mathematica.gr

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

Άλγεβρας

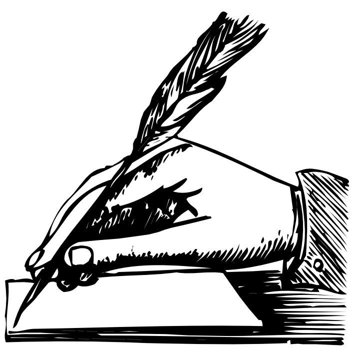
Β΄ τάξης Γενικού Λυκείου

4ο Θέμα

Εκφωνήσεις - Λύσεις

των

θεμάτων



Έκδοση 2η (2/12/2014)

Οι απαντήσεις και οι λύσεις
είναι αποτέλεσμα συλλογικής δουλειάς
των Επιμελητών των φακέλων του Λυκείου
του Δικτυακού Τόπου **mathematica.gr**
με βάση υλικό που αναρτήθηκε στο mathematica
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=147&t=46866

Συνεργάστηκαν οι:

Γιώργος Απόκης, Γιώργος Βισβίκης, Γιώργης Καλαθάκης
Γιώργος Λέκκας, Κλεάνθης Μανωλόπουλος, Στράτος Μανιτάρου,
Ανδρέας Παντέρης, Περικλής Παντούλας , Θανάσης Παπασταθόπουλος,
Κώστας Ρεκούμης , Γιώργος Ρίζος, Γιώργος Ροδόπουλος,
Σωτήρης Χασάπης

Θέματα 4ης Ομάδας

Άλγεβρα Γενικής Παιδείας Β΄ Λυκείου

GI_V_ALG_4_17833

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{8-x}-\sqrt{8+x}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

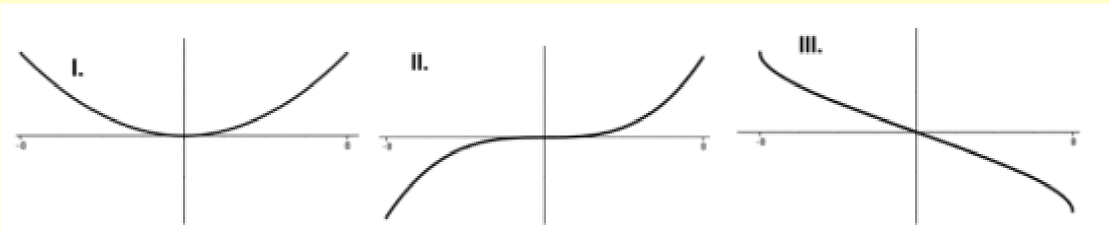
(Μονάδες 5)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

(Μονάδες 8)

γ) Αν η συνάρτησης f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της, να επιλέξετε ποια από τις παρακάτω τρείς προτεινόμενες, είναι η γραφική της παράσταση και στη συνέχεια να υπολογίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

(Μονάδες 7)



δ) Να αιτιολογήσετε γραφικά ή αλγεβρικά, γιατί οι συναρτήσεις

$$g(x)=f(x)-3 \text{ και } h(x)=f(x+3)$$

δεν είναι ούτε άρτιες ούτε περιττές.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ:

α) Η συνάρτηση f ορίζεται αν και μόνο αν : $\left.\begin{matrix}8-x\geq 0\\ 8+x\geq 0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}x\leq 8\\ x\geq -8\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow -8\leq x\leq 8$

Επομένως το πεδίο ορισμού είναι το κλειστό διάστημα $A=[-8,8]$

β) Επειδή το πεδίο ορισμού είναι το κλειστό διάστημα $A=[-8,8]$, ικανοποιείται η συνθήκη : για κάθε $x\in A$ και $-x\in A$

Επιπλέον : Για κάθε $x\in[-8,8]$, είναι :

$$f(-x)=\sqrt{8-(-x)}-\sqrt{8+(-x)}=\sqrt{8+x}-\sqrt{8-x}=-\left(\sqrt{8-x}-\sqrt{8+x}\right)=-f(x),$$

οπότε η f είναι περιττή

γ) Επειδή η f είναι περιττή, η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς κέντρο την αρχή των αξόνων. Επιπλέον η f είναι γνησίως φθίνουσα οπότε η γραφική της παράσταση είναι η ΙΙΙ

Είναι :

$$-8 \le x \le 8 \Rightarrow f(-8) \ge f(x) \ge f(8) \Rightarrow -4 \le f(x) \le 4,$$

διότι η f είναι γνησίως φθίνουσα

Άρα η f έχει για $x=-8$, μέγιστο το $f(-8)=4$ και για $x=8$, ελάχιστο το $f(8)=-4$

δ) Η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού επίσης το $A=[-8,8]$ και η γραφική της παράσταση προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με μεταφορά κατά 3 μονάδες προς τα κάτω. Επομένως θα έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο $B(0,-3)$. Έτσι δεν είναι συμμετρική ως προς το $O(0,0)$, ούτε ως προς τον $y'y$ άξονα. Επομένως δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

Ακόμα η συνάρτηση h έχει τύπο

$$h(x)=f(x+3)=\sqrt{8-(x+3)}-\sqrt{8+(x+3)}=\sqrt{5-x}-\sqrt{11+x}$$

και ορίζεται αν και μόνο αν :

$$\left.\begin{array}{r} 5-x\ge 0 \\ 11+x\ge 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} x\le 5 \\ x\ge -11 \end{array}\right\} \Leftrightarrow -11\le x\le 5$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της είναι το : $D=[-11,5]$ και δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή αφού δεν ικανοποιείται η συνθήκη "για κάθε $x\in D$ και $-x\in D$",

αφού π.χ. είναι $-11\in D$ και $11\notin D$.

GI_V_ALG_4_17834

Για τις ηλικίες των μελών μιας τριμελούς οικογένειας ισχύουν τα παρακάτω:

Η ηλικία της μητέρας είναι τριπλάσια από την ηλικία του παιδιού. Ο λόγος της ηλικίας του πατέρα προς την ηλικία του παιδιού ισούται με $\frac{11}{3}$.

Επιπλέον το άθροισμα των ηλικιών και των τριών ισούται με 115 χρόνια.

α) Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρείς αγνώστους.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την ηλικία του καθενός.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ:

α) Έστω $x, y, z \in (0, +\infty)$ οι ηλικίες πατέρα, μητέρας και παιδιού, αντίστοιχα.

Σύμφωνα με την υπόθεση είναι: $\left.\begin{matrix} y = 3z \\ \frac{x}{z} = \frac{11}{3} \\ x + y + z = 115 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{matrix} y = 3z \\ 3x = 11z \\ x + y + z = 115 \end{matrix}$

β)

$$\left.\begin{matrix} y = 3z \\ 3x = 11z \\ x + y + z = 115 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y = 3z \\ 3x = 11z \\ 3x + 3y + 3z = 345 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y = 3z \\ 3x = 11z \\ 11z + 9z + 3z = 345 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y = 3z \\ x = \frac{11z}{3} \\ 23z = 345 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y = 45 \\ x = 55 \\ z = 15 \end{matrix}\right\}$$

Επομένως ο πατέρας είναι 55, η μητέρα 45 και το παιδί 15

GI_V_ALG_4_17835

Δίνονται οι ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις $x+(\lambda+2)y=3$, $(\lambda-2)x+5y=3$ αντίστοιχα με $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, να βρείτε τη σχετική θέση των δύο ευθειών.

(Μονάδες 13)

β) Στην περίπτωση που οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής A των δύο ευθειών. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ για την οποία το σημείο A ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $x+2y=3$. (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ:

α) Η ορίζουσα του συστήματος είναι ίση με:

$$D=\begin{vmatrix}1 & \lambda+2\\ \lambda-2 & 5\end{vmatrix}=5-(\lambda^2-4)=9-\lambda^2=-(\lambda-3)(\lambda+3)$$

ενώ έχουμε και:

$$D_x=\begin{vmatrix}3 & \lambda+2\\ 3 & 5\end{vmatrix}=15-3\cdot(\lambda+2)=9-3\lambda=-3(\lambda-3)$$

$$D_y=\begin{vmatrix}1 & 3\\ \lambda-2 & 3\end{vmatrix}=3-3\cdot(\lambda-2)=9-3\lambda=-3(\lambda-3)$$

i) Αν $D\neq0\Leftrightarrow(3-\lambda)(3+\lambda)\neq0\Leftrightarrow\lambda\neq3$ και $\lambda\neq-3$ τότε οι ευθείες τέμνονται σε ένα σημείο Α.

ii) Αν $\lambda=3$ τότε έχουμε, αντικαθιστώντας στο αρχικό μας σύστημα: $\begin{cases}x+3y=5\\ x+3y=5\end{cases}$,

δηλαδή οι ευθείες ταυτίζονται.

iii) Αν $\lambda=-3$ τότε αντικαθιστώντας στο αρχικό μας σύστημα λαμβάνουμε: $\begin{cases}x-y=3\\ x-y=\dfrac{3}{5}\end{cases}$

επομένως το σύστημα είναι αδύνατο δηλαδή τότε οι ευθείες είναι παράλληλες.

β) Οι συντεταγμένες του σημείου A είναι

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{3}{\lambda+3},\ y=\frac{D_y}{D}=\frac{3}{\lambda+3},\ \text{ δηλαδή } A\left(\frac{3}{\lambda+3},\frac{3}{\lambda+3}\right).$$

γ) Για να ανήκει το σημείο A πάνω στην ευθεία $x+2y=3$ πρέπει και αρκεί οι συντεταγμένες του να επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.

Από το ερώτημα Β έχουμε: $\dfrac{3}{\lambda+3}+\dfrac{6}{\lambda+3}=3$. Δηλαδή: $3(\lambda+3)=9 \Leftrightarrow\lambda+3=3\Leftrightarrow\lambda=0$.

GI_V_ALG_4_17837

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|\alpha+1|\eta\mu(\beta\pi x)$ με $\alpha\in\mathbb{R}$ και $\beta>0$, η οποία έχει μέγιστη τιμή 3 και περίοδο 4

α) Να δείξετε ότι $\alpha=2$ ή $\alpha=-4$ και $\beta=\frac{1}{2}$. (Μονάδες 7)

β) Για $\alpha=2$ και $\beta=\frac{1}{2}$,

i. να λυθεί η εξίσωση $f(x)=3$ (Μονάδες 10)

ii. να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0,8]$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ:

α) Η συνάρτηση f έχει τύπο της μορφής $\rho\eta\mu(\omega x)$, με $\rho=|\alpha+1|$ και $\omega=\beta\pi>0$

Είναι: $\max f(x)=|\alpha+1|\Rightarrow 3=|\alpha+1|\Rightarrow \alpha+1=3$ ή $\alpha+1=-3\Rightarrow\alpha=2$ ή $\alpha=-4$

και $T=4\Rightarrow\frac{2\pi}{\beta\pi}=4\Rightarrow 4\beta=2\Rightarrow\beta=\frac{1}{2}$

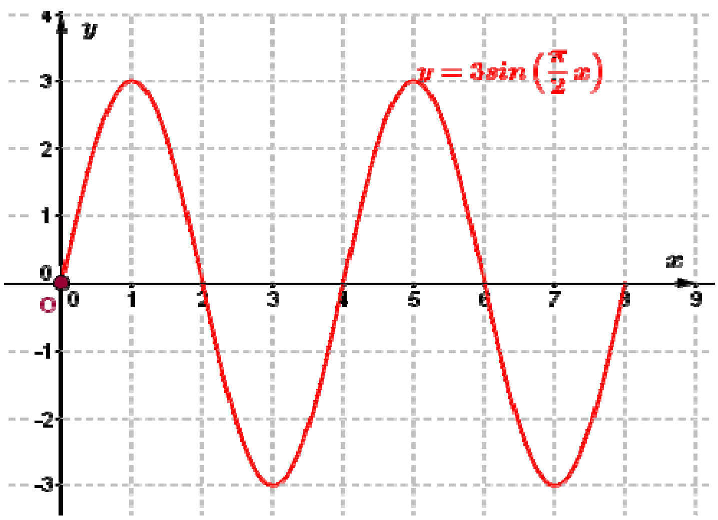
β) Για $\alpha=2$ και $\beta=\frac{1}{2}$ είναι $f(x)=3\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

i.
$$f(x)=3\Leftrightarrow 3\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}x\right)=3\Leftrightarrow\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}x\right)=1\Leftrightarrow\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}x\right)=\eta\mu\frac{\pi}{2}$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{\pi}{2}x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\ \text{ ή }\ \frac{\pi}{2}x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{2}\right)^{\text{ή}}$$
$$\Leftrightarrow\pi x=4\kappa\pi+\pi\Leftrightarrow x=4\kappa+1,\kappa\in Z.$$

ii. Στο διάστημα $[0,8]$, έχουμε τον πίνακα τιμών:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	0	3	0	-3	0	3	0	-3	0

και η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο σχήμα.



GI_V_ALG_4_17838

Για την γωνία ω ισχύει ότι $5\sigma\upsilon\nu 2\omega + 28\sigma\upsilon\nu\omega + 21 = 0$.

α. Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{4}{5}$

β. Αν για την γωνία ω επιπλέον ισχύει $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$, τότε:

i. Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu 2\omega = \frac{7}{25}$ και $\eta\mu 2\omega = -\frac{24}{25}$.

ii. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\Pi = \frac{13\cdot\left[\eta\mu^2 2\omega + \sigma\upsilon\nu^2 2\omega\right] + 12}{18\cdot\varepsilon\varphi 2\omega\cdot\sigma\varphi 2\omega + 25\left[\eta\mu 2\omega + \sigma\upsilon\nu 2\omega\right]}$$

ΛΥΣΗ:

α) Για την γωνία ω ισχύει ότι $5\sigma\upsilon\nu 2\omega + 28\sigma\upsilon\nu\omega + 21 = 0$ (1).

Όμως $\sigma\upsilon\nu 2\omega = 2\sigma\upsilon\nu^2\omega - 1$ (2).

Έτσι η (1) γράφεται:

$$5\left(2\sigma\upsilon\nu^2\omega - 1\right) + 28\sigma\upsilon\nu\omega + 21 = 0 \Leftrightarrow 10\sigma\upsilon\nu^2\omega - 5 + 28\sigma\upsilon\nu\omega + 21 = 0 \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10\sigma\upsilon\nu^2\omega + 28\sigma\upsilon\nu\omega + 16 = 0 \Leftrightarrow 5\sigma\upsilon\nu^2\omega + 14\sigma\upsilon\nu\omega + 8 = 0$$

Θέτω: $\sigma\upsilon\nu\omega = y$ με $y \in [-1,1]$.

Η παραπάνω σχέση τότε γράφεται: $5y^2 + 14y + 8 = 0$ που παριστάνει τριώνυμο με $\alpha = 5, \beta = 14, \gamma = 8$ και διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 14^2 - 4\cdot 5\cdot 8 = 196 - 160 = 36 > 0$.

Άρα το τριώνυμο έχει δυο διακεκριμένες πραγματικές ρίζες που είναι οι:

$$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-14 \pm \sqrt{36}}{2\cdot 5} = \frac{-14 \pm 6}{10},$$

οπότε :

$y_1 = \frac{-14+6}{10} = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5}$ που είναι δεκτή και $y_2 = \frac{-14-6}{10} = -\frac{20}{10} = -2 < -1$, που απορρίπτεται.

Επομένως: $\sigma\upsilon\nu\omega = y \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{4}{5}$

β) Για την γωνία ω ισχύει $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi \Rightarrow \pi < 2\omega < 2\pi$ και επομένως η γωνία είναι στο 2ο τεταρτημόριο ενώ η διπλάσιά της βρίσκεται στο 3ο ή στο 4ο τεταρτημόριο.

i) Ισχύει: $\sigma\upsilon\nu^2\omega+\eta\mu^2\omega=1\Rightarrow\eta\mu^2\omega=1-\sigma\upsilon\nu^2\omega\Rightarrow\eta\mu^2\omega=1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}\Rightarrow\eta\mu\omega=\pm\frac{3}{5}$

Όμως η γωνία είναι στο 2ο τεταρτημόριο που τα ημίτονα είναι θετικά άρα $\eta\mu\omega=\frac{3}{5}$.

Είναι

$$\sigma\upsilon\nu2\omega=2\sigma\upsilon\nu^2\omega-1=2\left(-\frac{4}{5}\right)^2-1=2\cdot\frac{16}{25}-1=\frac{32}{25}-\frac{25}{25}=\frac{7}{25}$$

και $\eta\mu2\omega=2\eta\mu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\omega=2\cdot\frac{3}{5}\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{24}{25}$

ii) Για την παράσταση Π έχω:

$$\Pi=\frac{13\cdot\left[\eta\mu^2 2\omega+\sigma\upsilon\nu^2 2\omega\right]+12}{18\cdot\varepsilon\varphi2\omega\cdot\sigma\varphi2\omega+25\left[\eta\mu2\omega+\sigma\upsilon\nu2\omega\right]}=\frac{13\cdot1+12}{18\cdot1+25\left(\frac{7}{25}-\frac{24}{25}\right)}=$$

$$=\frac{25}{18+25\left(-\frac{17}{25}\right)}=\frac{25}{18-17}=25$$

AL_4_17839

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases}(α\text{-}1)x+3y=3\\ x+(α+1)y=3\end{cases}$, με παράμετρο $α \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι αν το σύστημα έχει μοναδική λύση την (x_0, y_0), τότε $x_0 = y_0$

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές του $α \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα:

i. έχει άπειρες σε πλήθος λύσεις και να δώσετε τη μορφή τους.

(Μονάδες 6)

ii. δεν έχει λύση.

(Μονάδες 4)

γ) Να εξετάσετε τις σχετικές θέσεις των δύο ευθειών που προκύπτουν από τις εξισώσεις του παραπάνω συστήματος για $α = 4, α = 2, α = -2$.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ:

Υπολογίζουμε τις ορίζουσες του συστήματος.

Είναι:

$$D = \begin{vmatrix} α-1 & 3 \\ 1 & α+1 \end{vmatrix} = (α-1)(α+1)-3 = α^2-1-3 = α^2-4 = (α-2)(α+2)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & α+1 \end{vmatrix} = 3(α+1)-9 = 3α-6 = 3(α-2)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} α-1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3(α-1)-3 = 3α-6 = 3(α-2)$$

Επομένως :

Αν $D \neq 0 \Leftrightarrow (α-2)(α+2) \neq 0 \Leftrightarrow α \neq 2$ και $α \neq -2$, το σύστημα έχει μοναδική λύση την :

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = \left(\frac{3(α-2)}{(α-2)(α+2)}, \frac{3(α-2)}{(α-2)(α+2)}\right) = \left(\frac{3}{(α+2)}, \frac{3}{(α+2)}\right),$$

οπότε έχουμε άμεσα ότι : $x_0 = y_0$

βi) Αν $α = 2$, το σύστημα γίνεται :

$$\begin{cases}(2\text{-}1)x+3y=3\\ x+(2+1)y=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+3y=3\\ x+3y=3\end{cases} \Leftrightarrow x+3y=3 \Leftrightarrow x=3-3y$$

και επομένως έχει άπειρες λύσεις, της μορφής : $(x, y) = (3-3k, k), k \in \mathbb{R}$

ii) Αν $\alpha=-2$, το σύστημα γίνεται :

$$\begin{cases}(-2-1)x+3y=3\\ x+(-2+1)y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x+3y=3\\ x-y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x+y=1\\ x-y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0x+0y=2\\ x-y=3\end{cases},$$

το οποίο είναι αδύνατο

γ) Για $\alpha=3$ το σύστημα έχει μοναδική λύση και επομένως οι αντίστοιχες ευθείες έχουν μοναδικό κοινό σημείο, δηλαδή τέμνονται

Για $\alpha=2$ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και επομένως οι αντίστοιχες ευθείες έχουν άπειρα κοινά σημεία, οπότε συμπίπτουν

Για $\alpha=-2$ το σύστημα είναι αδύνατο και επομένως οι αντίστοιχες ευθείες δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, οπότε είναι παράλληλες

GI_V_ALG_4_17840

Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} -x+2y=1 \\ x+\lambda y=\lambda \end{cases}$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$

α) Να λύσετε το σύστημα για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$

(Μονάδες 10)

β) Αν $\lambda=-1$ και (x_o,y_o) είναι η αντίστοιχη λύση του συστήματος, να βρείτε γωνία $\theta\in[0,2\pi)$ τέτοια ώστε $x_o=\sigma\upsilon\nu\theta$ και $y_o=\eta\mu\theta$

(Μονάδες 7)

γ) Αν $\lambda=1$ και (x_1,y_1) είναι η αντίστοιχη λύση του συστήματος, να δείξετε ότι δεν υπάρχει γωνία ω, τέτοια ώστε $x_1=\sigma\upsilon\nu\omega$ και $y_1=\eta\mu\omega$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ:

α) Για το σύστημα $(\Sigma):\begin{cases} -x+2y=1 \\ x+\lambda y=\lambda \end{cases}$ είναι:

$$D=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}=-\lambda-2,\qquad D_x=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix}=\lambda-2\lambda=-\lambda\quad \text{και}\quad D_y=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}=-\lambda-1$$

- Αν $D\neq 0\Leftrightarrow -\lambda-2\neq 0\Leftrightarrow \lambda\neq -2$, το (Σ) έχει μοναδική λύση το ζεύγος

$$(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=\left(\frac{-\lambda}{-\lambda-2},\frac{-\lambda-1}{-\lambda-2}\right)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+2},\frac{\lambda+1}{\lambda+2}\right)$$

- Αν $D=0\Leftrightarrow -\lambda-2=0\Leftrightarrow \lambda=-2$, τότε:

$$(\Sigma)\Leftrightarrow\begin{cases} -x+2y=1 \\ x-2y=-2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x-2y=-1 \\ x-2y=-2 \end{cases},\ \text{προφανώς αδύνατο.}$$

β) Αν $\lambda=-1$ τότε η λύση του (Σ) είναι το ζεύγος

$$(x_o,y_o)=\left(\frac{-1}{-1+2},\frac{-1+1}{-1+2}\right)=(-1,0)$$

Επειδή $\pi\in[0,2\pi)$ με $\sigma\upsilon\nu\pi=-1=x_o$ και $\eta\mu\pi=0=y_o$, είναι $\theta=\pi$

γ) Αν $\lambda=1$ τότε η λύση του (Σ) είναι το ζεύγος

$$(x_1,y_1)=\left(\frac{1}{1+2},\frac{1+1}{1+2}\right)=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$

Αν υπάρχει γωνία ω, τέτοια ώστε, $\sigma\upsilon\nu\omega=x_1=\frac{1}{3}$ και $\eta\mu\omega=y_1=\frac{2}{3}$

θα πρέπει: $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1\Rightarrow\frac{4}{9}+\frac{1}{9}=1\Rightarrow\frac{5}{9}=1$, που είναι άτοπο.

GI_V_ALG_4_17841

Η Αλίκη και η Αθηνά διασκεδάζουν στη ρόδα του λούνα παρκ. Η απόσταση, σε μέτρα, του καθίσματος τους από το έδαφος την χρονική στιγμή t sec δίνεται από την συνάρτηση $h(t)=8+6\cdot\etaμ\left(\frac{\pi t}{30}\right), 0\leqslant t\leqslant 180$

α) Να βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το κάθισμα, καθώς και τις στιγμές κατά τις οποίες το κάθισμα βρίσκεται στο ελάχιστο και στο μέγιστο ύψος.

(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε την ακτίνα της ρόδας.

(Μονάδες 3)

γ) Να βρείτε την περίοδο της κίνησης, δηλαδή το χρόνο στον οποίο η ρόδα ολοκληρώνει μια περιστροφή. Πόσους γύρους έκαναν οι δύο φίλες στο διάστημα από 0 έως 180 sec;

(Μονάδες 4+2=6)

δ) Να μεταφέρετε στην κόλα σας τον πίνακα τιμών και το σύστημα συντεταγμένων που δίνεται παρακάτω και:

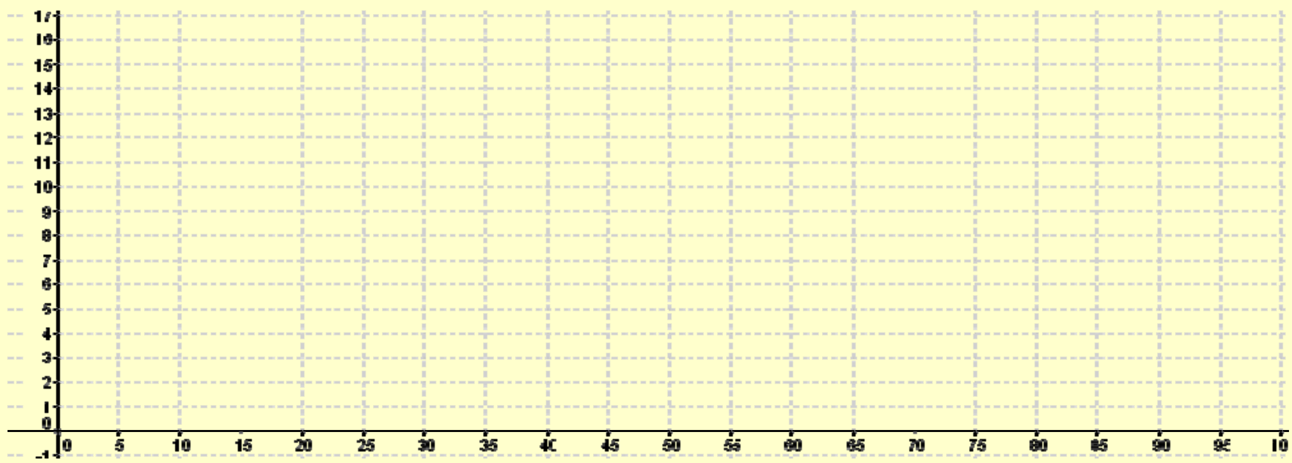
i. Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης του ύψους $h(t)$

(Μονάδες 3)

ii. Να σχεδιάσετε στο σύστημα συντεταγμένων το τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(t)$ με $0\leqslant t\leqslant 90$

(Μονάδες 5)

t	0	15	30	45	60	75	90
$h(t)$							



ΛΥΣΗ:

α) Για τη συνάρτηση $g(t)=6\cdot ημ\left(\frac{πt}{30}\right)$ έχουμε ότι: $\max g(t)=6$ και $\min g(t)=-6$

Συνεπώς $\max h(t)=8+\max g(t)=8+6=14$

και $\min h(t)=8+\min g(t)=8-6=2$,

δηλαδή το μέγιστο ύψος που φτάνει το κάθισμα είναι 14m και το ελάχιστο 2m

- Όταν το κάθισμα βρίσκεται στο μέγιστο ύψος έχουμε:

$$h(t)=14 \Leftrightarrow 8+6\cdot ημ\left(\frac{πt}{30}\right)=14 \Leftrightarrow 6\cdot ημ\left(\frac{πt}{30}\right)=6 \Leftrightarrow ημ\left(\frac{πt}{30}\right)=1 \Leftrightarrow ημ\left(\frac{πt}{30}\right)=ημ\frac{π}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{πt}{30}=2κπ+\frac{π}{2} \text{ ή } \frac{πt}{30}=2κπ+π-\frac{π}{2} \Leftrightarrow πt=60κπ+15π \Leftrightarrow t=60κ+15, κ\in\mathbb{Z}$$

Όμως

$$0\leqslant t\leqslant 180 \Leftrightarrow 0\leqslant 60κ+15\leqslant 180 \Leftrightarrow -15\leqslant 60κ\leqslant 165 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}\leqslant κ\leqslant\frac{11}{4},$$

οπότε

$$κ=0 \text{ ή } κ=1 \text{ ή } κ=2 \text{ και άρα } t=15 \text{ ή } t=75 \text{ ή } t=135$$

- Όταν το κάθισμα βρίσκεται στο ελάχιστο ύψος έχουμε:

$$h(t)=2 \Leftrightarrow 8+6\cdot ημ\left(\frac{πt}{30}\right)=2 \Leftrightarrow 6\cdot ημ\left(\frac{πt}{30}\right)=-6 \Leftrightarrow ημ\left(\frac{πt}{30}\right)=-1 \Leftrightarrow ημ\left(\frac{πt}{30}\right)=ημ\left(-\frac{π}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{πt}{30}=2λπ-\frac{π}{2} \text{ ή } \frac{πt}{30}=2λπ+π+\frac{π}{2} \Leftrightarrow πt=60λπ-15π \Leftrightarrow t=60λ-15, λ\in\mathbb{Z},$$

όμως

$$0\leqslant t\leqslant 180 \Leftrightarrow 0\leqslant 60λ-15\leqslant 180 \Leftrightarrow 15\leqslant 60λ\leqslant 195 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\leqslant λ\leqslant\frac{13}{4},$$

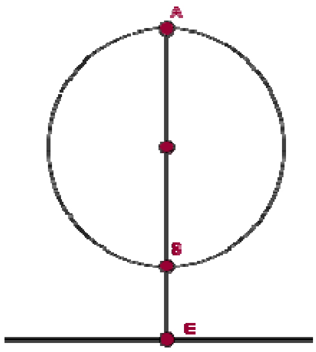
οπότε

$$λ=1 \text{ ή } λ=2 \text{ ή } λ=3 \text{ και άρα } t=45 \text{ ή } t=105 \text{ ή } t=165$$

β) Για την διάμετρο της ρόδας έχουμε: (σχήμα)

$$d=(ΑΕ)-(ΒΕ)=\max h(t)-\min h(t)=14-2=12\text{m}$$

οπότε η ακτίνα της ρόδας είναι 6m



γ) Είναι $T=\dfrac{2π}{\frac{π}{30}}=60\text{ sec}$ και επομένως οι δύο φίλες έκαναν

$\frac{180}{60}=3$ γύρους.

δ) Έχουμε:

$$h(0)=8+6\cdot\eta\mu\left(\frac{0}{30}\right)=8\,,h(15)=8+6\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)=14\,,$$

$$h(30)=8+6\cdot\eta\mu\left(\pi\right)=8\,,h(45)=8+6\cdot\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}\right)=2$$

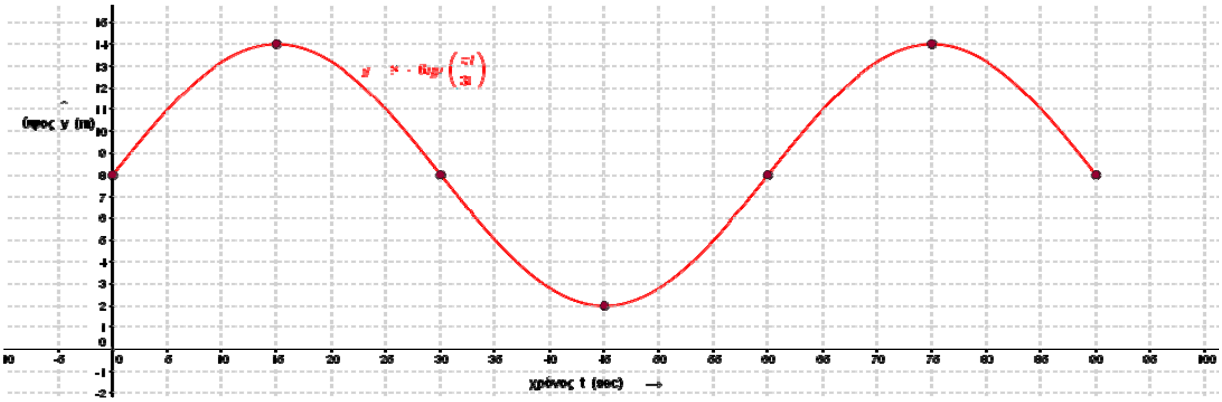
$$h(60)=8+6\cdot\eta\mu\left(2\pi\right)=8\,,h(75)=8+6\cdot\eta\mu\left(\frac{5\pi}{2}\right)=8+6\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)=14\,,$$

$$h(90)=8+6\cdot\eta\mu\left(3\pi\right)=8+6\cdot\eta\mu\left(\pi\right)=8$$

άρα έχουμε τον πίνακα τιμών:

t	0	15	30	45	60	75	90
$h(t)$	8	14	8	2	8	14	8

Η γραφική παράσταση στο δοσμένο διάστημα είναι:



GI_V_ALG_4_17842

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\frac{1}{2}(x-c)^2-d, \quad x\in\mathbb{R}$

με c, d θετικές σταθερές, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από τα σημεία $A(0, 16)$ και $B(4, 0)$

α) Με βάση τα δεδομένα, να κατασκευάσετε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους τους c, d και να υπολογίσετε την τιμή τους.

(Μονάδες 10)

β) Θεωρώντας γνωστό ότι $c=6$ και $d=2$,

i. να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες. (Μονάδες 3)

ii. να μεταφέρετε στην κόλα σας το σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και να εξηγήσετε πώς αυτή σχετίζεται με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\frac{1}{2}x^2$ (Μονάδες 6)

iii. με βάση την παραπάνω γραφική παράσταση, να βρείτε το ακρότατο της συνάρτησης f, τα διαστήματα στα οποία η f είναι μονότονη, καθώς και το είδος της μονοτονίας της σε καθένα από αυτά τα διαστήματα. (Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ:

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{2}(x-c)^2-d, \quad x\in\mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία $A(0, 16)$ και $B(4, 0)$, επομένως οι συντεταγμένες των σημείων θα επαληθεύουν την εξίσωσή της.

Δηλαδή $f(0)=16$ και $f(4)=0$

Άρα

$$f(0)=16 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(0-c)^2-d=16 \Leftrightarrow \frac{1}{2}c^2-d=16 \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} c^2-2d=32 \quad (1)$$

και

$$f(4)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(4-c)^2-d=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(16-8c+c^2)-d=0 \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} 16-8c+c^2-2d=0 \quad (2)$$

Με αντικατάσταση της σχέσης (1) στην σχέση (2) παίρνουμε:

$$16-8c+32=0 \Leftrightarrow 8c=48 \Leftrightarrow c=6$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση (1)

$$36-2d=32 \Leftrightarrow 4=2d \Leftrightarrow d=2$$

β) Αφού $c=6$ και $d=2$ τότε $f(x)=\frac{1}{2}(x-6)^2-2,\quad x\in\mathbb{R}$.

i. Για να βρούμε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} y=f(x) \\ y=0 \end{cases}$

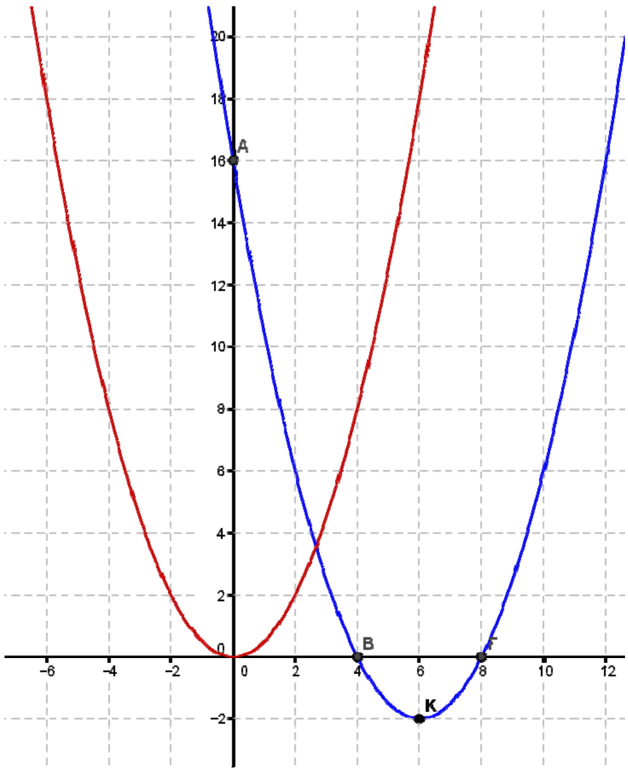
Είναι $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-6)^2-2=0 \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} (x-6)^2=4 \Leftrightarrow \begin{cases} x-6=2 \Leftrightarrow x=8 \\ x-6=-2 \Leftrightarrow x=4 \end{cases}$

Επομένως τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα $x'x$ είναι $B(4,\ 0)$ και $\Gamma(8,\ 0)$

Αντίστοιχα για το σημείο τομής της C_f με τον άξονα y'y βρίσκουμε το $f(0)=16$ δηλαδή το δοσμένο σημείο A.

ii. Η συνάρτηση $g(x)=\frac{1}{2}x^2$ είναι της μορφής $y=\alpha x^2$ που η γραφική της παράσταση αποτελεί καμπύλη που την ονομάζουμε παραβολή με κορυφή το σημείο Ο(0,0), το οποίο αποτελεί και το ελάχιστο αυτής.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{2}(x-6)^2-2$ αποτελεί μετατόπιση της C_g, όπως φαίνεται και στο σχήμα, κατά -2 μονάδες στον άξονα $y'y$ και κατά $+6$ μονάδες στον άξονα $x'x$.



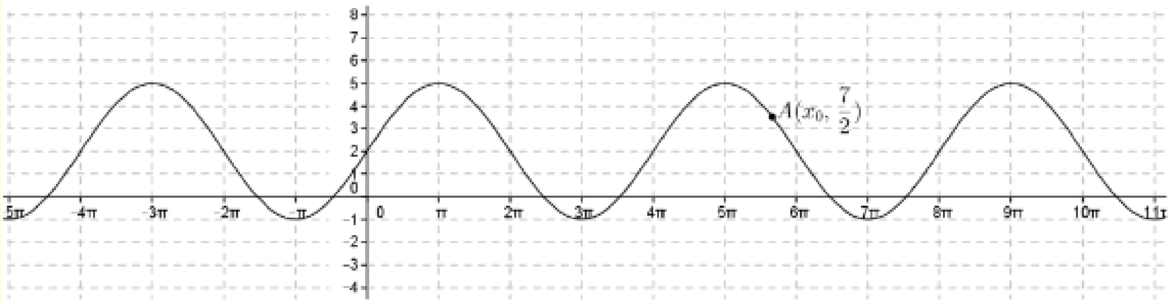
iii. Η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο για $x=6$ που είναι το $f(6)=-2$.

Στο διάστημα $(-\infty,6]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Στο διάστημα $[6,+\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα.

GI_V_ALG_4_17843

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f η οποία είναι της μορφής $f(x)=\rho\eta\mu(\omega x)+k$, με ρ, ω, k πραγματικές σταθερές.



α) Με βάση τη γραφική παράσταση, να βρείτε:

i. τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f (Μονάδες 3)

ii. την περίοδο T της συνάρτησης f (Μονάδες 3)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές των σταθερών ρ, ω, k.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

γ) Θεωρώντας γνωστό ότι $\rho=3$, $\omega=\frac{1}{2}$ και $k=2$, να προσδιορίσετε αλγεβρικά την τετμημένη x_0 του σημείου Α της γραφικής παράστασης, που δίνεται στο σχήμα.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ:

α) Από την γραφική παράσταση της συνάρτησης προκύπτει ότι:

i. $\max f=5$ και $\min f=-1$

ii. Η περίοδος $T=4\pi$

β) Από την γραφική παράσταση της συνάρτησης προκύπτει ότι ρ,κ είναι θετικοί αριθμοί.

Επομένως $\max f=5\Leftrightarrow \rho+k=5$ (1)

$\min f=-1\Leftrightarrow -\rho+k=-1$ (2)

Προσθέτοντας τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει $2k=4\Leftrightarrow k=2$,

και με αντικατάσταση $\rho=3$.

Ακόμη $T=4\pi\Leftrightarrow \frac{2\pi}{\omega}=4\pi\Leftrightarrow 2\pi=4\omega\pi\Leftrightarrow \omega=\frac{1}{2}$

Επομένως $k=2$, $\rho=3$ και $\omega=\frac{1}{2}$.

γ) Αφού $k=2$, $\rho=3$ και $\omega=\frac{1}{2}$ τότε $f(x)=3\eta\mu\left(\frac{1}{2}x\right)+2$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=3\eta\mu\left(\frac{1}{2}x\right)+2$ διέρχεται από το σημείο $A\left(x_0,\ \frac{7}{2}\right)$, επομένως οι συντεταγμένες του σημείου θα επαληθεύουν την εξίσωσή της Δηλαδή είναι $f(x_0)=\frac{7}{2}$

Είναι

$$f(x_0)=\frac{7}{2}\Leftrightarrow 3\eta\mu\left(\frac{1}{2}x_0\right)+2=\frac{7}{2}\Leftrightarrow 3\eta\mu\left(\frac{1}{2}x_0\right)=\frac{7}{2}-2\Leftrightarrow 3\eta\mu\left(\frac{1}{2}x_0\right)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{1}{2}x_0\right)=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{1}{2}x_0\right)=\eta\mu\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}x_0=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\right)\ \text{ή}\ \left(\frac{1}{2}x_0=2\kappa\pi+\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow x_0=4\kappa\pi+\frac{\pi}{3}\quad \text{ή}\ x_0=4\kappa\pi+\frac{5\pi}{3},\quad \kappa\in\mathbb{Z}$$

Όμως, όπως φαίνεται από το σχήμα, $5\pi<x_0<6\pi$

Επομένως

$$5\pi<4\kappa\pi+\frac{\pi}{3}<6\pi\Leftrightarrow 5<4\kappa+\frac{1}{3}<6\Leftrightarrow 14<12\kappa<17\Leftrightarrow\frac{14}{12}<\kappa<\frac{17}{12}\Leftrightarrow 1+\frac{2}{12}<\kappa<1+\frac{5}{12}$$

που είναι αδύνατο αφού $\kappa\in\mathbb{Z}$

Επίσης $5\pi<4\kappa\pi+\frac{5\pi}{3}<6\pi\Leftrightarrow 5<4\kappa+\frac{5}{3}<6\Leftrightarrow 10<12\kappa<13\Leftrightarrow\frac{10}{12}<\kappa<\frac{13}{12}\Leftrightarrow\kappa=1$

Άρα για $\kappa=1$ έχουμε $x_0=4\pi+\frac{5\pi}{3}=\frac{17\pi}{3}$

GI_V_ALG_4_17844

α) Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ (Μονάδες 12)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) και του τριγωνομετρικού κύκλου, να βρείτε όλες τις γωνίες ω με $0 \le \omega \le 2\pi$, που ικανοποιούν τη σχέση $\sigma\upsilon\nu\omega + \eta\mu\omega = -1$ και να τις απεικονίσετε πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ:

α) $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-1 \\ (x+y)^2-2xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ 1-2xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ x=0 \text{ ή } y=0 \end{cases}$

Οπότε το σύστημα είναι ισοδύναμο με τα συστήματα

$\begin{cases} x+y=-1 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(0,-1)$ ή $\begin{cases} x+y=-1 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(-1,0)$

Τελικά οι λύσεις είναι $(x,y)=(0,-1)$ ή $(x,y)=(-1,0)$

β) Η δοσμένη σχέση: $\sigma\upsilon\nu\omega+\eta\mu\omega=-1$ μαζί με την ταυτότητα $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$ σχηματίζουν το σύστημα $\begin{cases} \sigma\upsilon\nu\omega+\eta\mu\omega=-1 \\ \eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1 \end{cases}$

Θέτοντας $\sigma\upsilon\nu\omega=x$, $\eta\mu\omega=y$ με $-1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1$ το σύστημα είναι ισοδύναμο

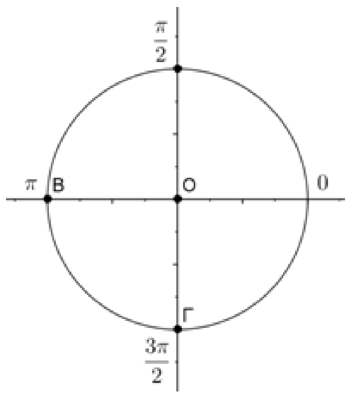
με το $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$,

το οποίο από το (α) ερώτημα έχει τις λύσεις $(x,y)=(0,-1)$ ή $(x,y)=(-1,0)$, που είναι δεκτές.

Αντικαθιστώντας έχουμε :

$\sigma\upsilon\nu\omega=0$ και $\eta\mu\omega=-1$,κι αφού $0 \le \omega \le 2\pi$, είναι $\omega=\dfrac{3\pi}{2}$,

ή $\sigma\upsilon\nu\omega=-1$ και $\eta\mu\omega=0$ κι αφού $0 \le \omega \le 2\pi$, είναι $\omega=\pi$



Στον τριγωνομετρικό κύκλο οι λύσεις παριστάνονται με τα σημεία Β,Γ

GI_V_ALG_4_17846

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ και $g(x)=\sigma\upsilon\nu 2x$.

α) Να μεταφέρετε στην κόλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών των συναρτήσεων f και g. Στη συνέχεια, να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$, για $x\in[0,\ 2\pi]$

(Μονάδες 8)

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$f(x)$									
$g(x)$									

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, να προσδιορίσετε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu 2x=\sigma\upsilon\nu x \quad (1)$ στο διάστημα $[0,\ 2\pi]$.

(Μονάδες 4)

γ) Να λύσετε αλγεβρικά την εξίσωση (1) στο διάστημα $[0,\ 2\pi]$ και να σημειώσετε πάνω στο σχήμα του ερωτήματος (α) τις συντεταγμένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$f(x)$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$g(x)$	1	0	-1	0	0	-1	0	1

Είναι:

$f(0)=\sigma\upsilon\nu 0=1$, $\qquad g(0)=\sigma\upsilon\nu 0=1$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\qquad g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu 2\cdot\frac{\pi}{4}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=0$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=0$, $\qquad g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu 2\cdot\frac{\pi}{2}=\sigma\upsilon\nu\pi=-1$

$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4}=\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$g\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu 2\cdot\frac{3\pi}{4}=\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2}=0$$

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{4}=\sigma\upsilon\nu\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$g\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(2\cdot\frac{5\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{2}=\sigma\upsilon\nu\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=0$$

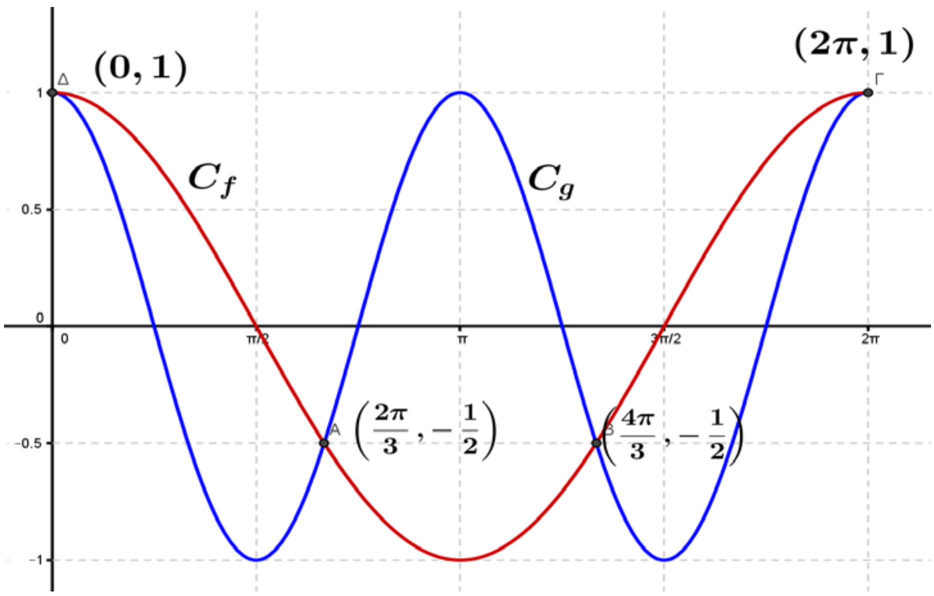
$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2}=0,$$

$$g\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu 2\cdot\frac{3\pi}{2}=\sigma\upsilon\nu 3\pi=\sigma\upsilon\nu(2\pi+\pi)=\sigma\upsilon\nu\pi=-1$$

$$f\left(\frac{7\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{4}=\sigma\upsilon\nu\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$g\left(\frac{7\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu 2\cdot\frac{7\pi}{4}=\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{2}=\sigma\upsilon\nu\left(2\pi+\frac{3\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2}=0$$

$f(2\pi)=\sigma\upsilon\nu 2\pi=1,$ $\qquad g(2\pi)=\sigma\upsilon\nu 4\pi=1$



β) Το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu 2x=\sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0,\ 2\pi]$ είναι το πλήθος των κοινών σημείων των C_f και C_g στο διάστημα αυτό.

Από το σχήμα προκύπτει ότι το πλήθος των κοινών σημείων είναι 4 .

γ) Είναι $\sigma\upsilon\nu 2x=\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow 2x=2\kappa\pi+x$ ή $2x=2\kappa\pi-x$

$$\Leftrightarrow x=2\kappa\pi \quad \text{ή} \quad 3x=2\kappa\pi$$

$$\Leftrightarrow x=2\kappa\pi \quad \text{ή} \quad x=\frac{2\kappa\pi}{3},\quad \kappa\in\mathbb{Z}$$

Επειδή θέλουμε οι λύσεις $2\kappa\pi$ και $\frac{2\kappa\pi}{3}$ να ανήκουν στο διάστημα $[0,\ 2\pi]$

- $0\le 2\kappa\pi\le 2\pi \Leftrightarrow 0\le\kappa\le 1$ με $\kappa\in\mathbb{Z}$

Δηλαδή $\kappa=0$ ή $\kappa=1$

Επομένως για $\kappa=0$ τότε $x=0$

για $\kappa=1$ τότε $x=2\pi$

- $0\le\frac{2\kappa\cancel{\pi}}{3}\le 2\cancel{\pi} \overset{\cdot 3}{\Leftrightarrow} 0\le 2\kappa\le 6 \Leftrightarrow 0\le\kappa\le 3$ με $\kappa\in\mathbb{Z}$

Δηλαδή $\kappa=0$ ή $\kappa=1$ ή $\kappa=2$ ή $\kappa=3$

Επομένως για $\kappa=0$ τότε $x=0$

για $\kappa=1$ τότε $x=\frac{2\pi}{3}$

για $\kappa=2$ τότε $x=\frac{4\pi}{3}$

για $\kappa=3$ τότε $x=2\pi$

Άρα η εξίσωση (1) στο διάστημα $[0,\ 2\pi]$ έχει 4 λύσεις:

$$x=0,\quad x=\frac{2\pi}{3},\quad x=\frac{4\pi}{3}\quad \text{και}\quad x=2\pi$$

Οι παραπάνω λύσεις είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g

Για $x=0$ τότε $\sigma\upsilon\nu 0=1$

για $x=\frac{2\pi}{3}$ τότε $\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

για $x=\frac{4\pi}{3}$ τότε $\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{3}=\sigma\upsilon\nu\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

για $x=2\pi$ τότε $\sigma\upsilon\nu 2\pi=1$

Επομένως τα κοινά σημεία, όπως φαίνονται και στο παραπάνω σχήμα είναι :

$$(0,1),\ \left(\frac{2\pi}{3},-\frac{1}{2}\right)\ \left(\frac{4\pi}{3},-\frac{1}{2}\right)\ \text{και}\ (2\pi,1).$$

GI_V_ALG_4_17850

Ο Κώστας έχει τρία παιδιά. Δύο δίδυμα κορίτσια και ένα αγόρι. Στην ερώτηση πόσων χρονών είναι τα παιδιά του απάντησε ως εξής.

1. Το άθροισμα των ηλικιών και των τριών παιδιών είναι 14
2. Το γινόμενο της ηλικίας της κόρης μου επί την ηλικία του γιου μου είναι 24
3. Το άθροισμα των ηλικιών των κοριτσιών είναι μικρότερο από την ηλικία του αγοριού.

α) Να γράψετε τις εξισώσεις που περιγράφουν τα στοιχεία 1 και 2 που έδωσε ο Κώστας. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις ηλικίες των παιδιών του Κώστα.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ:

Έστω ότι η ηλικία του καθενός από τα δίδυμα κορίτσια είναι x και του αγοριού y.

Προφανώς είναι $x,y>0$

α) Αφού το άθροισμα των ηλικιών και των τριών παιδιών είναι 14 ισχύει:

$$2x+y=14 \quad (1)$$

Ακόμη το γινόμενο της ηλικίας της κόρης επί την ηλικία του γιου είναι 24, επομένως:

$$xy=24. \quad (2)$$

β) Ισχύει ακόμη (από το στοιχείο 3.)

$$2x<y.$$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2)

Από την σχέση (1) έχουμε $y=14-2x$ και αντικαθιστώντας στην (2):

$$x(14-2x)=24 \Leftrightarrow 14x-2x^2=24$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-14x+24=0 \Leftrightarrow x^2-7x+12=0.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει: $\Delta=(-7)^2-4\cdot 12=49-48=1>0$, οπότε έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες : $x_{1,2}=\dfrac{-(-7)\pm 1}{2} \Leftrightarrow x_1=4$ ή $x_2=3$

Επομένως για $x=4$ παίρνουμε: $y=14-2\cdot 4=6$ και για $x=3$ παίρνουμε: $y=14-2\cdot 3=8$

Όμως από τον περιορισμό $2x<y$ δεχόμαστε μόνο την περίπτωση $x=3,\ \ y=8$, αφού για $x=4,\ \ y=6$ έχουμε $2\cdot 4>6$

Επομένως τα δίδυμα κορίτσια είναι 3 ετών και το αγόρι 8 ετών.

GI_V_ALG_4_17852

Ένα παιγνίδι κρέμεται με ένα ελατήριο από το ταβάνι. Το ύψος του από το πάτωμα σε cm συναρτήσει του χρόνου t (sec) δίνεται από τι σχέση: $h(t)=\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega t)+\beta$, όπου α,ω,β πραγματικές σταθερές.

Όταν το ελατήριο ταλαντώνεται, το ελάχιστο ύψος του παιχνιδιού από το πάτωμα είναι 20cm και το μέγιστο είναι 100cm. Τη χρονική στιγμή $t=0$ το ύψος παίρνει την ελάχιστη τιμή του και ο χρόνος μίας πλήρους ταλάντωσης (θέσεις: ελάχιστο - ηρεμία - μέγιστο - ηρεμία ελάχιστο) είναι 6 sec

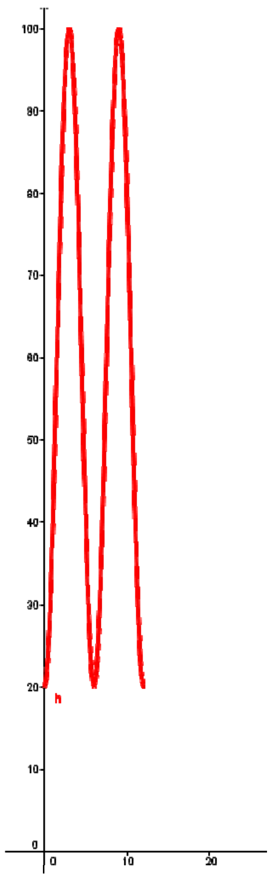
α) Να δείξετε ότι $\omega=\dfrac{\pi}{3}$. (Μονάδες 5)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές των α και β αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε το ύψος του παιχνιδιού από το πάτωμα 14 sec μετά την έναρξη της ταλάντωσης. (Μονάδες 8)

δ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(t)$ για $0\le t\le 12$. (Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ:



α) Εφόσον μία πλήρης ταλάντωση διαρκεί ακριβώς 6 sec έπεται ότι:

$$T=6\sec\Leftrightarrow\frac{2\pi}{\omega}=6\sec\Leftrightarrow\omega=\frac{\pi}{3}.$$

β) Εφόσον η ελάχιστη τιμή ταλάντωσης επιτυγχάνεται για $t=0$ θα ισχύει:

$$h(0)=20cm\Leftrightarrow\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi\cdot 0}{3}\right)+\beta=20cm\Leftrightarrow\alpha+\beta=20$$

Επίσης, τη μέγιστη τιμή της θα την λαμβάνει η ταλάντωση στο $\dfrac{T}{2}=3\sec$, οπότε θα ισχύει:

$$\alpha\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi 3}{3}\right)+\beta=100\Leftrightarrow-\alpha+\beta=100$$

Λύνουμε το σύστημα: $\begin{cases}\alpha+\beta=20\\-\alpha+\beta=100\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\beta=120\\-\alpha=100-\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=60\\\alpha=-40\end{cases}$

γ) Εφόσον η h είναι περιοδική με περίοδο $T=6\sec$ έχουμε:

$$h(14)=h(2\cdot T+2)=h(2)=-40\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3}\right)+60=-40\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+60=20+60=80$$

δ) Με τη βοήθεια της παραπάνω μελέτης, σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της h(t).

ΣΧΟΛΙΟ: Θα πρέπει να δοθεί ο περιορισμός ω > 0.

GI_V_ALG_4_17855

Ένα σώμα ταλαντώνεται κατακόρυφα στο άκρο ενός ελατηρίου. Η απόσταση του σώματος από το έδαφος (σε cm), δίνεται από την συνάρτηση:

$$f(t)=12\eta\mu\frac{\pi t}{4}+13, \text{ όπου } t \text{ ο χρόνος σε ώρες.}$$

α) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την απόσταση του σώματος από το έδαφος τις χρονικές στιγμές $t=5$ και $t=8$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε κατά το χρονικό διάστημα από $t=0$ έως $t=8$, ποιά χρονική στιγμή η απόσταση του σώματος από το έδαφος είναι ελάχιστη. Ποια είναι η απόσταση αυτή;

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ:

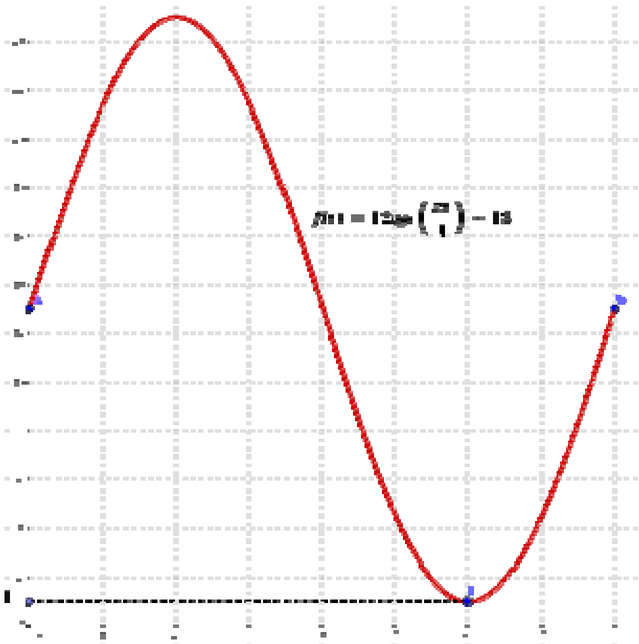
α) Η περίοδος μιας συνάρτησης της μορφής $f(t)=\rho\eta\mu\omega t$

δίνεται από τον τύπο $T=\frac{2\pi}{\omega}$, επομένως $T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=\frac{8\pi}{\pi}=8$ ώρες.

β) Από την συνάρτηση $f(t)=12\eta\mu\frac{\pi t}{4}+13$

• Για $t=5$ είναι $f(5)=12\eta\mu\frac{5\pi}{4}+13=12\eta\mu\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+13=12\left(-\eta\mu\frac{\pi}{4}\right)+13=$

$=12\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+13=-6\sqrt{2}+13 \quad \text{cm}$



• Για $t=8$ είναι $f(8)=12\eta\mu\frac{8\pi}{4}+13=$

$=12\eta\mu 2\pi+13=12\cdot 0+13=13 \quad \text{cm}$

γ) Κατά το χρονικό διάστημα από $t=0$ έως $t=8$, δηλαδή κατά την διάρκεια μιας περιόδου, γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση της μορφής $f(t)=\rho\eta\mu\omega t$, $\rho>0$ παρουσιάζει ελάχιστο $-\rho$ όταν $\omega t=\frac{3\pi}{2}$.

Επομένως η ελάχιστη απόσταση του σώματος από το έδαφος θα είναι $\min f=-12+13=1\,\text{cm}$, όταν $\frac{\pi t}{4}=\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow \pi t=6\pi\Leftrightarrow t=6$ ώρες.

GI_V_ALG_4_20331

Η θερμοκρασία μιας περιοχής σε βαθμούς Κελσίου (^{0}C) κατά τη διάρκεια ενός εικοσιτετραώρου δίνεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση:

$$f(t) = -8συν\frac{πt}{12} + 4 \text{ , με } 0 \le t \le 24 \quad (t \text{ ο χρόνος σε ώρες})$$

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη θερμοκρασία κατά τη διάρκεια του εικοσιτετραώρου. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που η θερμοκρασία είναι ίση με $0^{0}C$. (Μονάδες 6)

γ) Να παραστήσετε γραφικά την f για $t \in [0,24]$ (Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, πότε η θερμοκρασία είναι πάνω από $0^{0}C$ (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ:

α) Είναι $-1 \le συν\frac{πt}{12} \le 1 \Leftrightarrow 8 \ge -8συν\frac{πt}{12} \ge -8 \Leftrightarrow 8+4 \ge -8συν\frac{πt}{12} + 4 \ge -8+4$

$$\Leftrightarrow 12 \ge f(t) \ge -4, \quad t \in [0,24]$$

Η μέγιστη θερμοκρασία είναι $12^\circ C$, που εμφανίζεται όταν $συν\frac{πt}{12} = -1 \Leftrightarrow t = 12$.

και η ελάχιστη θερμοκρασία είναι $-4^\circ C$, που εμφανίζεται όταν $συν\frac{πt}{12} = 1 \Leftrightarrow t = 0$ ή $t = 24$.

β) Είναι $f(t) = 0 \Leftrightarrow -8συν\frac{πt}{12} + 4 = 0 \Leftrightarrow συν\frac{πt}{12} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow συν\frac{πt}{12} = συν\frac{π}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{πt}{12} = 2κπ + \frac{π}{3} \text{ ή } \frac{πt}{12} = 2κπ - \frac{π}{3}$$

$$\Leftrightarrow πt = 24κπ + 4π \text{ ή } \Leftrightarrow πt = 24κπ - 4π$$

$$\Leftrightarrow t = 24κ + 4 \text{ ή } \Leftrightarrow t = 24κ - 4. \quad κ \in \mathbb{Z}.$$

Όμως $0 \le t \le 24$, επομένως:

- $0 \le 24κ + 4 \le 24 \Leftrightarrow -4 \le 24κ \le 20 \Leftrightarrow \frac{-4}{24} \le κ \le \frac{20}{24}$, με $κ \in \mathbb{Z}$

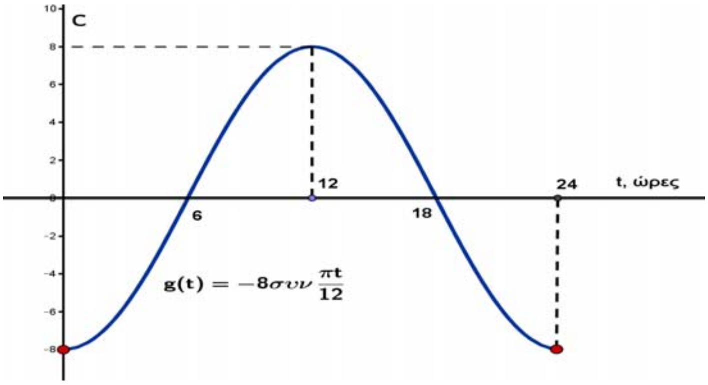
  Άρα $κ = 0 \Rightarrow t = 4$ ώρες.

- $0 \le 24κ - 4 \le 24 \Leftrightarrow 4 \le 24κ \le 28 \Leftrightarrow \frac{4}{24} \le κ \le \frac{28}{24}$, με $κ \in \mathbb{Z}$

  Άρα $κ = 1 \Rightarrow t = 24 - 4 = 20$ ώρες.

γ) Για να κάνουμε την γραφική παράσταση της f για $t \in [0,24]$ πρέπει να παρατηρήσουμε τα εξής:

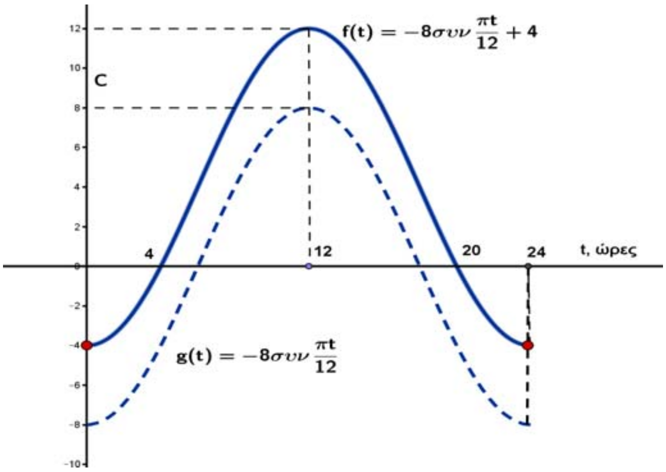
- Η συνάρτηση f έχει περίοδο $T = \dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{12}} = \dfrac{24\pi}{\pi} = 24$ ώρες, επομένως η γραφική παράσταση που αναζητούμε αναφέρεται σε μία περίοδο της f.
- Η συνάρτηση $-8\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{12}t$ είναι αντίθετη με την συνάρτηση $8\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{12}t$, της οποίας γνωρίζουμε από την θεωρία μας την γραφική παράσταση. Επομένως η γραφική της παράσταση θα είναι συμμετρική αυτής, ως προς τον άξονα $x'x$.



- Η γραφική παράσταση της f αποτελεί μετατόπιση της $y = -8\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{12}t$ στον άξονα $y'y$ κατά $+4$ μονάδες. Έτσι κατασκευάζουμε τον πίνακα τιμών:

t	0	4	12	20	24
f(t)	- 4	0	12	0	- 4

Προκύπτει η παρακάτω γραφική παράσταση:



δ) Από την γραφική παράσταση προκύπτει ότι η θερμοκρασία είναι πάνω από 0^0C, όταν $4 < t < 20$.

GI_V_ALG_4_20332

Δίνονται οι συναρτήσεις $\phi(x)=-x^2, x\in\mathbb{R}$ και $f(x)=-x^2+2x+1, x\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=-(x-1)^2+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης ϕ να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f.

(Μονάδες 10)

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της f να βρείτε:

i. Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη. (Μονάδες 5)

ii. Το ολικό ακρότατο της f καθώς και τη θέση του. (Μονάδες 5)

iii. Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\kappa$, $\kappa<2$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

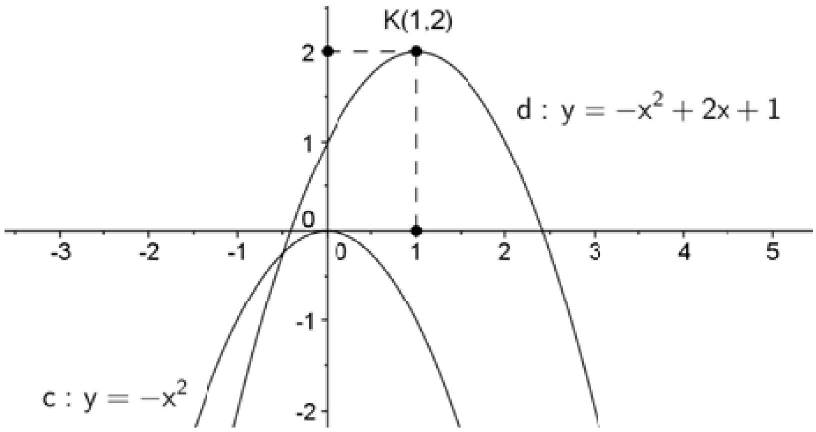
ΛΥΣΗ:

α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι :

$$f(x)=-x^2+2x+1=-x^2+2x-1+2=-(x^2+2x-1)+2=-(x-1)^2+2$$

Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από τη γραφική παράσταση της ϕ με μετατόπιση κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά και κατά 2 μονάδες προς τα άνω.

Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



βi) Όπως προκύπτει από τη γραφική παράσταση , η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$

ii) Η κορυφή $(0,0)$ της ϕ , στην οποία η ϕ παρουσιάζει μέγιστο , έχει μεταφερθεί στη θέση $K(1,2)$ το οποίο αποτελεί την κορυφή της f . Επομένως , για $x=1$ η f παρουσιάζει μέγιστο (ολικό) , το οποίο ισούται με 2

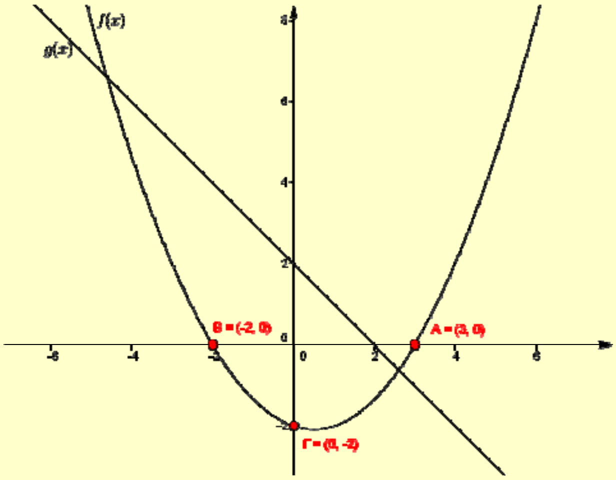
iii) Είναι :

$$f(x)=k \Leftrightarrow -x^2+2x+1-k=0 \Leftrightarrow x^2-2x+\left(k-1\right)=0,\ x\in\mathbb{R}, \kappa<2$$

και αφού $\Delta=4-4(\kappa-1)=8-4\kappa=4(2-\kappa)>0$, διότι $\kappa<2$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες.

GI_V_ALG_4_20334

Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας παραβολής $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ και της ευθείας $g(x)=-x+2$.



α) Δεδομένου ότι η παραβολή διέρχεται από τα σημεία Α, Β, Γ, να βρείτε τα α, β, γ.
(Μονάδες 8)

β) Αν $\alpha=\frac{1}{2}, \beta=0$ και $\gamma=-2$, να βρείτε αλγεβρικά τις συντεταγμένες των κοινών σημείων ευθείας και παραβολής. (Μονάδες 8)

γ) Αν μετατοπίσουμε την παραβολή κατά 4,5 μονάδες προς τα πάνω, να δείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή θα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ:

α) Τα σημεία είναι: $A(3,0), B(-2,0), \Gamma(0,-2)$.

Αφού η παραβολή διέρχεται από τα σημεία Α, Β, Γ, τότε τα σημεία αυτά θα επαληθεύουν την εξίσωσή της.
Οπότε:

Από το σημείο $A(3,0)$ είναι: $0=\alpha\cdot 3^2+\beta\cdot 3+\gamma \Leftrightarrow 9\alpha+3\beta+\gamma=0$.

Από το σημείο $B(3,0)$ είναι: $0=\alpha(-2)^2+\beta(-2)+\gamma \Leftrightarrow 4\alpha-2\beta+\gamma=0$.

Από το σημείο $\Gamma(0,-2)$ είναι: $-2=\alpha\cdot 0^2+\beta\cdot 0+\gamma \Leftrightarrow \gamma=-2$.

Λύνοντας το σύστημα των παραπάνω εξισώσεων θα βρούμε τα α, β, και γ, και κατ' επέκταση την εξίσωση της παραβολής μας.

$$\begin{cases} 9\alpha+3\beta+\gamma=0 \\ 4\alpha-2\beta+\gamma=0 \\ \gamma=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9\alpha+3\beta-2=0 \\ 4\alpha-2\beta-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9\alpha+3\beta=2 \\ 4\alpha-2\beta=2 \end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=-18-12=-30\ ,\ D_\alpha=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=-4-6=-10\ ,\ D_\beta=\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=18-8=10$$

Άρα: $(\alpha,\beta)=\left(\frac{D_\alpha}{D},\frac{D_\beta}{D}\right)=\left(\frac{-10}{-30},\frac{10}{-30}\right)=\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$

Οπότε έχουμε $\alpha=\frac{1}{3},\beta=-\frac{1}{3},\gamma=-2$ και η εξίσωση της παραβολής είναι:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x-2$$

β) Όταν $\alpha=\frac{1}{2},\beta=0$ και $\gamma=-2$, η εξίσωση της παραβολής παίρνει την μορφή:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2+0x-2=\frac{1}{2}x^2-2.$$

Για να βρούμε τα κοινά σημεία θα λύσουμε το σύστημα της $f(x)$ και της $g(x)$.

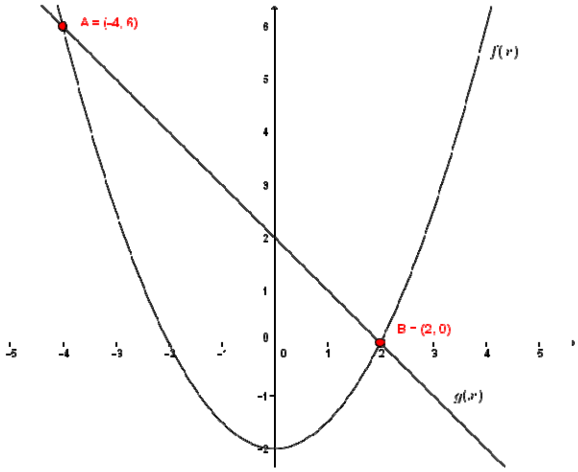
$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2-2 \\ y=-x+2 \end{cases} \quad \text{οπότε} \quad \frac{1}{2}x^2-2=-x+2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2+x-4=0 \Leftrightarrow x^2+2x-8=0$$

Η εξίσωση έχει Διακρίνουσα: $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=2^2-4\cdot1\cdot(-8)=4+32=36$

και ρίζες: $x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-2\pm\sqrt{36}}{2\cdot1}=\frac{-2\pm6}{2}=\begin{cases} x_1=\frac{-2+6}{2}=\frac{4}{2}=2 \\ x_2=\frac{-2-6}{2}=\frac{-8}{2}=-4 \end{cases}$

Άρα για $x_1=2$ έχουμε $y_1=-2+2=0$ και για $x_2=-4$ έχουμε $y_2=-(-4)+2=6$.

Οπότε τα σημεία τομής της παραβολής $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2$ και της ευθείας $g(x)=-x+2$ είναι τα: $(x_1,y_1)=(2,0)$ και $(x_2,y_2)=(-4,6)$.



γ) Αν μετατοπίσουμε την παραβολή μας κατά 4,5 μονάδες προς τα πάνω θα έχουμε μία νέα εξίσωση της μορφής:

$$h(x)=f(x)+4,5=f(x)+\frac{9}{2}=\frac{1}{2}x^2-2+\frac{9}{2}=\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}.$$

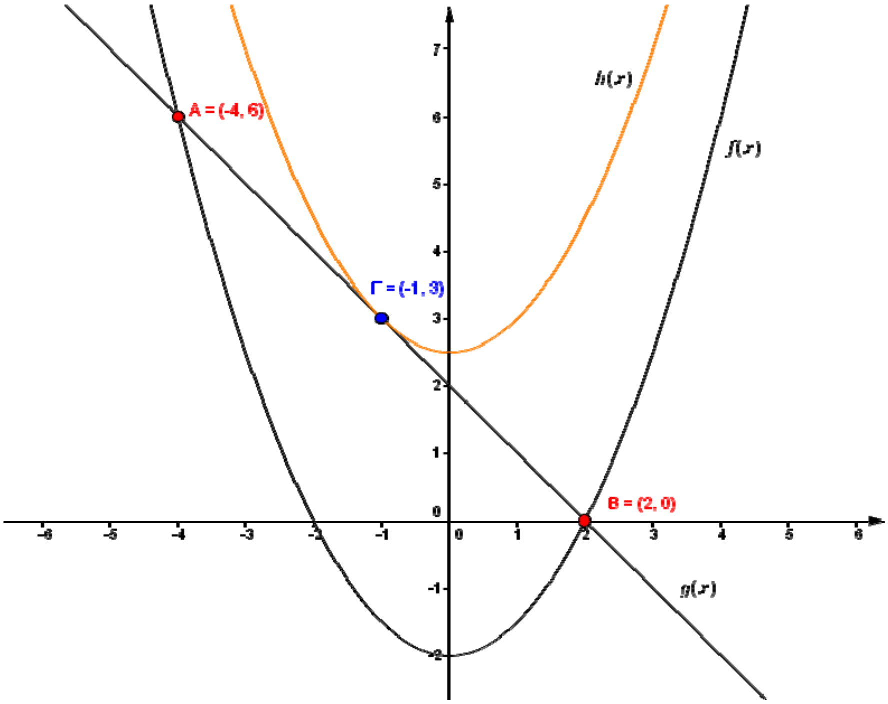
Λύνοντας το νέο σύστημα της $h(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}$ και της $g(x)=-x+2$ έχουμε:

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{5}{2} \\ y=-x+2 \end{cases} \overset{(=)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}=-x+2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2+x+\frac{5}{2}-2=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}=$$

$$x^2+2x+1=0 \overset{\text{ταυτότητα}}{\Leftrightarrow} (x+1)^2=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$$

Άρα το $y=-(-1)+2=3$.

Οπότε το σημείο τομής των $h(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}$ και $g(x)=-x+2$ είναι ένα, το: $(x,y)=(-1,3)$.



GI_V_ALG_4_20336

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} 2x-4y=1-\lambda \\ x+6y=\lambda+2 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει λύση για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό λ.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τα x και y συναρτήσει του λ. (Μονάδες 8)

γ) Να προσδιορίσετε την τιμή του λ, για την οποία οι ευθείες: $2x-4y=1-\lambda, x+6y=\lambda+2$ και $16x+16y=19$ διέρχονται από το ίδιο σημείο. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ:

α) Είναι $D=\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}=12+4=16\neq 0$, άρα το σύστημα έχει (μοναδική) λύση για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό λ.

β) Είναι $D_x=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ \lambda+2 & 6 \end{vmatrix}=6-6\lambda+4\lambda+8=14-2\lambda$, $D_y=\begin{vmatrix} 2 & 1-\lambda \\ 1 & \lambda+2 \end{vmatrix}=2\lambda+4-1+\lambda=3\lambda+3$

Επομένως $x=\frac{D_x}{D}=\frac{14-2\lambda}{16}=\frac{7-\lambda}{8}$, $y=\frac{D_y}{D}=\frac{3\lambda+3}{16}$

γ) Έστω Α το σημείο τομής των ευθειών $2x-4y=1-\lambda$ και $x+6y=\lambda+2$.

Έχει συντεταγμένες $x=\frac{7-\lambda}{8}$ και $y=\frac{3(\lambda+1)}{16}$.

Η ευθεία $16x+16y=19$ διέρχεται από το Α αν και μόνο αν :

$$\overset{2}{\cancel{16}}\frac{7-\lambda}{\cancel{8}}+\cancel{16}\frac{3(\lambda+1)}{\cancel{16}}=19 \Leftrightarrow 2(7-\lambda)+3(\lambda+1)=19 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14-2\lambda+3\lambda+3=19 \Leftrightarrow \lambda+17=19 \Leftrightarrow \boxed{\lambda=2}.$$

GI_V_ALG_4_20337

Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο 24cm. Αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 3cm και ελαττώσουμε το πλάτος του κατά 2cm, θα προκύψει ορθογώνιο με εμβαδόν διπλάσιο του αρχικού ορθογωνίου.

α) Να εκφράσετε την παραπάνω κατάσταση με ένα σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους.

β) Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου.

ΛΥΣΗ:

Αν x,y (με $y>2$) οι αρχικές διαστάσεις, τότε οι τελικές είναι $x+3, y-2$.

α) Αρχικά έχουμε περίμετρο $2x+2y$ και εμβαδόν xy και τελικά έχουμε εμβαδόν $(x+3)(y-2)$.

Επομένως $\begin{cases} 2x+2y=24 \\ (x+3)(y-2)=2xy \end{cases}$.

β) Από την πρώτη εξίσωση έχουμε : $y=12-x$ (1) (με $x<12$) και από τη δεύτερη :

$$xy-2x+3y-6=2xy \Leftrightarrow -2x+3y-xy-6=0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} -2x+3(12-x)-x(12-x)-6=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-17x+30=0 \Leftrightarrow x=2 \quad ή \quad x=15>12. \text{ Άρα } x=2, y=10$$

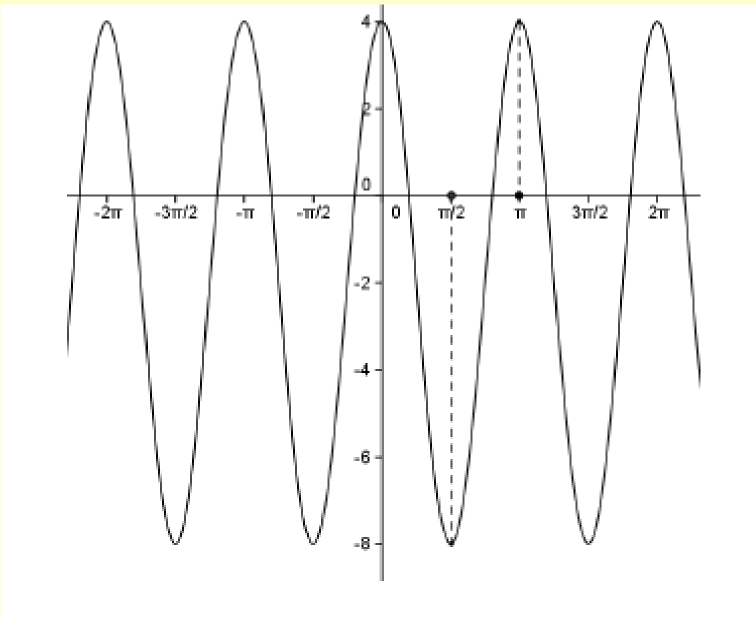
ΣΧΟΛΙΑ:

Η εκφώνηση θα πρέπει να διορθωθεί: Είναι παράδοξο το μήκος να είναι 2 cm και το πλάτος 10 cm. Θα μπορούσε π.χ. να εναλλαγεί το μήκος με το πλάτος ή να γραφεί: *(…) Αν αυξήσουμε τη μία διάστασή του κατά 3cm και ελαττώσουμε την άλλη του κατά 2cm,(…).*

Να διευκρινιστεί στο (β) αν ζητούνται οι διαστάσεις του αρχικού ή του τελικού και να βελτιωθεί η αδόκιμη διατύπωση: *Να εκφράσετε την παραπάνω κατάσταση…*

GI_V_ALG_4_20338

Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, που είναι της μορφής $f(x) = α + β·συν2x$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.



α) Με βάση τη γραφική παράσταση της f, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της. (Μονάδες 4)

β) Ποια είναι η περίοδος T της συνάρτησης f ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

γ) Με βάση τα δεδομένα του σχήματος, να αποδείξετε ότι: $α = -2$ και $β = 6$. (Μονάδες 8)

δ) Να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 1$ στο διάστημα $[0, 2π]$. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ:

α) Με βάση τη γραφική παράσταση, η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f είναι το 4 και η ελάχιστη τιμή το -8.

β) Η περίοδος είναι:

(i) Αλγεβρικά: $T = \frac{2π}{ω} \Rightarrow T = \frac{2π}{2} \Rightarrow T = π$

(ii) Γεωμετρικά: Από τη γραφική παράσταση $T = π$.

γ) Αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{π}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{π}{2}, π\right]$, θα είναι $β > 0$, οπότε:

$$-1\le \sigma\upsilon\nu 2x\le 1, x\in\mathbb{R} \overset{(\beta>0)}{\Leftrightarrow} -\beta\le \beta\sigma\upsilon\nu 2x\le \beta, x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \alpha-\beta\le \alpha+\beta\sigma\upsilon\nu 2x\le \alpha+\beta, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Άρα $\left.\begin{matrix}\max f=\alpha+\beta\\ \min f=\alpha-\beta\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix}\alpha+\beta &=4\\ \alpha-\beta &=-8\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{matrix}2\alpha=-4\\ 2\beta=12\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \alpha=-2 \text{ και } \beta=6$

δ) Για $\alpha=-2$ και $\beta=6$, $f(x)=-2+6\sigma\upsilon\nu 2x$.

Οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_f και της ευθείας $y=1$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$f(x)=1\Leftrightarrow -2+6\sigma\upsilon\nu 2x=1\Leftrightarrow 6\sigma\upsilon\nu 2x=3\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x=2k\pi+\dfrac{\pi}{3}\\ \text{ή} & \text{με } k\in\mathbb{Z}\\ 2x=2k\pi-\dfrac{\pi}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=k\pi+\dfrac{\pi}{6}\\ \text{ή} & \text{με } k\in\mathbb{Z}\\ x=k\pi-\dfrac{\pi}{6}\end{cases}\overset{(x\in[0,2\pi])}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{6} \text{ ή } x=\pi+\dfrac{\pi}{6}\\ x=\pi-\dfrac{\pi}{6} \text{ ή } x=2\pi-\dfrac{\pi}{6}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{6} \text{ ή } x=\dfrac{7\pi}{6}\\ x=\dfrac{5\pi}{6} \text{ ή } x=\dfrac{11\pi}{6}\end{cases}$$

Επομένως τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y=1$ στο διάστημα $[0,2\pi]$ είναι τα σημεία $A\left(\frac{\pi}{6},1\right)$, $B\left(\frac{5\pi}{6},1\right)$, $\Gamma\left(\frac{7\pi}{6},1\right)$ και $\Delta\left(\frac{11\pi}{6},1\right)$