπληρωματικές)

Ισχύει ότι $π < x_1 < x_2 < \frac{3π}{2}$ δηλαδή $x_1, x_2 \in \left(π,\frac{3π}{2}\right)$.

Στο διάστημα αυτό η συνάρτηση y = συνx είναι γνησίως αύξουσα.

Επομένως: $x_1 < x_2 \Rightarrow συνx_1 < συνx_2 \Leftrightarrow ημ\left(\frac{π}{2}-x_1\right) < ημ\left(\frac{π}{2}-x_2\right)$

Β ΤΡΟΠΟΣ

Αφού $\pi < x_1 < x_2 < \frac{3\pi}{2} \overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow} -\pi > -x_1 > -x_2 > -\frac{3\pi}{2}$

$$\overset{+\frac{\pi}{2}}{\Leftrightarrow} \frac{\pi}{2} - \pi > \frac{\pi}{2} - x_1 > \frac{\pi}{2} - x_2 > \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2}$$

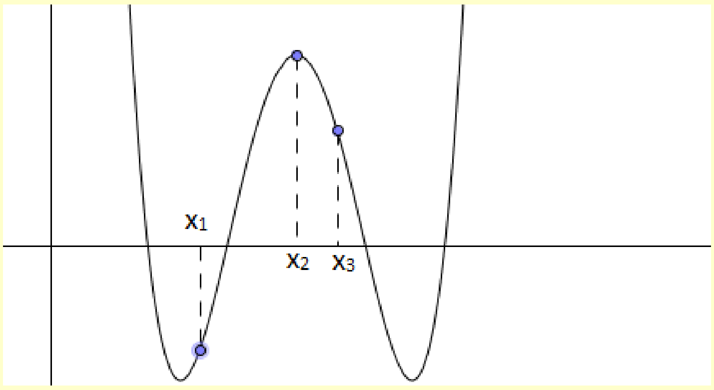
$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{2} - x_1 > \frac{\pi}{2} - x_2 > -\pi$$

Άρα οι γωνίες $\frac{\pi}{2} - x_1$, $\frac{\pi}{2} - x_2$ ανήκουν στο διάστημα $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$, στο οποίο η συνάρτηση y = ημx είναι γνησίως φθίνουσα.

Επομένως: $\frac{\pi}{2} - x_1 > \frac{\pi}{2} - x_2 \Leftrightarrow ημ\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right) < ημ\left(\frac{\pi}{2} - x_2\right)$.

GI_V_ALG_2_17698

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.



Να απαντήσετε τα παρακάτω ερωτήματα :

α) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$.

(Μονάδες 10)

β) Είναι η συνάρτηση γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

γ) Παρουσιάζει η f μέγιστο στο σημείο x_2 ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ:

α) Φέρνοντας τις προβολές των σημείων στον άξονα $y'y$ έχουμε : $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$

β) Η συνάρτηση δεν είναι γνησίως μονότονη.

Αν ήταν γνησίως αύξουσα, τότε για $x_1 < x_2 < x_3$ θα ίσχυε $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$

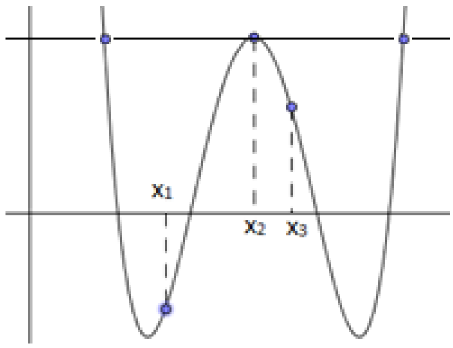
ενώ αν ήταν γνησίως φθίνουσα, τότε για $x_1 < x_2 < x_3$ θα ίσχυε $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$

αλλά από το ερώτημα (α) έχουμε

$$f(x_1) < f(x_3) < f(x_2).$$

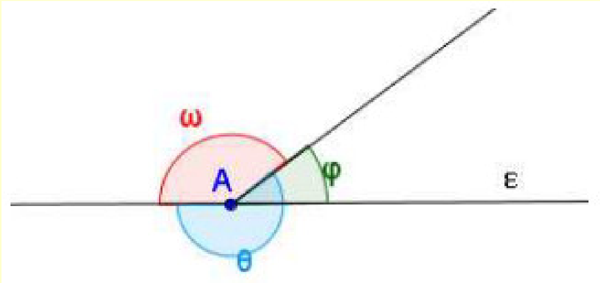
γ) Φέρνοντας την οριζόντια ευθεία που διέρχεται από το $(x_2, f(x_2))$ παρατηρούμε ότι η συνάρτηση παίρνει και τιμές μεγαλύτερες του $f(x_2)$.

Άρα το x_2 δεν είναι θέση μεγίστου.



GI_V_ALG_2_17699

Δίνεται $ημφ=\frac{3}{5}$, όπου φ η οξεία γωνία που σχηματίζεται με κορυφή το σημείο Α της ευθείας (ε) του παρακάτω σχήματος.



α) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας φ.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο των γωνιών θ και ω του σχήματος.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ:

α) Ισχύει $ημ^2φ+συν^2φ=1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2+συν^2φ=1 \Leftrightarrow \frac{9}{25}+συν^2φ=1 \Leftrightarrow συν^2φ=\frac{16}{25}$

$$\Leftrightarrow συνφ=\frac{4}{5} \text{ ή } συνφ=-\frac{4}{5}.$$

Αφού η γωνία φ είναι οξεία, είναι $συνφ>0$ και επομένως $συνφ=\frac{4}{5}$.

β) Παρατηρούμε ότι η γωνία ω είναι παραπληρωματική της φ, οπότε $ω=π-φ$.

Έτσι $ημω=ημ(π-φ)=ημφ=\frac{3}{5}$ και $συνω=συν(π-φ)=-συνφ=-\frac{4}{5}$.

Επίσης $θ=2π-ω$, οπότε

$$ημθ=ημ(2π-ω)=ημ(-ω)=-ημω=-\frac{3}{5}$$

και

$$συνθ=συν(2π-ω)=συν(-ω)=συνω=-\frac{4}{5}\ .$$

Σχόλιο : Στα ίδια συμπεράσματα θα καταλήγαμε αν παρατηρούσαμε ότι $θ=π+φ$

GI_V_ALG_2_17703

Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις :

$$(\epsilon_1): 2x - y = -1 \text{ και } (\epsilon_1): (\lambda - 1)x - y = 6 \text{ με παράμετρο } \lambda \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες.

(Μονάδες 8)

β) Να παραστήσετε γραφικά τις ευθείες για $\lambda = 3$.

(Μονάδες 8)

γ) Υπάρχει τιμή του λ ώστε οι ευθείες να ταυτίζονται; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

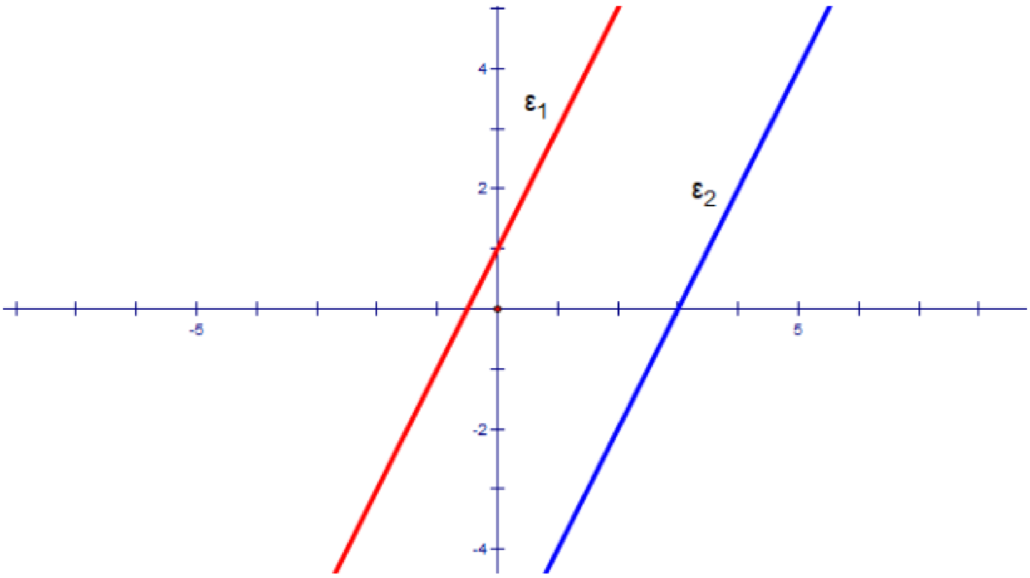
(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ:

α) Το σύστημα έχει ορίζουσα $D = -2 + \lambda - 1 = \lambda - 3$.

Πρέπει το σύστημα να είναι αδύνατο άρα $D = 0 \Leftrightarrow \lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3$ και τότε έχουμε τις ευθείες $(\epsilon_1): 2x - y = -1$ και $(\epsilon_1): 2x - y = 6$ που είναι παράλληλες.

β)



γ) Θα πρέπει το σύστημα να έχει άπειρες λύσεις, δηλαδή $D = 0$ αλλά τότε $\lambda = 3$ και από το ερώτημα (α) είδαμε ότι οι ευθείες είναι παράλληλες.

Άρα δεν υπάρχει τέτοια τιμή του λ.

GI_V_ALG_2_17704

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3συν2x,\ x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f. (Μονάδες 12)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και να παραστήσετε γραφικά την f σε διάστημα μιας περιόδου. (Μονάδες 13)

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$					
$συν2x$					
$f(x) = -3συν2x$					

ΛΥΣΗ:

α) Η περίοδος της συνάρτησης είναι $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

Η μέγιστη τιμή της είναι 3, όταν $συν2x = -1 \Leftrightarrow 2x = 2κ\pi + \pi \Leftrightarrow x = κ\pi + \frac{\pi}{2},\ κ \in Z$ και η ελάχιστη είναι -3 όταν $συν2x = 1 \Leftrightarrow 2x = 2κ\pi \Leftrightarrow x = κ\pi,\ κ \in Z$

β)

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
2x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
συν2x	1	0	-1	0	1
f(x) = -3συν2x	-3	0	3	0	-3

Με τη βοήθεια του παραπάνω πίνακα τιμών σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση στο διάστημα $[0, \pi]$

GI_V_ALG_2_17709

Δίνονται οι ευθείες $\epsilon_1: 2x+y=5$, $\epsilon_2: -2x+3y=-9$, $\epsilon_1: 3x+2y=7$

α) i) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ϵ_1, ϵ_2

ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ϵ_1, ϵ_3

(Μονάδες 12)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) να δείξετε ότι το κοινό σημείο των ϵ_2, ϵ_3 είναι σημείο της ϵ_1

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ:

αi) Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} 2x+y=5 \\ -2x+3y=-9 \end{cases}$.

Προσθέτουμε κατά μέλη : $4y=-4 \Leftrightarrow y=-1$

και με αντικατάσταση στη 1η : $2x-1=5 \Leftrightarrow x=3$ άρα το σημείο τομής είναι το $A(3,-1)$.

ii) Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 3x+2y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x-2y=-10 \\ 3x+2y=7 \end{cases}$.

Προσθέτουμε κατά μέλη : $-x=-3 \Leftrightarrow x=3$

και με αντικατάσταση στη 1η : $6+y=5 \Leftrightarrow y=-1$, άρα το σημείο τομής είναι το $A(3,-1)$.

β) Παρατηρούμε ότι οι τρεις ευθείες έχουν κοινό σημείο το $A(3,-1)$, άρα προφανώς το κοινό σημείο των ϵ_2, ϵ_3 είναι σημείο της ϵ_1

GI_V_ALG_2_17717

Ένα θέατρο έχει 25 σειρές καθισμάτων χωρισμένες σε δύο διαζώματα. Η κάθε μια από τις σειρές του κάτω διαζώματος έχει 14 καθίσματα και η κάθε μια από τις σειρές του πάνω διαζώματος έχει 16 καθίσματα, ενώ η συνολική χωρητικότητα του θεάτρου είναι 374 καθίσματα.

α) Αν *x* ο αριθμός σειρών του κάτω και *y* ο αριθμός σειρών του πάνω διαζώματος, να εκφράσετε τα δεδομένα του προβλήματος με ένα σύστημα δύο εξισώσεων. (Μονάδες 12)

β) Πόσες σειρές έχει το πάνω και πόσες το κάτω διάζωμα; (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ:

α) Είναι $\left\{\begin{array}{ccc} 16\cdot x+14\cdot y & = & 374 \\ x+y & = & 25 \end{array}\right\}$

β) $\left.\begin{array}{ccc} 16\cdot x+14\cdot y & = & 374 \\ x+y & = & 25 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} 16\cdot(25-y)+14\cdot y & = & 374 \quad (1) \\ x & = & 25-y \quad (2) \end{array}\right\}$.

Λύνουμε την (1) και παίρνουμε: $y=13$.

Με αντικατάσταση στην (2) προκύπτει ότι: $x=25-13=12$

Παρατήρηση: Θα μπορούσε να ζητήσει τον αριθμό των καθισμάτων στο κάτω και στο πάνω διάζωμα, οπότε θα βρίσκαμε: Κάτω διάζωμα: $16\cdot x=16\cdot 12=192$ καθίσματα.
Πάνω διάζωμα: $14\cdot y=14\cdot 13=182$ καθίσματα.

GI_V_ALG_2_17725

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu(\pi-3x)+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)=2\eta\mu 3x$ (Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ:

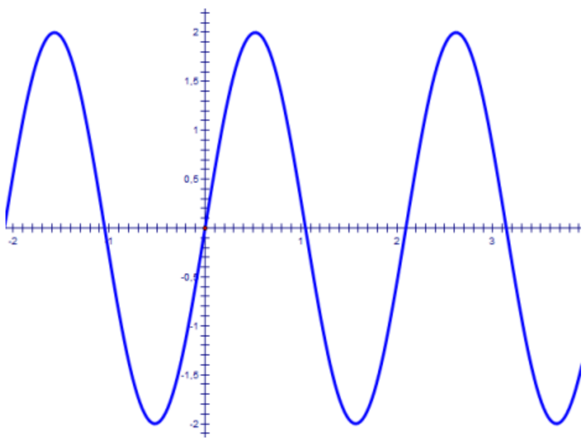
α) Είναι $\eta\mu(\pi-3x)=\eta\mu 3x$

και $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=\eta\mu 3x$

άρα, με αντικατάσταση, προκύπτει ότι :

$$f(x)=2\eta\mu 3x .$$

β) Η συνάρτηση έχει μέγιστο 2, ελάχιστο -2 και περίοδο $T=\frac{2\pi}{3}$



GI_V_ALG_2_17732

Έστω γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από τα σημεία Α(2, 3) και Β(4, 5) .

α) Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της f. (Μονάδες 13)

β) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x στο -2, να δείξετε ότι $f(0) > 0$

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ:

α) Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία Α(2,3) και Β(4,5), ισχύουν f(2) = 3 και f(4) = 5. Αν η συνάρτηση f ήταν γνησίως φθίνουσα, εφόσον 2 < 4, θα είχαμε f(2) > f(4) ή 3 > 5, που είναι άτοπο.

Με δεδομένο ότι η f είναι γνησίως μονότονη, θα είναι γνησίως αύξουσα.

β) Αφού η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x στο -2, είναι f(-2) = 0.

Είναι -2 < 0 και f γνησίως αύξουσα. Άρα f(-2) < f(0), δηλαδή f(0) > 0

GI_V_ALG_2_17734

Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1 : 2x + y = 6$ και $\varepsilon_2 : x - 2y = -3$

α) Να προσδιορίσετε αλγεβρικά το κοινό τους σημείο Μ. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε για ποια τιμή του α, η ευθεία *3x + αy = α + 5* διέρχεται από το Μ.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ:

α) Οι συντεταγμένες του σημείου Μ θα προσδιορισθούν από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων των δύο ευθειών.

Έχουμε: $(\Sigma)\begin{cases}\varepsilon_1 : 2x+y=6 \\ \varepsilon_2 : x-2y=-3\end{cases}$. Είναι: $D=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=2\cdot(-2)-1=-4-1=-5$

$D_x=\begin{vmatrix}6 & 1\\ -3 & -2\end{vmatrix}=-12-(-3)=-12+3=-9$ και $D_y=\begin{vmatrix}2 & 6\\ 1 & -3\end{vmatrix}=2\cdot(-3)-6=-6-6=-12.$

Αφού $D=-5\neq 0$, το (Σ) έχει μοναδική λύση,

την $(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=\left(\frac{-9}{-5},\frac{-12}{-5}\right)=\left(\frac{9}{5},\frac{12}{5}\right)$. Άρα $M\left(\frac{9}{5},\frac{12}{5}\right)$.

β) Η ευθεία $3x+\alpha y=\alpha+5$ διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{9}{5},\frac{12}{5}\right)$, αν και μόνο αν, η εξίσωσή της επαληθεύεται από τις συντεταγμένες του σημείου.

Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες του Μ παίρνουμε την :

$$3\cdot\frac{9}{5}+\alpha\cdot\frac{12}{5}=\alpha+5 \Leftrightarrow 27+12\alpha=5\alpha+25 \Leftrightarrow 7\alpha=-2 \Leftrightarrow \alpha=-\frac{2}{7}.$$

GI_V_ALG_2_17736

Δίνεται η παράσταση : $A=\dfrac{ημ^2x}{1-συνx}$ με $x\neq 2κπ, κ\in\mathbb{Z}$.

α) Να αποδείξετε ότι $A=1+συνx$ (Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{ημ^2x}{1-συνx}=\dfrac{1}{2}$ στο διάστημα $(0,2π)$ (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ:

α) $A=\dfrac{ημ^2x}{1-συνx}=\dfrac{1-συν^2x}{1-συνx}=\dfrac{(1+συνx)(1-συνx)}{1-συνx}=1+συνx$

β) Από το ερώτημα (α), για $x\neq 2κπ, κ\in\mathbb{Z}$ η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$1+συνx=\frac{1}{2}\Leftrightarrow συνx=-\frac{1}{2}=συν\frac{2π}{3}$$

και αφού $x\in(0,2π)$ έχουμε : $x=\dfrac{2π}{3}$ ή $x=\dfrac{4π}{3}$ (δεκτές)

GI_V_ALG_2_17739

Έστω γωνία x για την οποία ισχύουν : $\dfrac{π}{2}<x<π$ και $ημ(π-x)-ημ(π+x)=1$.

α) Να αποδείξετε ότι $ημx=\dfrac{1}{2}$ (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τη γωνία x (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ:

α) Έχουμε $ημ(π-x)-ημ(π+x)=1\Leftrightarrow ημx-(-ημx)=1\Leftrightarrow 2ημx=1\Leftrightarrow ημx=\dfrac{1}{2}$

β) Είναι $ημx=\dfrac{1}{2}=ημ\dfrac{π}{6}$ και $\dfrac{π}{2}<x<π$ άρα $x=π-\dfrac{π}{6}=\dfrac{5π}{6}$

GI_V_ALG_2_17741

α) Να αποδείξετε ότι : $\frac{ημx}{1-συνx}+\frac{ημx}{1+συνx}=\frac{2}{ημx},\ x\neq κπ,\ κ\in\mathbb{Z}$ (Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{ημx}{1-συνx}+\frac{ημx}{1+συνx}=\frac{4}{\sqrt{3}}$

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ:

α) Για $x\neq κπ, κ\in\mathbb{Z}$ έχουμε:

$$\frac{ημx}{1-συνx}+\frac{ημx}{1+συνx}=\frac{ημx(1+συνx)+ημx(1-συνx)}{(1-συνx)(1+συνx)}=$$

$$=\frac{ημx\left(1+\cancel{συνx}+1-\cancel{συνx}\right)}{1-συν^2x}=\frac{2\cancel{ημx}}{ημ^{\cancel{2}}x}=\frac{2}{ημx}.$$

β) Από το (α) ερώτημα και για $x\neq κπ, κ\in\mathbb{Z}$ έχουμε:

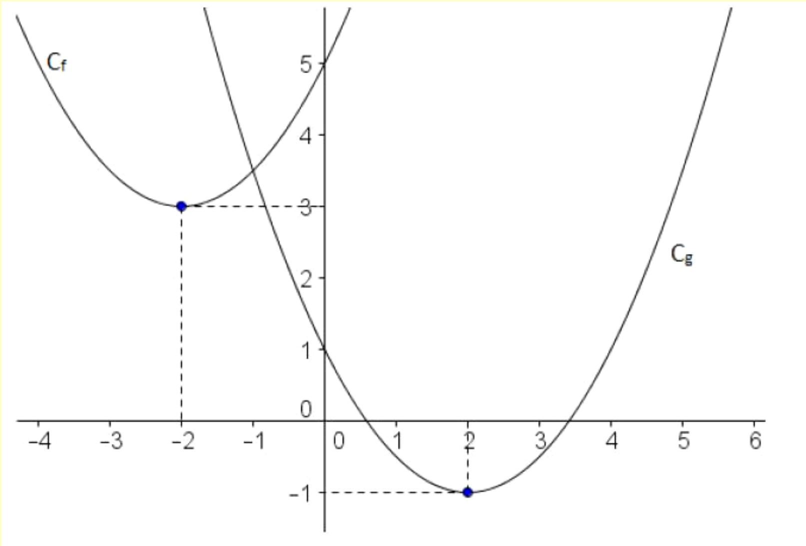
$$\frac{ημx}{1-συνx}+\frac{ημx}{1+συνx}=\frac{4}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{2}{ημx}=\frac{4}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 4ημx=2\sqrt{3} \Leftrightarrow ημx=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow ημx=ημ\frac{π}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x=2κπ+\frac{π}{3}\ ή\ x=2κπ+π-\frac{π}{3}\right)\Leftrightarrow\left(x=2κπ+\frac{π}{3}\quad ή\quad x=2κπ+\frac{2π}{3}\right),\ κ\in\mathbb{Z}.$$

GI_V_ALG_2_18632

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι παραβολές C_f, C_g που είναι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g αντίστοιχα με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση.

Παρατηρώντας το σχήμα:



α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας, το είδος του ακρότατου της f και την τιμή του.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε μέσω ποιων μετατοπίσεων της C_f προκύπτει η C_g.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ:

α) Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,-2]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-2,+\infty)$

Παρουσιάζει ελάχιστη τιμή για $x=-2$ την $f(-2)=3$.

β) Παρατηρούμε ότι η C_g προκύπτει από την C_f, αν αυτή μετατοπιστεί κατά 4 μονάδες δεξιά και 4 μονάδες κάτω.

Δηλαδή: $g(x)=f(x-4)-4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

GI_V_ALG_2_18634

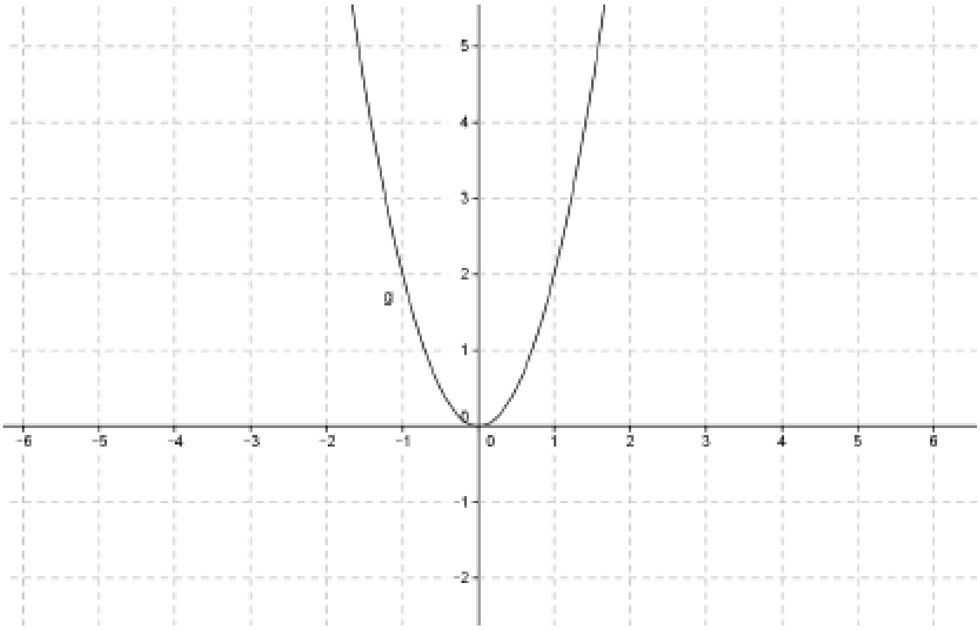
Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^2-12x+19$

α) Να δείξετε ότι γράφεται στη μορφή: $f(x)=2(x-3)^2+1$

(Μονάδες 10)

β) Παρακάτω δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=x^2$. Στο ίδιο σύστημα αξόνων, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f, και να εξηγήσετε πως αυτή προκύπτει μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της g.

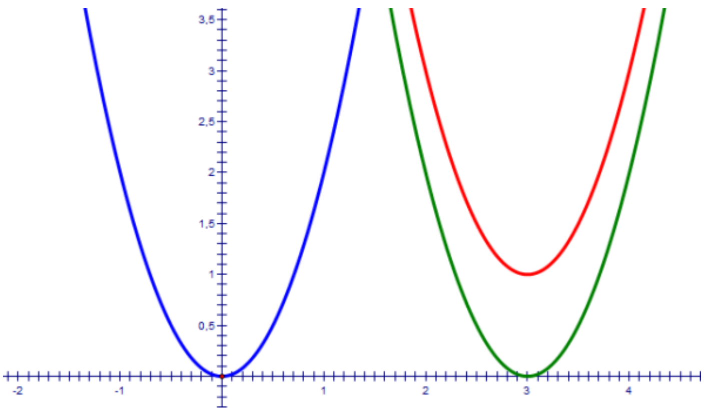
(Μονάδες 15)



ΛΥΣΗ:

α) Έχουμε : $f(x)=2x^2-12x+19=2x^2-12x+18+1=2(x^2-6x+9)+1=2(x-3)^2+1$

β) Η γραφική παράσταση της f (κόκκινη) θα προκύψει από τη γραφική παράσταση της g (μπλε) με δύο μετατοπίσεις : μία οριζόντια προς τα δεξιά κατά 3 μονάδες και μία κατακόρυφη προς τα πάνω κατά μία μονάδα.



GI_V_ALG_2_18637

Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} x-2y=9 \\ \alpha x+\beta y=\gamma \end{cases}$ με παραμέτρους $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.

α) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α,β,γ ώστε το σύστημα να έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(1,-4)$.

(Μονάδες 13)

β) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α,β,γ ώστε το σύστημα να είναι αδύνατο και να επαληθεύσετε γραφικά την επιλογή σας.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ:

α) Το σύστημα έχει ορίζουσα $D=\beta+2\alpha$. Για να έχει μοναδική λύση : $D\neq 0 \Leftrightarrow \beta\neq -2\alpha$ (1).

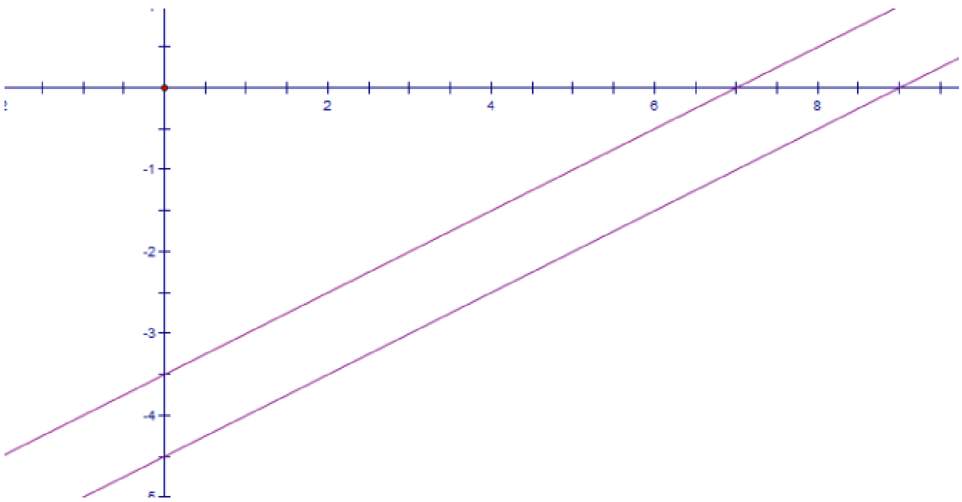
Αφού το ζεύγος $(1,-4)$ επαληθεύει, αντικαθιστούμε στη δεύτερη εξίσωση (η πρώτη ικανοποιείται) και έχουμε $\alpha-4\beta=\gamma$ (2).

Φροντίζοντας να ισχύει η (1), επιλέγουμε π.χ. $\alpha=1$, $\beta=2$ και έτσι η (2) δίνει $\gamma=-7$.

β) Για να είναι το σύστημα αδύνατο πρέπει $D=0 \Leftrightarrow \beta=-2\alpha$. Επιλέγουμε π.χ. $\alpha=1,\beta=-2$ και αντικαθιστούμε :

$\begin{cases} x-2y=9 \\ x-2y=\gamma \end{cases}$ άρα προφανώς θα πρέπει $\gamma\neq 9$. Επιλέγουμε π.χ. $\gamma=7$.

Τότε το σύστημα παριστάνει τις ευθείες $y=\frac{1}{2}x-\frac{9}{2}, y=\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}$ που είναι παράλληλες.



GI_V_ALG_2_18638

Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} 2x+y=3 \\ \alpha x+\beta y=\gamma \end{cases}$ με παραμέτρους $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$.

α) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α,β,γ ώστε το σύστημα να έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(-1,5)$.

(Μονάδες 13)

β) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α,β,γ ώστε το σύστημα να έχει άπειρες λύσεις και να επαληθεύσετε γραφικά την επιλογή σας.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ:

α) Το σύστημα έχει ορίζουσα $D=2\beta-\alpha$.

Για να έχει μοναδική λύση πρέπει $D\neq 0 \Leftrightarrow \alpha\neq 2\beta \qquad (1)$.

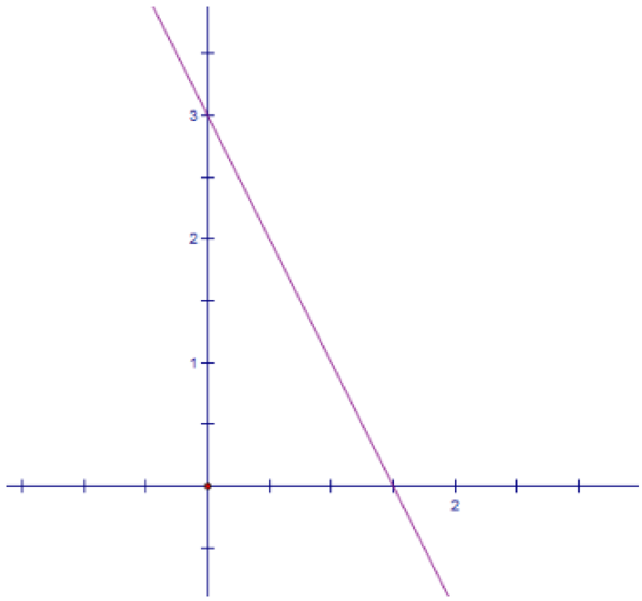
Αφού το ζεύγος $(-1,5)$ επαληθεύει, αντικαθιστούμε στη δεύτερη εξίσωση (η πρώτη ικανοποιείται) και έχουμε $-\alpha+5\beta=\gamma$ (2).

Φροντίζοντας να ισχύει η (1), επιλέγουμε π.χ. $\alpha=1,\beta=3$ και έτσι η (2) δίνει $\gamma=14$.

β) Για να έχει άπειρες λύσεις το σύστημα πρέπει $D=0 \Leftrightarrow \alpha=2\beta$.

Επιλέγουμε π.χ. $\alpha=2,\beta=1$ και αντικαθιστούμε : $\begin{cases} 2x+y=3 \\ 2x+y=\gamma \end{cases}$ άρα προφανώς θα πρέπει $\gamma=3$.

Τότε οι λύσεις είναι τα ζεύγη που αποτελούν συντεταγμένες των σημείων της ευθείας $y=-2x+3$



GL_V_ALG_2_19911

α) Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{2}\eta\mu x$. (Μονάδες 13)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α), να λύσετε στο διάστημα $(0,\pi)$ την εξίσωση:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{2}\eta\mu x=0$$ (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ:

α) Εφαρμόζοντας τον τύπο $\eta\mu(\alpha+\beta)=\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$ έχουμε:

$$\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\eta\mu x\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}+\sigma\upsilon\nu x\eta\mu\frac{\pi}{3}=\eta\mu x\cdot\frac{1}{2}+\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Δηλαδή $\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{2}\eta\mu x$

β) Λόγω του πρώτου ερωτήματος ισχύει $\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{2}\eta\mu x=\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$, οπότε έχουμε να λύσουμε την εξίσωση $\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0$. Έχουμε:

$$\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0\Leftrightarrow\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\eta\mu 0\Leftrightarrow\begin{cases}x+\frac{\pi}{3}=2\kappa\pi+0\\ x+\frac{\pi}{3}=2\kappa\pi+\pi-0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{3}\\ x=2\kappa\pi+\frac{2\pi}{3}\end{cases},\kappa\in\mathbb{Z}$$

Θέλουμε τις λύσεις του διαστήματος $(0,\pi)$. Οπότε:

- $x\in(0,\pi)\Leftrightarrow 0<x<\pi\Leftrightarrow 0<2\kappa\pi-\frac{\pi}{3}<\pi\Leftrightarrow 0<2\kappa-\frac{1}{3}<1\Leftrightarrow\frac{1}{3}<2\kappa<1+\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{6}<\kappa<\frac{2}{3}$ και $\kappa\in\mathbb{Z}$. Συνεπώς δεν υπάρχει $\kappa\in Z$ τέτοιο ώστε να προκύπτει λύση στο διάστημα $(0,\pi)$ από τον πρώτο τύπο λύσεων.
- $x\in(0,\pi)\Leftrightarrow 0<x<\pi\Leftrightarrow 0<2\kappa\pi+\frac{2\pi}{3}<\pi\Leftrightarrow 0<2\kappa+\frac{2}{3}<1\Leftrightarrow-\frac{2}{3}<2\kappa<1-\frac{2}{3}\Leftrightarrow-\frac{2}{3}<\kappa<\frac{1}{6}$ και $\kappa\in\mathbb{Z}$. Οπότε $\kappa=0$ και $x=\frac{2\pi}{3}$.

Δηλαδή η μοναδική λύση της εξίσωσης στο διάστημα $(0,\pi)$ είναι η $x=\frac{2\pi}{3}$

GI_V_ALG_2_19912

Δίνεται γωνία ω για την οποία ισχύει ότι $-\sigma\upsilon\nu 2\omega + 5\eta\mu\omega - 2 = 0$

α) Να αποδείξετε ότι ισχύει: $2\eta\mu^2\omega + 5\eta\mu\omega - 3 = 0$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu\omega = \dfrac{1}{2}$. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ:

α) Είναι $\sigma\upsilon\nu 2\omega = 1 - 2\eta\mu^2\omega$, οπότε αντικαθιστώντας στην ισότητα $\sigma\upsilon\nu 2\omega = 1 - 2\eta\mu^2\omega$ έχουμε:

$$-\left(1 - 2\eta\mu^2\omega\right) + 5\eta\mu\omega - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu^2\omega + 5\eta\mu\omega - 3 = 0$$

β) Θέτω $y = \eta\mu\omega$, $-1 \le y \le 1$ στην ισότητα $2\eta\mu^2\omega + 5\eta\mu\omega - 3 = 0$, η οποία γράφεται:

$$2y^2 + 5y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-5 \pm 7}{4} \text{ άρα } y = -3 \text{ που απορρίπτεται ή } y = \frac{1}{2} \text{ άρα } \eta\mu\omega = \frac{1}{2}$$

GI_V_ALG_2_19913

Έστω η συνάρτηση $f(x) = (ημx + συνx)^2$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 1 + ημ2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ:

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f(x) = (ημx + συνx)^2 = ημ^2x + 2ημx \cdot συνx + συν^2x =$$

$$= (ημ^2x + συν^2x) + 2ημx \cdot συνx = 1 + ημ2x .$$

β) Η συνάρτηση $g(x) = ημ2x$ έχει μέγιστη τιμή 1, ελάχιστη τιμή -1 και περίοδο $T = \frac{2π}{2} = π$, ο-

πότε και η συνάρτηση $f(x) = 1 + ημ2x = 1 + g(x)$ έχει μέγιστη τιμή $1 + 1 = 2$,

ελάχιστη τιμή $1 - 1 = 0$ και περίοδο π.

GI_V_ALG_2_19914

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 5$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 0$. (Μονάδες 8)

β) Είναι η f άρτια συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

γ) Με ποια μετατόπιση της $g(x) = x^2$ προκύπτει η C_f ; (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ:

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει: $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 5 \geq -5 \Leftrightarrow f(x) \geq -5$

Όμως $f(0) = -5$, επομένως $f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 0$.

β) Ισχύουν ότι :

- για κάθε $x \in D_f = \mathbb{R}$ και το $-x \in D_f = \mathbb{R}$
- $f(-x) = (-x)^2 - 5 = x^2 - 5 = f(x)$

Επομένως η f άρτια συνάρτηση.

γ) Η C_f προκύπτει από την μετατόπιση της C_g στον άξονα; $y'y$ κατά -5 μονάδες.

GI_V_ALG_2_20328

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} \lambda x + y = 2 \\ \lambda x + \lambda y = \lambda + 1 \end{cases}$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για τις ορίζουσες D, D_x, D_y του συστήματος ισχύουν:

$$D = \lambda(\lambda - 1),\ D_x = \lambda - 1,\ D_y = \lambda(\lambda - 1)$$

(Μονάδες 15)

β) Αν είναι $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$, τότε να λύσετε το σύστημα.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ:

α) Οι ορίζουσες είναι:

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ \lambda + 1 & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda - (\lambda + 1) = 2\lambda - \lambda - 1 = \lambda - 1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ \lambda & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 1) - 2\lambda = \lambda^2 + \lambda - 2\lambda = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$$

β) Για $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$ έχουμε ότι $D \neq 0$, οπότε το σύστημά μας θα έχει μοναδική λύση (x, y),

με $x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda(\lambda - 1)} = \dfrac{1}{\lambda}$ $\quad y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{\lambda(\lambda - 1)}{\lambda(\lambda - 1)} = 1$

Άρα $(x, y) = \left(\dfrac{1}{\lambda}, 1\right)$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$.

GI_V_ALG_2_20329

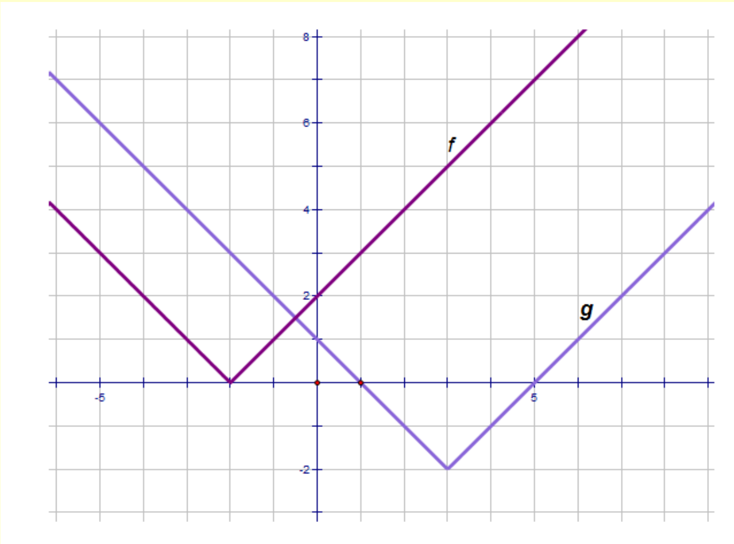
Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g, που ορίζονται στους πραγματικούς αριθμούς. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση. Από τις γραφικές παραστάσεις να βρείτε:

α) Τα διαστήματα μονοτονίας της f, το είδος του ακρότατου της f , τη θέση και την τιμή του.

(Μονάδες 12)

β) Ποιες μετατοπίσεις της f δίνουν τη g. Να προσδιορίσετε στη συνέχεια τον τύπο της συνάρτησης g, αν $f(x)=|x+2|$.

(Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ:

α) Παρατηρώντας τη γραφική παράσταση, συμπεραίνουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-2]$, γνησίως αύξουσα στο $[-2,+\infty)$. Παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=-2$ με τιμή $f(-2)=0$.

β) Η γραφική παράσταση της g προκύπτει με κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά -2 και οριζόντια κατά +5 μονάδες.
Είναι $f(x)=|x+2|$, οπότε $g(x)=f(x-5)-2=|x+2-5|-2=|x-3|-2$.