http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ 2014

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α ΛΥΚΕΙΟΥ

4^{ο} ΘΕΜΑ

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

Έλυσαν οι

Δημήτρης Ιωάννου, Γιώργος Βισβίκης, Μπάμπης Στεργίου, Χρήστος Κάναβης, Γιώργης Καλαθάκης, Παναγιώτης Γκριμπαβιώτης, Περικλής Γιαννουλάτος Κώστας Ζυγούρης, Χρήστος Ντάβας, Γιώργος Ρίζος Ηλίας Καμπελής, Νίκος Φραγκάκης,Αντώνης Βρέντζος, Γιώργος Γαβριλόπουλος, lafkasd

Επιμέλεια : Τσιφάκης Χρήστος

Αφιερωμένο σε όλους τους μαθητές της Α Λυκείου

Τεύχος 1ο

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

ΘΕΜΑ 3693

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^o$), και η διχοτόμος του ΒΔ. Από το Δ φέρνουμε την ΔΕ κάθετη στην ΒΓ και ονομάζουμε Ζ το σημείο στο οποίο η ευθεία ΕΔ τέμνει την προέκταση της ΒΑ. Να αποδείξετε ότι:

(α) Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές.

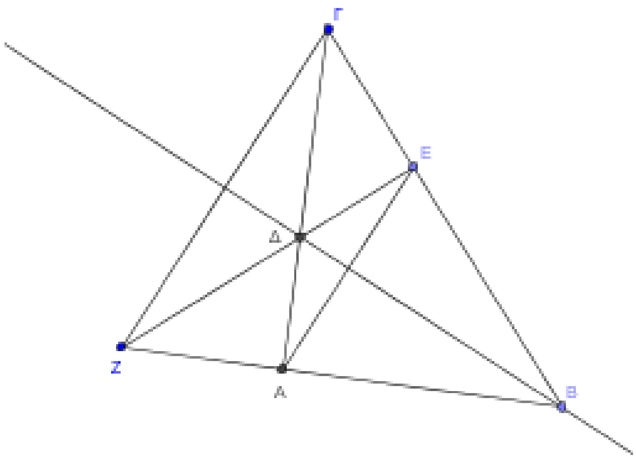
(β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και BEZ είναι ίσα.

(γ) Η ευθεία $B\Delta$ είναι μεσοκάθετη των τμημάτων AE και $Z\Gamma$.

(δ) Το τετράπλευρο $AE\Gamma Z$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση:

(α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Delta$ και $EB\Delta$ έχουν την υποτείνουσα $B\Delta$ κοινή και $AB\Delta = EB\Delta$. Άρα είναι ίσα και άρα θα έχουν και $BA=BE$, δηλαδή το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές.



(β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και BEZ έχουν: $BA=BE$ (όπως είδαμε στο (α) ερώτημα) και την γωνία ABE κοινή. Άρα είναι ίσα.

(γ) Αφού το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές και η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας B, άρα η $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του AE, διότι σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο, η διχοτόμος που άγεται από την κορυφή του είναι και διάμεσος και ύψος.

Επίσης αφού και τα τρίγωνα ΑΒΓ και BEZ είναι ίσα (όπως δείξαμε στο (β) ερώτημα), θα έχουμε ότι $B\Gamma = BZ$ και άρα και το τρίγωνο $B\Gamma Z$ είναι ισοσκελές με κορυφή το B. Συνεπώς η διχοτόμος που άγεται από την κορυφή B θα είναι η μεσοκάθετος του $Z\Gamma$.

(δ) Οι ευθείες $AE, Z\Gamma$ είναι παράλληλες ως κάθετες στην ίδια ευθεία $B\Delta$. Και εφόσον οι ευθείες $\Gamma E, ZA$ τέμνονται (στο B) συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $AE\Gamma Z$ είναι τραπέζιο. Επίσης από τα προηγούμενα ερωτήματα έχουμε ότι:

$B\Gamma = BZ$ και $BE = BA$.

Με αφαίρεση αυτών κατά μέλη παίρνουμε : $E\Gamma = AZ$, οπότε το πιο πάνω τραπέζιο είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ 3694

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB < B\Gamma$) και η διχοτόμος $A\Delta$. Φέρουμε από το B κάθετη στην $A\Delta$ που τέμνει την $A\Delta$ στο E και την πλευρά $A\Gamma$ στο H. Αν M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ να αποδείξετε ότι:

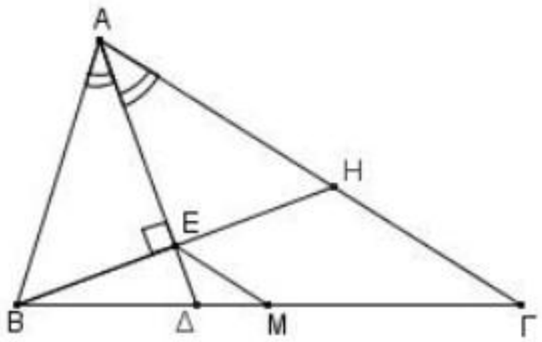
α) Το τρίγωνο ABH είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

β) $EM // H\Gamma$. (Μονάδες 8)

γ) $EM = \dfrac{A\Gamma - AB}{2}$. (Μονάδες 8)

Λύση:

α) Στο τρίγωνο αυτό η AE είναι ύψος και διχοτόμος, οπότε είναι ισοσκελές

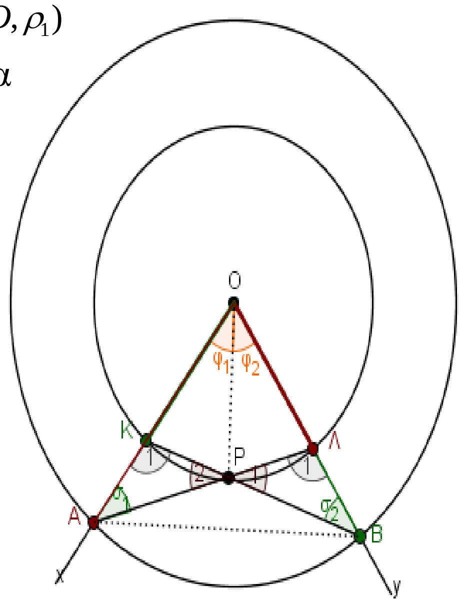


β) Στο ισοσκελές τρίγωνο ABH η AE είναι και διάμεσος, δηλαδή το E είναι μέσο του BH. Έτσι, από το τρίγωνο $BH\Gamma$ προκύπτει ότι $EM // H\Gamma$.

γ) Είναι $\mathrm{EM}=\dfrac{\mathrm{H\Gamma}}{2}=\dfrac{\mathrm{A\Gamma}-\mathrm{AH}}{2}=\dfrac{\mathrm{A\Gamma}-\mathrm{AB}}{2}$, διότι $AH=AB$, αφού το τρίγωνο ΑΒΗ είναι ισοσκελές από το πρώτο ερώτημα.

ΘΕΜΑ 3696

Δίνεται οξεία γωνία $x\hat{O}y$ και δύο ομόκεντροι κύκλοι (O,ρ_1) και (O,ρ_2) με $\rho_1<\rho_2$, που τέμνουν την Οx στα σημεία K, A και την Οy στα Λ, B αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) $A\Lambda = BK$. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο $\triangle APB$ είναι ισοσκελές, όπου P το σημείο τομής των $A\Lambda$ και ΒΚ.

(Μονάδες 8)

γ) Η ΟΡ διχοτομεί την γωνία $x\hat{O}y$. (Μονάδες 9)

Λύση:

α) Συγκρίνω τα τρίγωνα $O\overset{\triangle}{K}B$ και $O\overset{\triangle}{A}\Lambda$. Έχουν: $\left.\begin{array}{r} OK=O\Lambda=\rho_1 \\ OB=OA=\rho_2 \\ \hat{O}=\hat{O} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle OKB = \triangle OA\Lambda$

(Π-Γ-Π). Άρα, $A\Lambda=BK$ και $\sigma_1=\sigma_2$ (1).

β) Συγκρίνω τα τρίγωνα $\triangle KAP$ και $\triangle PB\Lambda$. Έχουν:

$$\left.\begin{array}{r} AK=B\Lambda=\rho_2-\rho_1 \\ \sigma_1=\sigma_2 \\ K_1=\Lambda_1(*) \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle KAP = \triangle PB\Lambda \ (\Gamma\text{-}\Pi\text{-}\Gamma).$$

(*) ισχύει λόγω (1), $P_1=P_2$ (κατακορυφήν) και άθροισμα γωνιών τριγώνου 180^o.

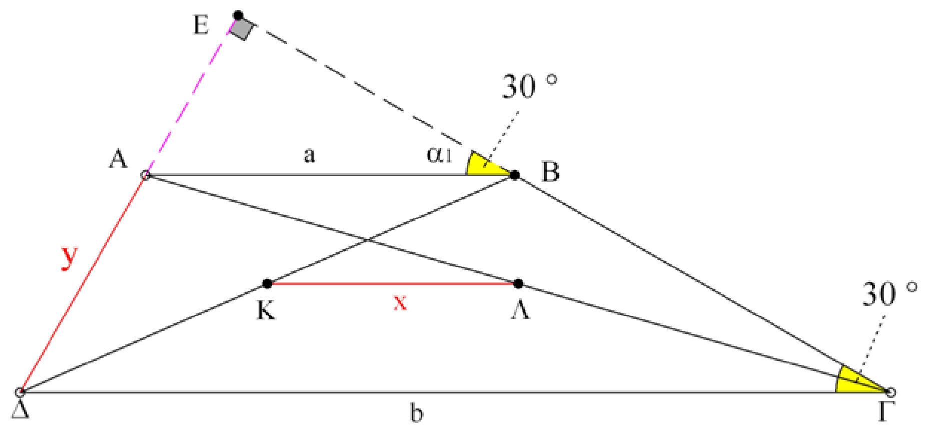
Άρα $PA=PB$ (2), δηλ. $\triangle PAB$ ισοσκελές.

γ) Συγκρίνω τα τρίγωνα $_{\triangle}OAP$ και $_{\triangle}OBP$. Έχουν: $\left.\begin{array}{r} OB = OA = \rho_2 \\ PA = PB(2) \\ \mathrm{OP} = OP \end{array}\right\} \Rightarrow {}_{\triangle}OAP = {}_{\triangle}OBP$

(Π-Π-Π). Άρα, $\varphi_1 = \varphi_2$ δηλ. ΟΡ διχοτόμος $x\hat{O}y$.

ΘΕΜΑ 3708

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με τη γωνία $\hat{\Gamma}$ ίση με 30^o και έστω Κ, Λ τα μέσα των διαγωνίων του. Οι μη παράλληλες πλευρές του ΔΑ και ΓΒ



προεκτεινόμενες τέμνονται κάθετα στο σημείο Ε.
Να αποδείξετε ότι:
α) $\mathrm{AB} = 2\mathrm{AE}$ (Μονάδες 10)
β) $\mathrm{K\Lambda} = \mathrm{A\Delta}$ (Μονάδες 10)
γ) Σε ποια περίπτωση το ΑΒΛΚ είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας. (Μονάδες 5)

Λύση:

Επειδή ΑΒ//ΓΔ θα είναι $\alpha_1 = \hat{\Gamma} = 30^0$.

Ας πούμε $\mathrm{AB} = a, \Gamma\Delta = b, \mathrm{K\Lambda} = x, \mathrm{A\Delta} = y \; \kappa\alpha\iota \; \mathrm{AE} = u$.

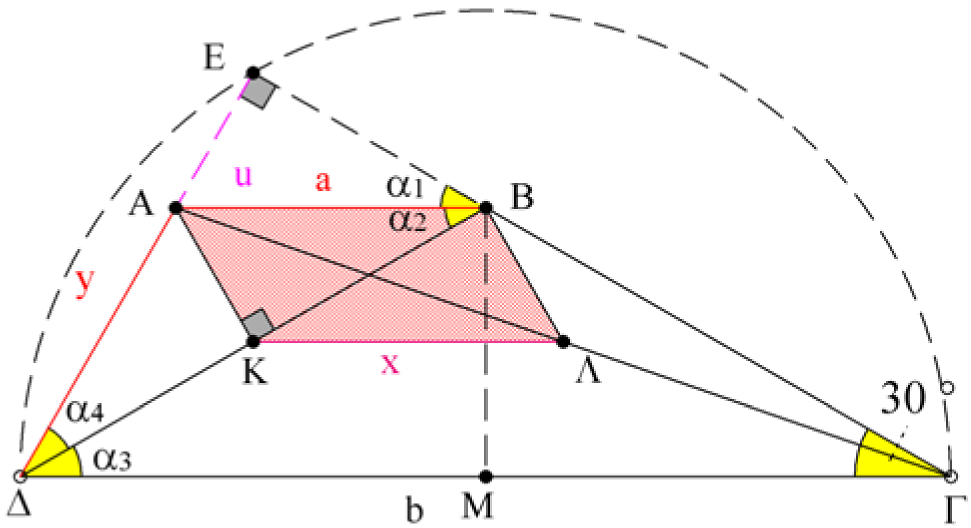
α) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΕΑΒ επειδή η κάθετη πλευρά ΑΕ βρίσκεται απέναντι των 30^0 θα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας , δηλαδή $\mathrm{AB} = 2\mathrm{AE}$ ή $a = 2u$ (1).

β) Με όμοιο τρόπο από το ορθογώνιο τρίγωνο $Ε\Delta\Gamma$ προκύπτει : $\Delta\Gamma = 2ΑΕ$ ή $b = 2(y+u) \quad (2)$.

Από τις (1) και (2) έχουμε : $\Delta\Gamma - ΑΒ = b - a = 2(y+u) - 2u = 2y \quad (3)$.

Όμως για το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των διαγώνιων τραπεζίου ξέρουμε ότι είναι παράλληλο στις βάσεις και ισούται με την (θετική) ημιδιαφορά τους.

Δηλαδή και λόγω της (3), $Κ\Lambda = x = \frac{b-a}{2} = \frac{2y}{2} = y = Α\Delta$.



γ) Το $ΑΒ\LambdaΚ$ είναι παραλληλόγραμμο όταν $a = y$ δηλαδή όταν $ΑΒ = Α\Delta$.

εναλλακτικά :

Έστω τώρα ότι το $ΑΒ\LambdaΚ$ είναι παραλληλόγραμμο . Τότε $ΑΒ = // Κ\Lambda$ και άρα $a = x \Rightarrow a = y$ (λόγω του β ερωτήματος) . Μα τότε το τρίγωνο $Α\DeltaΒ$ θα είναι ισοσκελές με κορυφή το Α και άρα $\alpha_2 = \alpha_4$. Όμως $\alpha_2 = \alpha_3$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $ΑΒ \, και \, \Delta\Gamma$ που τέμνονται από την $\DeltaΒ$. Έτσι και λόγω μεταβατικότητας $\alpha_3 = \alpha_4$. Δηλαδή η $\DeltaΒ$ διχοτόμος της γωνίας των 60^0 του ορθογωνίου τριγώνου $Ε\Delta\Gamma$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

Κάποιες παρατηρήσεις που προφανώς δεν υποχρεούται ο μαθητής να τις γράψει .Η όλη κατασκευή του σχήματος ακολουθεί την παρακάτω πορεία .

Με διάμετρο ευθύγραμμο τμήμα $\Delta\Gamma$ *γράφουμε ημικύκλιο . Ο κύκλος κέντρου* Δ *και ακτίνας* $\Delta\Gamma$ *τέμνει το ημικύκλιο στο* E. *Από τυχαίο σημείο* B *του* $\mathrm{E}\Gamma$ *φέρνουμε παράλληλη στην* $\Delta\Gamma$ *και τέμνει την* $\mathrm{E}\Delta$ *στο* A.

Στην περίπτωση που το $\mathrm{AB\Lambda K}$ *είναι παραλληλόγραμμο το σημείο* B *επιλέγεται ως τομή της* $\mathrm{E}\Gamma$ *με τη μεσοκάθετο του* $\mathrm{B}\Gamma$.

ΘΕΜΑ 3709

Δίνεται τραπέζιο ABCD με $\mathrm{AB}//\mathrm{CD}$ και $\hat{\mathrm{C}}=30^{\circ}$. Αν K,L τα μέσα των διαγωνίων BD,AC αντίστοιχα και αν οι πλευρές DA,CB προεκτεινόμενες τέμνονται κάθετα στο E να αποδειχθεί ότι:

i) $\mathrm{AB}=2\mathrm{AE}$.

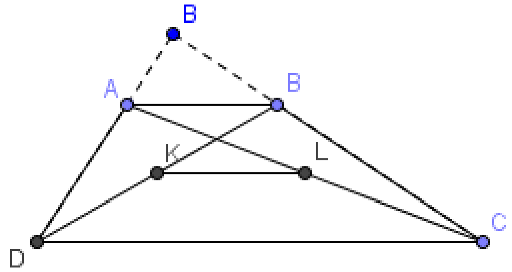
ii) $\mathrm{KL}=\mathrm{AD}$.

iii) Σε ποια περίπτωση το τετράπλευρο $ABKL$ είναι παραλληλόγραμμο; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση:

i) $DCB=ABE=30^{\circ}$ ως εντός εναλλάξ. Επομένως στο ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle ABE$ η πλευρά AE βρίσκεται απέναντι από γωνία 30° κι έτσι είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας που είναι η AB.

Τελικά $AE=\dfrac{AB}{2}\Leftrightarrow AB=2AE$.



ii) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle CDE$ η πλευρά DE βρίσκεται απέναντι από γωνία 30° άρα $DE=\dfrac{CD}{2}$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

Ως γνωστόν το τμήμα που συνδέει τα μέσα των διαγωνίων τραπεζίου ισούται με την ημιδιαφορά των βάσεων δηλαδή

$KL = \frac{CD-AB}{2} = \frac{CD}{2} - \frac{AB}{2} \overset{i)}{=} DE - AE = AD$ όπως θέλαμε.

iii) Η KL γνωρίζουμε ότι είναι παράλληλη στην AB θα πρέπει όμως να είναι και ίση με αυτήν δηλαδή $KL = AB \overset{ii)}{\Leftrightarrow} AD = AB$.

Αυτό δηλαδή συμβαίνει όταν $AD = AB$.

ΘΕΜΑ 3762

Δίδεται τετράγωνο $ΑΒΓΔ$. Έστω $Ε$ το συμμετρικό του $Β$ ως προς το $Δ$ και $Ζ$ είναι το μέσο της $ΑΔ$. Να αποδείξετε ότι :

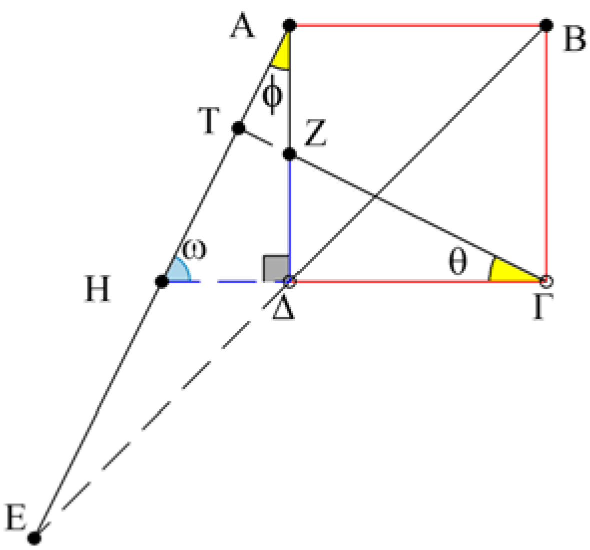
α) $ΔΗ = \frac{ΑΒ}{2}$. (Μονάδες 8)

β) τα τρίγωνα $ΑΔΗ$ και $ΖΔΓ$ είναι ίσα. (Μονάδες 9)

γ) Η $ΓΖ$ είναι κάθετη στην $ΑΕ$. (Μονάδες 8)

Λύση:

α) Οι ευθείες $ΗΔ$ και $ΑΒ$ είναι παράλληλες ως κάθετες στην ευθεία $ΑΔ$ και αφού στο τρίγωνο $ΕΒΑ$ το σημείο $Δ$ είναι μέσο της πλευράς $ΕΒ$ κι αυτό λόγω συμμετρίας των $Β, Ε$ ως προς το $Δ$, θα είναι και το $Η$ μέσο της πλευράς $ΕΑ$. Άμεση συνέπεια $ΗΔ // = \frac{ΑΒ}{2}$ (1).



β) Επειδή και $ΔΖ = \frac{ΑΔ}{2} = \frac{ΑΒ}{2}$ λόγω της (1) θα είναι : $ΔΗ = ΔΖ$ (2). Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΔΑΗ$ και $ΔΓΖ$ έχουν : $ΔΑ = ΔΓ$ ως πλευρές του τετραγώνου και λόγω της (2) $\Delta H = \Delta Z$. Δηλαδή τις κάθετες πλευρές τους ίσες άρα θα είναι ίσα .

γ) Επειδή τώρα τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta AH\, \kappa\alpha\iota\, \Delta\Gamma Z$ είναι ίσα θα έχουν και όλα τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ένα προς ένα ίσα και άρα $\hat{\phi} = \hat{\theta}$ (3).

Όμως στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔAH οι οξείες του γωνίες έχουν άθροισμα 90^0, δηλαδή $\hat{\omega} + \hat{\phi} = 90^0$, οπότε λόγω της (3) έχουμε : $\hat{\omega} + \hat{\theta} = 90^0$ (4).

Αν τώρα πούμε Τ το σημείο τομής της ΓZ με την AE στο τρίγωνο $TH\Gamma$ το άθροισμα δύο γωνιών του είναι λόγω της (4) 90^0 και άρα η γωνία του $HT\Gamma = 90^0$ και έτσι $\Gamma Z \perp AE$.

ΘΕΜΑ 3817

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και στο εξωτερικό του σχηματίζονται τα τετράγωνα $AB\Delta E$ και $A\Gamma ZH$. Να αποδείξετε ότι:

α) $EAH = AB\Gamma + A\Gamma B$.

β) $E\Gamma = BH$.

γ) Η $E\Gamma$ είναι κάθετη στην BH.

Λύση:

α) Έχουμε: $EAH = 360^o - (90^o + 90^o + \hat{A}) = 180^o - \hat{A} = \hat{B} + \hat{\Gamma}$

β) Τα τρίγωνα $EA\Gamma$ και HAB έχουν:

$AB = AE$, ως πλευρές τετραγώνου

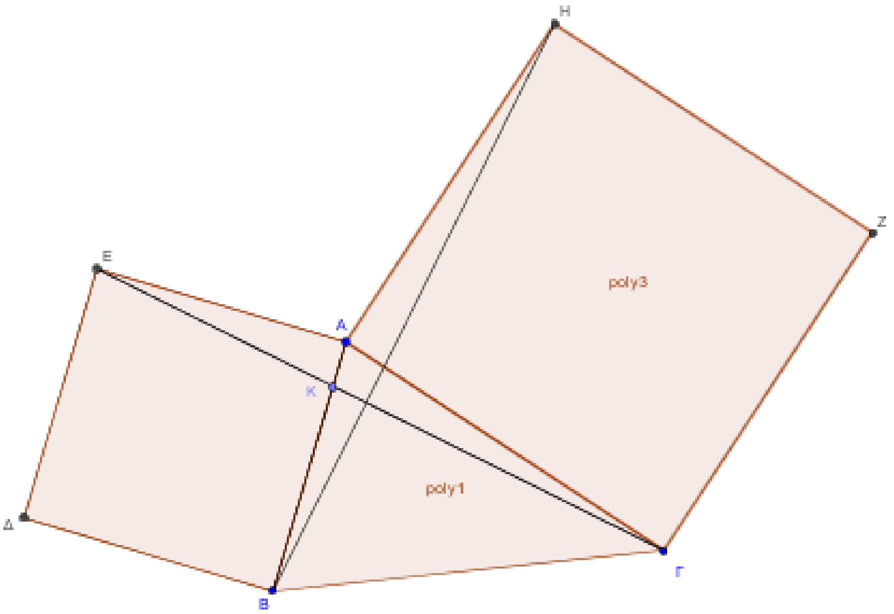
$AH = A\Gamma$, επίσης ως πλευρές τετραγώνου

$EA\Gamma = HAB = 90^o + \hat{A}$

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα. Άρα θα έχουν και $E\Gamma = BH$

γ) Από το ορθογώνιο τρίγωνο AEK έχουμε : $AEK + EKA = 90^o$, (1)

Όμως $AEK = ABH$, (λόγω της ισότητας των τριγώνων του (β) ερωτήματος) και $EKA = BK\Gamma$, (ως κατακορυφήν).
Άρα η σχέση (1) γράφεται:



$ABH + BK\Gamma = 90^o$ και άρα η $E\Gamma$ είναι κάθετη στην BH .

ΘΕΜΑ 3820

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με την γωνία A ορθή και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AB. Έστω K, M, N τα μέσα των $\Gamma\Delta, B\Gamma, B\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $KMN\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Το τετράπλευρο $AKMN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ) Η διάμεσος του τραπεζίου $AKMN$ είναι ίση με $\dfrac{AB}{2}$.

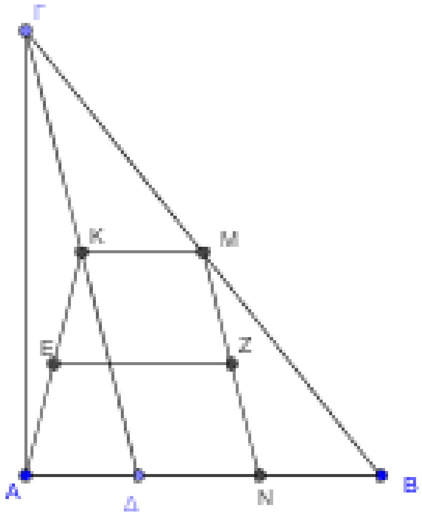
Λύση:

α) Στο τρίγωνο $\Gamma\Delta B$ η KM ενώνει τα μέσα των πλευρών $\Gamma\Delta$ και ΓB. Άρα $KM // \Delta B$.

Επίσης στο ίδιο τρίγωνο, η MN ενώνει τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και $B\Delta$ και άρα $MN//\Gamma\Delta$.

Συνεπώς το τετράπλευρο $KMN\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο διότι έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

β) Δείξαμε από το (α) ερώτημα, ότι $KM//AN$. Για να δείξουμε ότι το τετράπλευρο $KMNA$ είναι τραπέζιο, αρκεί να δείξουμε ότι οι πλευρές AK και MN δεν είναι παράλληλες. Πράγματι αν ήταν $AK//MN$, τότε από το σημείο K θα είχαμε δύο παράλληλες προς την MN, μία την KA και την άλλη την $K\Delta$ (λόγω του παραλληλογράμμου $\mathrm{KMN\Delta}$). Τούτο όμως αντίκειται στο Ευκλείδειο αίτημα.



Δείξαμε λοιπόν ότι το τετράπλευρο KMNA είναι τραπέζιο. Επίσης έχουμε:

$MN = K\Delta$ (ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου) και $\mathrm{AK} = \dfrac{\Gamma\Delta}{2}$,(διότι η ΑΚ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα του ορθ. τριγώνου $\mathrm{A\Gamma\Delta}$). Άρα $\mathrm{AK} = \mathrm{K\Delta}$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $AK = MN$ και άρα το τραπέζιο KMNA είναι ισοσκελές.

γ) Για την διάμεσο του πιο πάνω τραπεζίου έχουμε:

$$EZ = \frac{KM + AN}{2} = \frac{\frac{\Delta B}{2} + A\Delta + \Delta N}{2} = \frac{NB + A\Delta + \Delta N}{2} = \frac{AB}{2}.$$

ΘΕΜΑ 3822

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με τη γωνία του B να είναι ίση με 70^0 και το ύψος του AE. Έστω Z σημείο της $B\Gamma$ ώστε $BE = EZ$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AZ\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

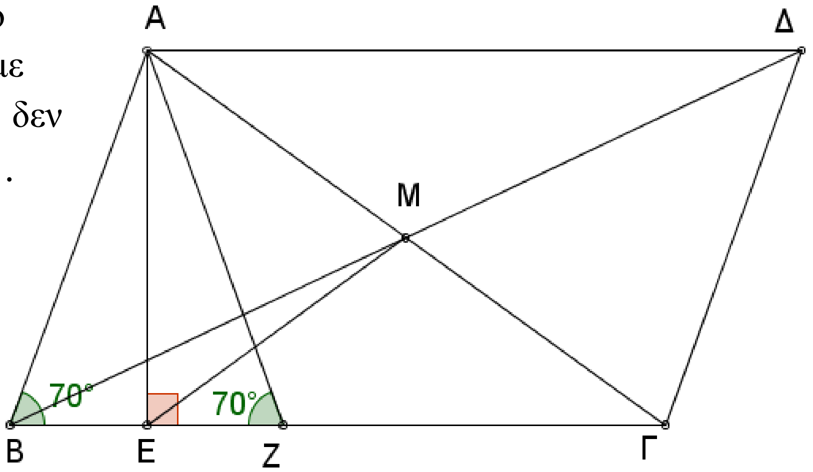
(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου $AZ\Gamma\Delta$. (Μονάδες 9)

γ) Αν M το μέσο του $B\Delta$ να αποδείξετε ότι $\mathrm{EM}=\frac{\mathrm{A\Gamma}}{2}$. (Μονάδες 8)

Λύση:

α) Η AE είναι μεσοκάθετος του BZ, άρα το τρίγωνο ABZ είναι ισοσκελές $AB=AZ$). Αλλά $AB=\Gamma\Delta$, από το παραλληλόγραμμο. Οπότε έχουμε $AZ=\Gamma\Delta$, $Z\Gamma \parallel A\Delta$, ενώ οι $AZ,\Gamma\Delta$ δεν είναι παράλληλες, αφού $AB \parallel \Gamma\Delta$. Άρα το $AZ\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



β) Είναι $\mathrm{B}=\mathrm{AZB}=70^0 \Leftrightarrow \mathrm{AZ\Gamma}=110^0$.

Εξάλλου από το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\mathrm{B}=\hat{\Delta}=70^0$.

Επομένως οι γωνίες του ισοσκελούς τραπεζίου είναι: $\hat{\Delta}=\mathrm{ZA\Delta}=70^0$, $\mathrm{AZ\Gamma}=\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{Z}=110^0$.

γ) Το M είναι και μέσο της $A\Gamma$, αφού οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται. Άρα η EM είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου $AE\Gamma$, οπότε: $\mathrm{EM}=\frac{\mathrm{A\Gamma}}{2}$.

ΘΕΜΑ 3824

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A}=90^o$ και $\hat{\Gamma}=30^o$. Φέρνουμε το ύψος του $A\Delta$ και την διάμεσό του AM. Από το Γ φέρνουμε κάθετη στην ευθεία AM , η οποία την τέμνει στο E. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο AMB είναι ισόπλευρο.

β) $ME=M\Delta=\frac{B\Gamma}{4}$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

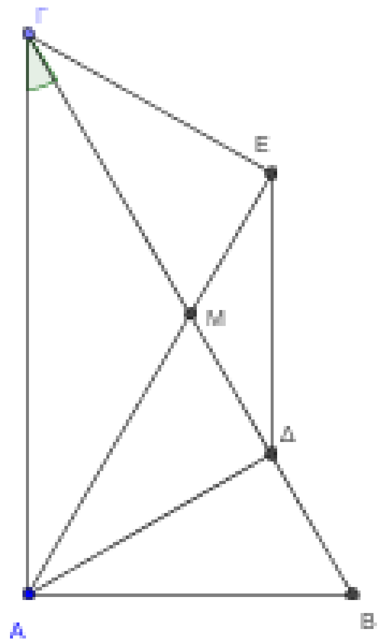
γ) Το $A\Delta E\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση:

α) Αφού $\hat{\Gamma}=30^o$, άρα $AB=\dfrac{B\Gamma}{2}=BM$. Επίσης αφού η AM είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, έπεται ότι $AM=\dfrac{B\Gamma}{2}=BM$. Άρα $AB=AM=BM$ και άρα το τρίγωνο AMB είναι ισόπλευρο.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta M$ και $M\Gamma E$ έχουν: $AM=M\Gamma$ (διότι $AM=\dfrac{B\Gamma}{2}$) και $AM\Delta=\Gamma ME$, ως κατακορυφήν) . Άρα τα εν λόγω τρίγωνα είναι ίσα και άρα θα έχουν και $ME=M\Delta$. Όμως αφού το τρίγωνο ABM είναι ισόπλευρο, το ύψος του $A\Delta$ θα είναι και διάμεσος. Άρα $M\Delta=\dfrac{MB}{2}=\dfrac{\frac{B\Gamma}{2}}{2}=\dfrac{B\Gamma}{4}$.

γ) Αφού $\hat{\Gamma}=30^o \Rightarrow \Gamma AM=30^o$, (εφόσον το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισοσκελές). Άρα $\Gamma MA=120^o \Rightarrow EM\Delta=120^o$, (ως κατακορυφήν). Όμως $ME=M\Delta$ (από την ισότητα των πιο πάνω τριγώνων). Άρα $ME\Delta=M\Delta E=30^o$.



Αφού λοιπόν $\Gamma AE=\Delta EA(=30^o)$, θα είναι $E\Delta//\Gamma A$. Θα δείξουμε τώρα ότι οι ευθείες ΓE και $A\Delta$ δεν είναι παράλληλες. Έχουμε: $\Delta AM=30^o$, (διότι αφού η $A\Delta$ είναι ύψος στο ισόπλευρο τρίγωνο AMB, θα είναι και διχοτόμος.)

Επίσης $E\Gamma M=30^o$ (αφού $E\Gamma M=MA\Delta$ λόγω της ισότητας των τριγώνων $E\Gamma M$ και ΔAM. Έχουμε λοιπόν: $E\Gamma A+\Delta A\Gamma=E\Gamma M+M\Gamma A+\Delta AM+MA\Gamma=$

$=30^o+30^o+30^o+30^o=120^o<180^o$. Άρα οι ευθείες ΓE και $A\Delta$ δεν είναι παράλληλες και άρα το $A\Delta E\Gamma$ είναι τραπέζιο.

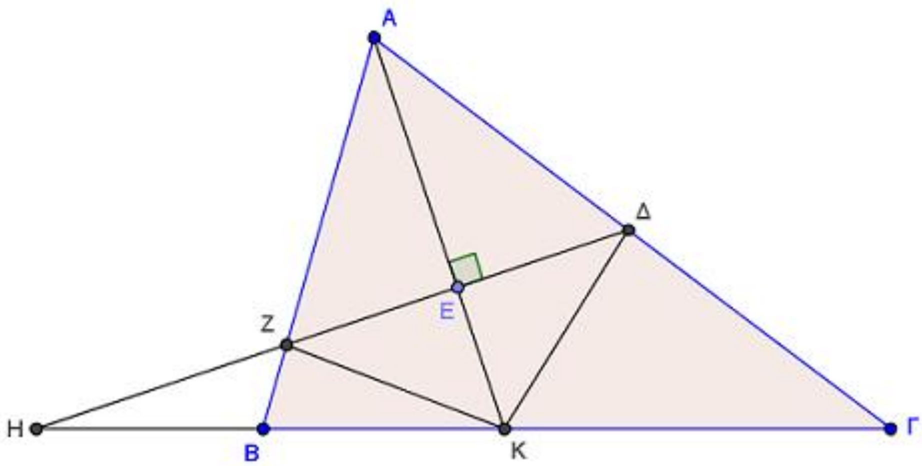
Επίσης από την ισότητα των τριγώνων ΓEM και $MA\Delta$ έπεται ότι $\Gamma E = A\Delta$. Άρα το τραπέζιο $A\Delta E\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Στο (γ) ερώτημα, μπορούμε και αλλιώς να δείξουμε ότι οι ευθείες ΓE και $A\Delta$ δεν είναι παράλληλες, ως εξής:

Αν ήταν $\Gamma E // A\Delta$ τότε οι γωνίες $\Gamma\hat{E}A$ και $E\hat{A}\Delta E A\Delta$ θα ήταν ίσες , δηλαδή $90^o = 30^o$, που είναι άτοπο.

ΘΕΜΑ 3825

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Φέρουμε τη διχοτόμο του AK και σε τυχαίο σημείο της E φέρουμε ευθεία κάθετη στη διχοτόμο AK, η οποία τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία Z και Δ αντίστοιχα και την προέκταση της ΓB στο σημείο H. Να αποδείξετε ότι:



α) $Z\Delta\Gamma = 90^\circ + \frac{A}{2}$.

β) $ZK = K\Delta$.

γ) $ZH\Gamma = \frac{B - \hat{\Gamma}}{2}$.

Λύση:

α) Η $Z\Delta\Gamma$ είναι εξωτερική του τριγώνου $AE\Delta$, έτσι είναι:

$$Z\Delta\Gamma = 90^\circ + \Delta AE \Leftrightarrow Z\Delta\Gamma = 90^\circ + \frac{A}{2}.$$

β) Το τρίγωνο $A\Delta Z$ είναι ισοσκελές αφού η AE είναι διχοτόμος και ύψος, έτσι $AZ = A\Delta \quad (1)$.

Τα τρίγωνα AZK και $A\Delta K$ είναι είσαι αφού έχουν: $AZ = A\Delta$ από την (1), AK κοινή πλευρά και $ZAE = \Delta AE = \frac{A}{2}$, άρα και $ZK = K\Delta$.

γ) Από το τρίγωνο $\Gamma H\Delta$ είναι: $ZH\Gamma = 180^\circ - Z\Delta\Gamma - \hat{\Gamma} \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$

$$ZH\Gamma = 180^\circ - 90^\circ - \frac{A}{2} - \hat{\Gamma} \Leftrightarrow ZH\Gamma = 90^\circ - \frac{180^\circ - B - \hat{\Gamma}}{2} - \hat{\Gamma} \Leftrightarrow ZH\Gamma = \frac{B - \hat{\Gamma}}{2}.$$

ΘΕΜΑ 3903

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = A\Delta$ και $\Gamma B = \Gamma\Delta$. Αν E είναι το σημείο τομής των προεκτάσεων των BA και $\Gamma\Delta$ και Z είναι το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΔA και ΓB να αποδείξετε ότι:

α) Η ΓA είναι διχοτόμος της γωνίας $B\Gamma\Delta$. (Μονάδες 7)

β) $\Gamma Z = \Gamma E$. (Μονάδες 9)

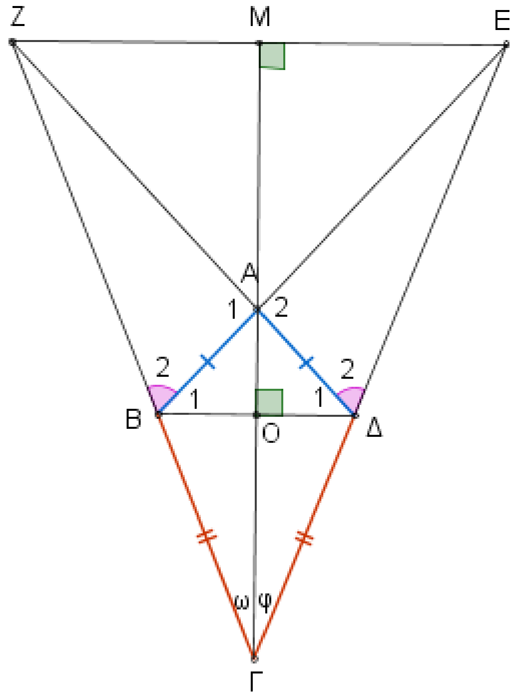
γ) $EZ \parallel B\Delta$. (Μονάδες 9)

Λύση:

α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $A\Delta\Gamma$ είναι ίσα επειδή έχουν την $A\Gamma$ κοινή και $AB = A\Delta$, $\Gamma B = \Gamma\Delta$ από την υπόθεση (Π-Π-Π). Οπότε θα είναι $\omega = \varphi$, δηλαδή η ΓA είναι διχοτόμος της γωνίας $B\Gamma\Delta$.

β) $A_1 = A_2$ (ως κατακορυφήν).

$B_2 = \hat{\Delta}_2$ (ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $A\hat{B}\Gamma, A\hat{\Delta}\Gamma$ οποίες είναι ίσες από την ισότητα των τριγώνων $AB\Gamma, A\Delta\Gamma$).



Άρα τα τρίγωνα $ABZ, A\Delta E$ είναι ίσα (Γ-Π-Γ). Οπότε $BZ = \Delta E$ και κατά συνέπεια, $\Gamma Z = \Gamma E$.

γ) Στα ισοσκελή τρίγωνα $\Gamma B\Delta, \Gamma ZE$

η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ θα είναι

μεσοκάθετη στις βάσεις.

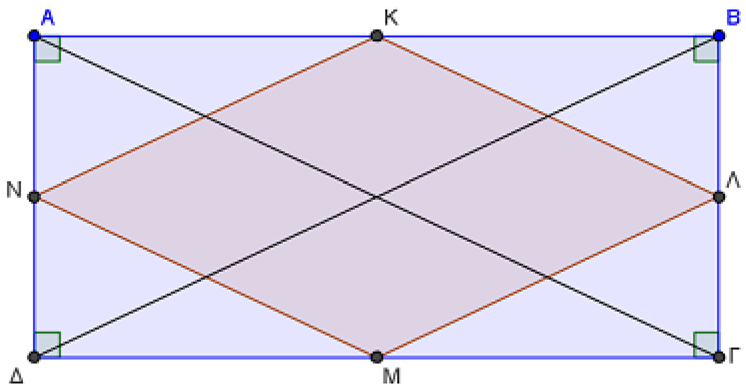
Άρα $B\Delta \parallel ZE$,

ως κάθετες στην ίδια ευθεία.

ΘΕΜΑ 3904

α) Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ θεωρούμε $\mathrm{K}, \Lambda, \mathrm{M}, \mathrm{N}$ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ρόμβος.

β) Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ τα μέσα $\mathrm{K}, \Lambda, \mathrm{M}, \mathrm{N}$ των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου.



Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ, πρέπει να είναι απαραίτητα ορθογώνιο; Να τεκμηριώσετε τη θετική ή αρνητική σας απάντηση.

Λύση:

α) Το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο αφού ενώνει τα μέσα των πλευρών του ορθογωνίου ΑΒΓΔ (από εφαρμογή 1 σελ. 106).

Είναι $KN=\frac{B\Delta}{2}$ και $K\Lambda=\frac{A\Gamma}{2}$ αφού τα τμήματα $KN, K\Lambda$ ενώνουν τα μέσα δύο πλευρών των τριγώνων $AB\Delta$ και $AB\Gamma$ αντίστοιχα. Όμως $B\Delta=A\Gamma$ ως διαγώνιοι ορθογωνίου, έτσι και $KN=K\Lambda$. Άρα το $K\Lambda MN$ είναι ρόμβος αφού είναι παραλληλόγραμμο με δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

β) Αν το $K\Lambda MN$ είναι ρόμβος τότε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ **δεν** είναι απαραίτητα ορθογώνιο αφού αρκεί οι διαγώνιοι του να είναι ίσοι ώστε να συμβαίνουν όλα τα παραπάνω.

ΘΕΜΑ 3906

Εκτός τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε τετράγωνα $AB\Delta E, A\Gamma ZH$. Αν M το μέσο του $B\Gamma$ και Λ σημείο στην προέκταση της AM τέτοιο, ώστε $AM=M\Lambda$, να αποδείξετε ότι:

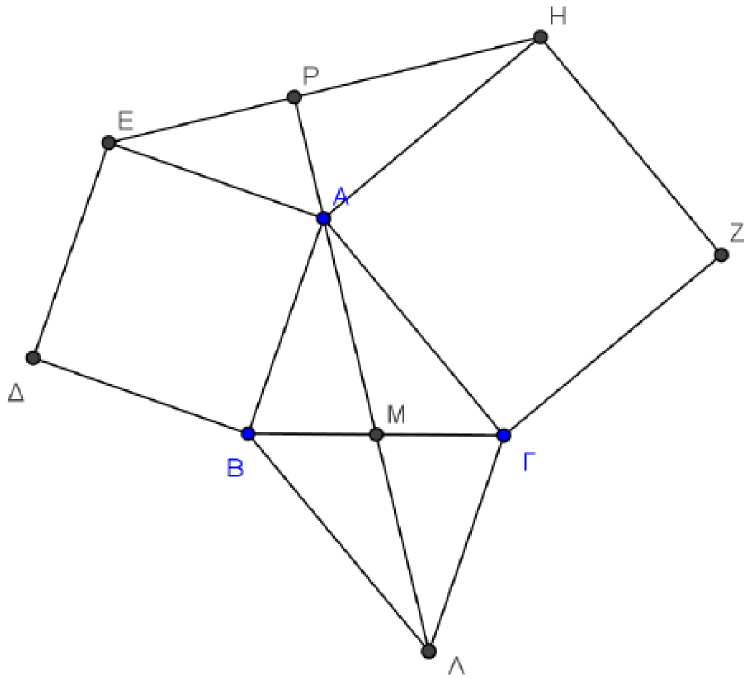
α) $\Gamma\Lambda=AE$. (Μονάδες 10)

β) Οι γωνίες $A\Gamma\Lambda, EAH$ είναι ίσες.

(Μονάδες 10)

γ) Η προέκταση της MA (προς το A) τέμνει κάθετα την EH.

(Μονάδες 5)



Λύση:

α) Το $AB\Lambda\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο, διότι οι διαγώνιες $A\Lambda, B\Gamma$ διχοτομούνται. Επομένως $\Gamma\Lambda=AB=AE$.

β) Οι γωνίες $A\hat{\Gamma}\Lambda, E\hat{A}H$ είναι ίσες, διότι είναι παραπληρωματικές της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$.

γ) Τα τρίγωνα $ΓΑΛ, ΑΕΗ$ είναι ίσα, διότι $ΓΑ = ΑΗ, ΓΛ = ΑΕ, Α\hat{Γ}Λ = Ε\hat{Α}Η$.

Επομένως : $Ρ\hat{Α}Ε + Ρ\hat{Ε}Α = Ρ\hat{Α}Ε + Α\hat{Λ}Γ = Ρ\hat{Α}Ε + Β\hat{Α}Λ = 90^0$, διότι $Ε\hat{Α}Β = 90^0$.

ΘΕΜΑ 3908

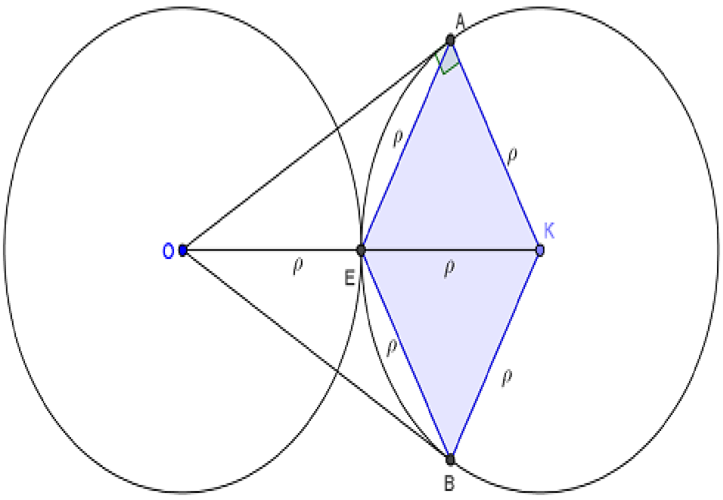
Δυο ίσοι κύκλοι $(Ο, \rho)$ και $(Κ, \rho)$ εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο $Ε$. Αν $ΟΑ$ και $ΟΒ$ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο $Ο$ στον κύκλο $(Κ, \rho)$ να αποδείξετε ότι:

α) $ΑΕ = ΒΕ$.

β) $ΑΟΚ = 30^\circ$.

γ) Το τετράπλευρο $ΑΚΒΕ$ είναι ρόμβος.

Λύση:



α) Τα τρίγωνα $ΑΟΚ$ και $ΒΟΚ$ είναι ίσα αφού έχουν:

$ΟΚ$ κοινή πλευρά, $ΚΑ = ΚΒ = \rho$ και $ΟΑ = ΟΒ$ ως εφαπτόμενα τμήματα.

Έτσι $ΑΟΚ = ΒΟΚ \; (1)$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

Τα τρίγωνα AOE και BOE είναι ίσα αφού έχουν:

OE κοινή πλευρά, $AOK = BOK$ από (1) και $OA = OB$ ως εφαπτόμενα τμήματα.

Άρα και $AE = BE$.

β) Είναι $KA \perp OA$ (ακτίνα στο σημείο επαφής), $AK = \rho$ και $OK = 2\rho$.

Άρα $AOK = 30^{\circ}$ διότι στο ορθ. τρίγωνο AOK η μία κάθετη πλευρά (AK) είναι το μισό της υποτείνουσας (OK) .

γ) Είναι $AE = \frac{OK}{2} \Leftrightarrow AE = \rho$ αφού η AE είναι διάμεσος στην υποτείνουσα του ορθ. τριγώνου AOK. Ομοίως είναι και $BE = AE = \rho$.

Άρα $AE = BE = BK = KA = \rho$ δηλαδή το τετράπλευρο $AKBE$ είναι ρόμβος αφού έχει όλες τις πλευρές του ίσες.

ΘΕΜΑ 3911

α) Σε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε K, Λ, M, N τα μέσα των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Lambda MN$ είναι ρόμβος.

β) Σε ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ τα μέσα K, Λ, M, N των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου.

Για να σχηματίζεται ρόμβος το $AB\Gamma\Delta$, πρέπει να είναι ισοσκελές τραπέζιο; Να τεκμηριώσετε τη θετική ή αρνητική σας απάντηση.

Λύση:

Η άσκηση είναι παρόμοια με την 3904 .

Τα πρώτα ερωτήματα στηρίζονται στο γεγονός ότι οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες, όπως και οι διαγώνιοι του ισοσκελούς τραπεζίου.

Στο β) ερώτημα, ακριβώς ίδια αντιμετώπιση όπως και στο 3904.

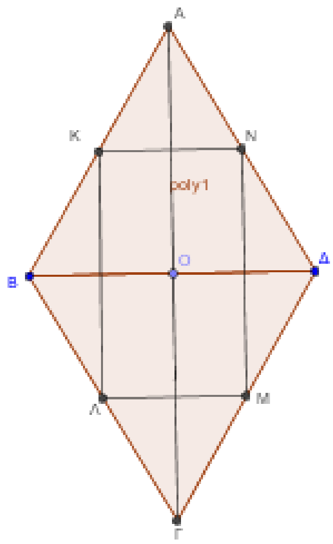
ΘΕΜΑ 3915

α) Σε ρόμβο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε K,Λ,M,N τα μέσα των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Lambda MN$ είναι ορθογώνιο.

β) Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός ορθογωνίου είναι κορυφές ρόμβου.

Λύση:

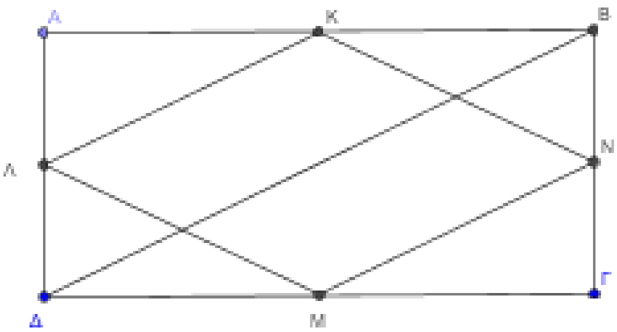
α) Η KN ενώνει τα μέσα των πλευρών AB και $A\Delta$ του τριγώνου $AB\Delta$. Άρα $KN // = \frac{B\Delta}{2}$. Ομοίως έχουμε ότι: $\Lambda M // = \frac{B\Delta}{2}$.



Άρα συμπεραίνουμε ότι $KN // = \Lambda M$ και άρα το τετράπλευρο $K\Lambda MN$ είναι παραλληλόγραμμο.

Επίσης αφού είναι $KN // B\Delta$ και $K\Lambda // A\Gamma$, (διότι η $K\Lambda$ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $AB\Gamma$), και αφού $AOB = 90^o$ (διότι οι διαγώνιοι ρόμβου τέμνονται καθέτως), τότε θα είναι και $NK\Lambda = 90^o$, εφόσον οι γωνίες AOB και $NK\Lambda$ έχουν τις πλευρές τους παράλληλες μία προς μία. Δείξαμε λοιπόν ότι το παραλληλόγραμμο $K\Lambda MN$ έχει μία γωνία ορθή , άρα είναι ορθογώνιο.

β) Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Lambda K$ και BKN, τα οποία έχουν: $AK = KB$ (διότι το K είναι μέσον του AB) και $A\Lambda = BN$ (ως μισά των ίσων τμημάτων $A\Delta$ και $B\Gamma$). Άρα τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα και άρα θα έχουν και $K\Lambda = KN$. Όμως



επί πλέον το τετράπλευρο ΛKNM είναι παραλληλόγραμμο (διότι: $K\Lambda // = \frac{B\Delta}{2}$, (αφού ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου $AB\Delta$) και $MN // = \frac{B\Delta}{2}$, (αφού ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου $B\Delta\Gamma$). Δηλαδή είναι $K\Lambda // = MN$. Έτσι , αφού το παραλληλόγραμμο $K\Lambda MN$ έχει δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες, άρα θα είναι ρόμβος.

ΘΕΜΑ 3919

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $A\Delta, BE$ τα ύψη του. Να αποδείξετε ότι:

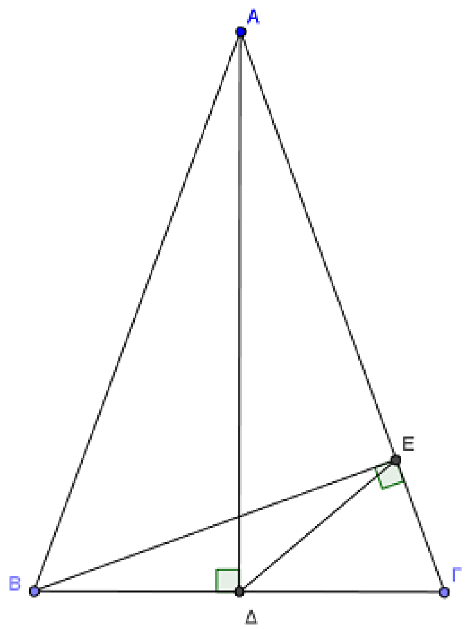
α) $B\Gamma = 2E\Delta$.

β) $BE\Delta = \frac{A}{2}$.

γ) Το τετράπλευρο $AE\Delta B$ είναι εγγράψιμο.

δ) $ABE = A\Delta E$.

Λύση:



α) Το ύψος $A\Delta$ που αντιστοιχεί στη βάση $B\Gamma$ του ισοσκελούς τριγώνου είναι και διάμεσος, δηλαδή το Δ είναι μέσο του $B\Gamma$. Στο ορθ. τρίγωνο $BE\Gamma$ το $E\Delta$ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα $B\Gamma$, έτσι $E\Delta = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 2E\Delta$.

β) Το τετράπλευρο $AE\Delta B$ είναι εγγράψιμο αφού η πλευρά του AB φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Δ, E υπό ορθή γωνία. Άρα

$$BE\Delta = BA\Delta \Leftrightarrow BE\Delta = \frac{A}{2}$$.

(**Σημείωση:** Μάλλον κάτι άλλο είχε στο μυαλό

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

του ο θεματοδότης)

γ) Το τετράπλευρο $ΑΕΔΒ$ είναι εγγράψιμο από το (β) ερώτημα.

δ) Είναι $ΑΒΕ = ΑΔΕ$ αφού το τετράπλευρο $ΑΕΔΒ$ είναι εγγράψιμο.

Νομίζω ότι στο β ερώτημα μπορούμε να πούμε ότι οι γωνίες $E\hat{B}\Delta = \Delta\hat{A}E$ ως οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές και επειδή $Ε\Delta = \Delta B$ θα ισχύει για τις γωνίες $B\hat{E}\Delta = E\hat{B}\Delta$ άρα $B\hat{E}\Delta = \Delta\hat{A}E = \frac{\hat{A}}{2}$.

ΘΕΜΑ 3926

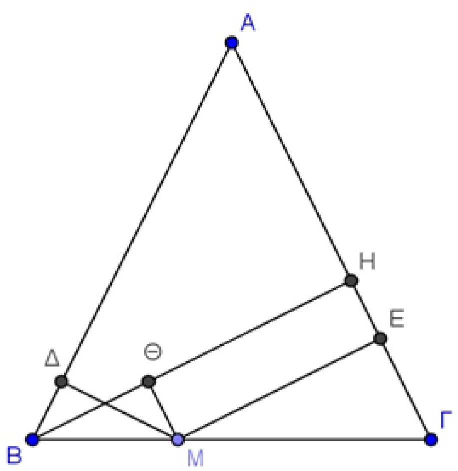
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = ΑΓ$, τυχαίο σημείο $Μ$ της βάσης του $ΒΓ$ και το ύψος του $ΒΗ$. Από το $Μ$ φέρουμε κάθετες $ΜΔ, ΜΕ$ και $ΜΘ$ στις $ΑΒ, ΑΓ$ και $ΒΗ$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $ΜΕΗΘ$ είναι ορθογώνιο.

β) $ΒΘ = ΜΔ$.

γ) Το άθροισμα $ΜΔ + ΜΕ = ΒΗ$.

Λύση:



α) Είναι $\hat{Θ} = Η = Ε = 90^\circ$, δηλαδή το τετράπλευρο $ΜΕΗΘ$ είναι ορθογώνιο αφού έχει τρείς ορθές γωνίες.

β) Είναι $ΜΘ // ΓΗ$ ως κάθετες στη $ΒΗ$, έτσι $ΘΜΒ = \hat{Γ}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά. Τα ορθ. τρίγωνα $ΒΔΜ$ και $ΒΘΜ$ είναι ίσα αφού έχουν $ΒΜ$ κοινή πλευρά και $ΘΜΒ = Β\left(= \hat{Γ}\right)$

$ΒΘ = ΜΔ\,(1)$.

γ) Είναι $\mathrm{ME} = \Theta\mathrm{H}\,(2)$ από το ορθογώνιο $\mathrm{MEH\Theta}$.

$$\mathrm{M\Delta} + \mathrm{ME} \overset{(1),(2)}{=} \mathrm{B\Theta} + \Theta\mathrm{H} \Leftrightarrow \mathrm{M\Delta} + \mathrm{ME} = \mathrm{BH}.$$

ΘΕΜΑ 3932

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και Δ, E, Z τα μέσα των πλευρών του $B\Gamma$, $A\Gamma$, AB αντίστοιχα. Αν η διχοτόμος της γωνίας B τέμνει την ZE στο σημείο M και την προέκταση της ΔE στο σημείο N, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $ZE\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

β) Τα τρίγωνα BZM και MEN είναι ισοσκελή. (Μονάδες 10)

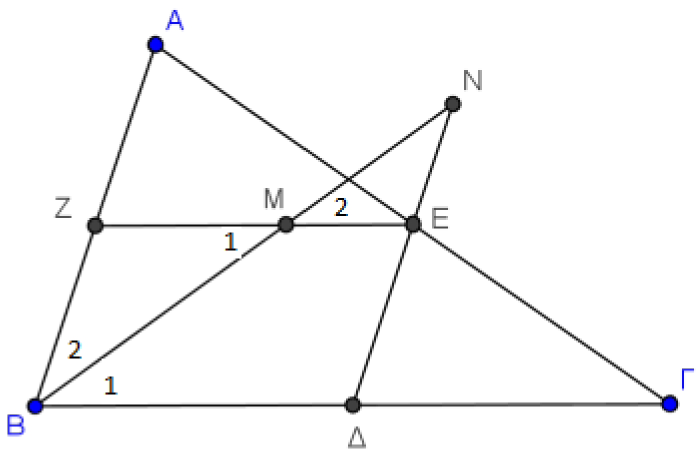
γ) $BZ + \mathrm{NE} = \Delta\Gamma$ (Μονάδες 8)

Λύση:

α) Επειδή στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι Z μέσο της πλευράς AB και E μέσο της πλευράς $A\Gamma$ είναι $ZE // B\Gamma$ και $ZE = \dfrac{B\Gamma}{2} = B\Delta$ αφού Δ μέσο της πλευράς $B\Gamma$.

Επομένως η πλευρά ZE είναι παράλληλη και ίση με την πλευρά $B\Delta$ που σημαίνει ότι το τετράπλευρο $ZE\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο. Επομένως $ZE = B\Delta$ (1)

β) Αφού είναι $ZM // B\Delta$ τότε είναι $\hat{B}_1 = \hat{M}_1$ ως εντός εναλλάξ, και επειδή $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ αφού BM διχοτόμος θα είναι και $\hat{B}_2 = \hat{M}_1$ που σημαίνει ότι το τρίγωνο BZM είναι ισοσκελές. Άρα και $BZ = ZM$ (2). Ομοίως είναι $\hat{B}_2 = \hat{N}$ ως εντός εναλλάξ διότι $AB // N\Delta$ αφού το $ZE\Delta B$ είναι



παραλληλόγραμμο και επειδή $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ και $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ ως κατακορυφήν θα είναι και $\hat{M}_2 = \hat{N}$. Συνεπώς το τρίγωνο MEN είναι ισοσκελές. Επομένως και $ME = EM$ (3).

γ) Με τη βοήθεια των ισοτήτων (2),(3),(1) έχουμε
$BZ+NE=ZM+ME=ZE=B\Delta=\Delta\Gamma$.

ΘΕΜΑ 3938

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, AM διάμεσος του και K το μέσο του AM. Αν η προέκταση της BK τέμνει την $\mathrm{A\Gamma}$ στο σημείο N, και Λ είναι το μέσο του $\mathrm{\Gamma N}$, να αποδείξετε ότι:

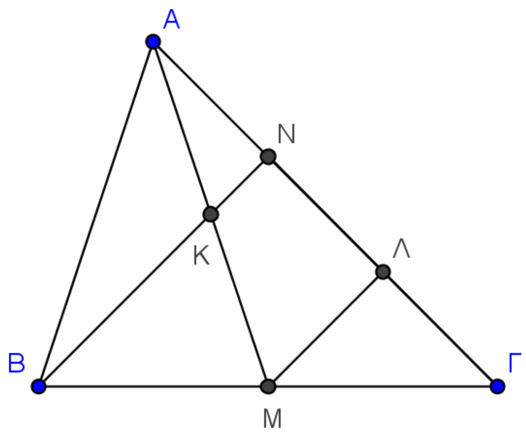
α) Το σημείο N είναι μέσο του $\mathrm{A\Lambda}$. (Μονάδες 9)

β) $\mathrm{K\hat{M}\Gamma}=\mathrm{M\hat{B}K}+\mathrm{A\hat{K}N}$. (Μονάδες 9)

γ) $\mathrm{BK}=3\mathrm{KN}$. (Μονάδες 7)

Λύση:

α) Στο τρίγωνο $\mathrm{NB\Gamma}$ είναι M μέσο της πλευράς $B\Gamma$ και Λ μέσο της $\mathrm{N\Gamma}$. Τότε είναι $M\Lambda//BN$ και $M\Lambda=\frac{BN}{2}$ (1). Επομένως και $KN//M\Lambda$. Αντιστρόφως στο τρίγωνο $AM\Lambda$ αφού είναι K μέσο της AM και $KN//M\Lambda$ τότε το N είναι μέσο της πλευράς $A\Lambda$ και επομένως θα είναι και $KN=\frac{M\Lambda}{2}\Leftrightarrow M\Lambda=2KN$ (2).



β) Η γωνία $K\hat{M}B$ και η $K\hat{M}\Gamma$ είναι παραπληρωματικές. Επομένως είναι $K\hat{M}\Gamma=180^0-K\hat{M}B$ (3). Επίσης είναι $A\hat{K}N=B\hat{K}M$ (4) ως κατακορυφήν.
Επομένως στο τρίγωνο BKM έχουμε ότι
$K\hat{B}M+B\hat{K}M+K\hat{M}B=180^0\overset{(4)}{\Leftrightarrow}K\hat{B}M+A\hat{K}N=180^0-K\hat{M}B$ (5)

Από τις σχέσεις (3) και (5) προκύπτει το ζητούμενο $K\hat{M}\Gamma=K\hat{B}M+A\hat{K}N$

Αλλοιώς

Η γωνία $K\hat{M}\Gamma$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο KBM και άρα έχουμε ότι

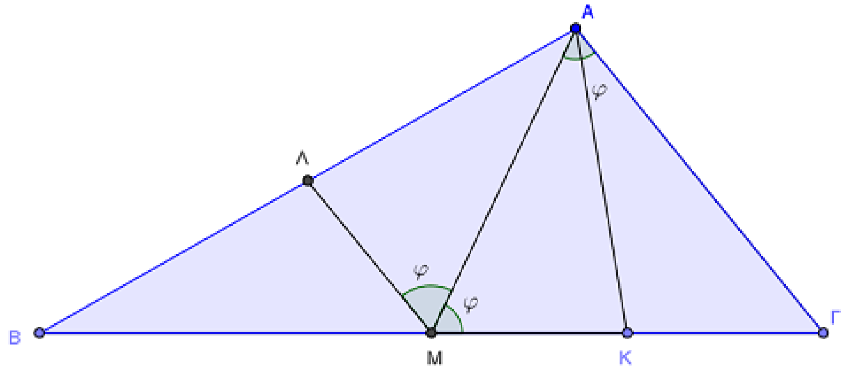
$\mathrm{K\hat{M}\Gamma}=\mathrm{M\hat{B}K}+\mathrm{B\hat{K}M}=\mathrm{M\hat{B}K}+\mathrm{A\hat{K}N}$.

γ) Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι

$\frac{BN}{2} = 2KN \Leftrightarrow BN = 4KN \Leftrightarrow BK + KN = 4KN \Leftrightarrow BK = 3KN$.

ΘΕΜΑ 3945

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\mathrm{B\Gamma = 2A\Gamma}$. Έστω ΑΜ διάμεσος του $AB\Gamma$ και K, Λ τα μέσα των ΜΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) $\mathrm{MA\Gamma = AM\Gamma}$

β) $\mathrm{M\Lambda = MK}$

γ) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΛΑΚ

Λύση:

α) Είναι $\mathrm{M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}}$ αφού το Μ είναι μέσο της ΒΓ και $\mathrm{A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}}$ από υπόθεση.

Έτσι $\mathrm{M\Gamma = A\Gamma}$. Δηλαδή το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές οπότε $\mathrm{MA\Gamma = AM\Gamma} = \varphi$.

β) Είναι $\mathrm{MK = \frac{M\Gamma}{2} \Leftrightarrow MK = \frac{B\Gamma}{4}}$ και $\mathrm{\Lambda M = \frac{A\Gamma}{2} \Leftrightarrow \Lambda M = \frac{B\Gamma}{4}}$ αφού το τμήμα ΛΜ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ του τριγώνου $AB\Gamma$ και ισχύει $\mathrm{\Lambda M // = \frac{A\Gamma}{2}}$.

Έτσι $\mathrm{M\Lambda = MK}$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

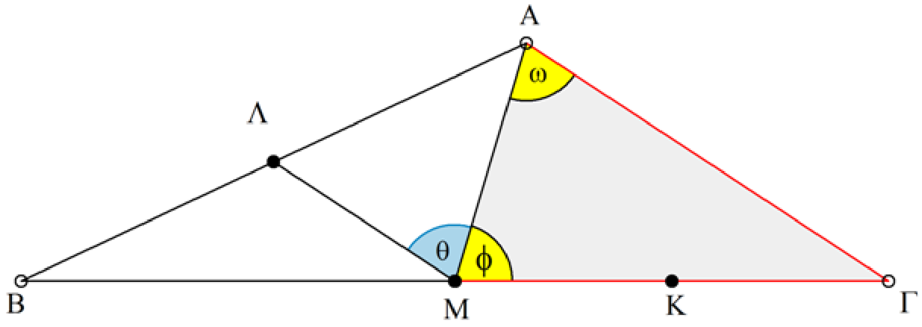
γ) Τα τρίγωνα $ΑΛΜ$ και $ΑΜΚ$ είναι ίσα αφού έχουν:

$ΑΜ$ κοινή πλευρά, $ΜΛ = ΜΚ$ από (β) ερώτημα και

$ΛΜΑ = ΑΜΚ = \varphi$ αφού $ΛΜΑ = ΜΑΓ = \varphi$ ως εντός εναλλάξ των $ΛΜ // ΑΓ$ που τέμνονται από την $ΑΜ$ και $ΜΑΓ = ΑΜΓ = \varphi$ από (α) ερώτημα.

Άρα $ΛΑΜ = ΜΑΚ$ δηλαδή η $ΑΜ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $ΛΑΚ$.

Μια εναλλακτική πρόταση για το τρίτο ερώτημα

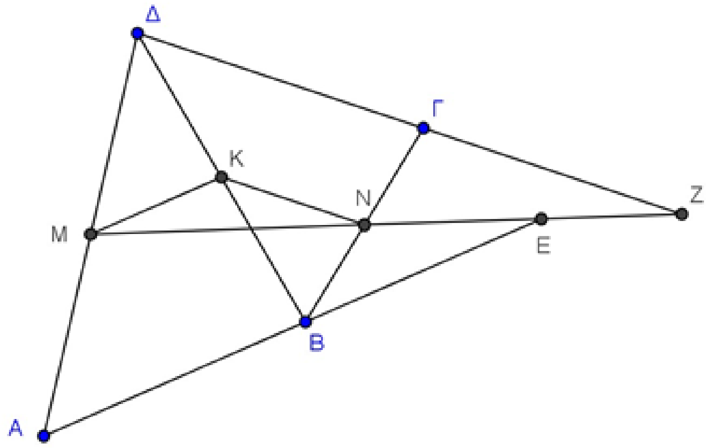


Αφού από το β) ερώτημα έχουμε $ΛΜ // = \frac{ΑΓ}{2}$ θα είναι $\hat{\omega} = \hat{\theta}$, ως εντός εναλλάξ των ευθειών $ΜΛ, ΑΓ$ τεμνομένων υπό της $ΑΜ$. Όμως από το α) ερώτημα : $\hat{\omega} = \hat{\phi}$ και συνεπώς $\hat{\phi} = \hat{\theta}$.

ΘΕΜΑ 3948

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

Δίνεται τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ με $ΑΒ = ΓΔ$ και $Μ, Ν, Κ$ τα μέσα των $ΑΔ, ΒΓ, ΒΔ$ αντίστοιχα. Αν οι προεκτάσεις των AB και $ΔΓ$ τέμνουν την προέκταση της $ΜΝ$ στα σημεία $Ε$ και $Ζ$ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:



α) $ΜΚ = ΚΝ$.

β) $ΜΕΑ = ΜΖΔ$.

Λύση:

α) Είναι $ΜΚ // = \frac{ΑΒ}{2} (1)$ και $ΚΝ // = \frac{ΓΔ}{2} (2)$ γιατί τα τμήματα $ΜΚ, ΚΝ$ ενώνουν τα μέσα δύο πλευρών των τριγώνων $ΑΒΔ$ και $ΒΓΔ$ αντίστοιχα.

Όμως είναι $ΑΒ = ΓΔ$ από την υπόθεση, έτσι από $(1),(2) \Rightarrow ΜΚ = ΚΝ$

β) Αφού $ΜΚ = ΚΝ$ το τρίγωνο $ΜΚΝ$ είναι ισοσκελές, οπότε $ΚΜΝ = ΚΝΜ \, (3)$

Είναι $ΜΕΑ = ΚΜΝ \, (4)$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $ΜΚ, ΑΒ$ που τέμνονται από την $ΜΕ$. $ΜΖΔ = ΚΝΜ \, (5)$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων $ΚΝ, ΑΓ$ που τέμνονται από την $ΜΖ$.

Από τις $(4),(5)$ λόγω της (3) συμπεραίνουμε ότι $ΜΕΑ = ΜΖΔ$.

ΘΕΜΑ 3954

Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ και στην προέκταση της $ΑΔ$ θεωρούμε σημείο $Ε$ τέτοιο ώστε $ΔΕ = ΔΓ$ ενώ στην προέκταση της ΑΒ θεωρούμε σημείο $Ζ$ τέτοιο ώστε $ΒΖ = ΒΓ$.

α) Να αποδείξετε ότι:

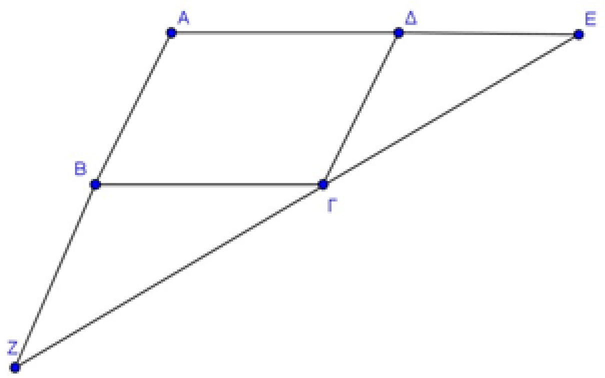
i. $B\Gamma Z = \Delta\Gamma E$.

ii. τα σημεία Z, Γ, E είναι συνευθειακά.

β) Ένας μαθητής για να αποδείξει ότι τα σημεία Z, Γ, E είναι συνευθειακά ανέπτυξε τον παρακάτω συλλογισμό. «Έχουμε: $B\Gamma Z = \Delta E\Gamma$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔE και $B\Gamma$ που τέμνονται από τη ZE και

$B\Gamma\Delta = \Gamma\Delta E$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔE και $B\Gamma$ που τέμνονται από την $\Delta\Gamma$).

Όμως $\Delta\Gamma E + \Gamma\Delta E + \Delta E\Gamma = 180°$ (ως άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $\Delta E\Gamma$). Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα: $\Delta\Gamma E + B\Gamma\Delta + B\Gamma Z = 180°$. Οπότε τα σημεία Z, Γ, E είναι συνευθειακά.» Όμως ο καθηγητής υπέδειξε ένα λάθος στο συλλογισμό αυτό. Να βρείτε το λάθος στο συγκεκριμένο συλλογισμό.



Λύση:

α) i) Είναι $\Gamma B Z = \Gamma\Delta E$ ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών B, Δ αντίστοιχα του παραλληλογράμμου. Άρα τα ισοσκελή τρίγωνα $\Gamma B Z$ και $\Gamma\Delta E$ έχουν τις γωνίες των κορυφών τους ίσες, οπότε θα είναι και οι γωνίες των βάσεων ίσες, δηλαδή $B\Gamma Z = \Delta\Gamma E$.

ii. $B\Gamma\Delta = \Gamma\Delta E \ (1)$ ως εντός και εναλλάξ.

$$B\Gamma Z + B\Gamma\Delta + \Delta\Gamma E \overset{(1),(i)}{=} \Delta E\Gamma + \Gamma\Delta E + \Delta\Gamma E \overset{\tau\rho\iota\gamma\Gamma\Delta E}{=} 180° \quad \left(B\Gamma Z = \Delta\Gamma E = \Delta E\Gamma\right)$$

Άρα τα σημεία Z,Γ,E είναι συνευθειακά

β) Το λάθος του μαθητή είναι στο κομμάτι:

«Έχουμε: $B\Gamma Z = \Delta E\Gamma$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔE και $B\Gamma$ που τέμνονται από τη ZE)»

Θεώρησε την $Z\Gamma E$ ευθεία, πράγμα το οποίο ζητείται να αποδειχθεί.

ΘΕΜΑ 3961

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με γωνία A ορθή. Φέρνουμε τη διάμεσο AM και σε τυχαίο σημείο K την κάθετη στην AM η οποία τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Αν H είναι το μέσο του ΔE να αποδείξετε ότι:

α) $B = BAM$. (Μονάδες 8)

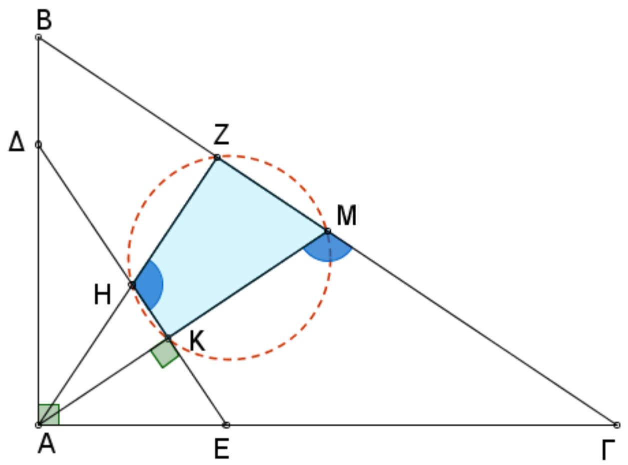
β) $A\hat{\Delta}H = \Delta AH$. (Μονάδες 9)

γ) Η ευθεία AH τέμνει κάθετα τη $B\Gamma$. (Μονάδες 8)

Λύση:

α) Επειδή η AM είναι η διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$, θα είναι $AM = MB$ και κατά συνέπεια

$B = BAM$.



β) Ομοίως η AH είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου $A\Delta E$, οπότε $AH = H\Delta \Leftrightarrow A\hat{\Delta}H = \Delta AH$.

γ) Έστω ότι η AH τέμνει τη $B\Gamma$ στο Z. Είναι:

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

$\mathrm{AM\Gamma} = \mathrm{B} + \mathrm{MAB} \overset{(\alpha)}{=} 2\mathrm{MAB} \Leftrightarrow \mathrm{MAB} = \dfrac{\mathrm{AM\Gamma}}{2}$ (1) (ως εξωτερική γωνία στο τρίγωνο AMB). $\mathrm{KHZ} = \Delta\mathrm{HA} = 180^0 - 2\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{H} \Leftrightarrow \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{H} = \dfrac{180^0 - \mathrm{KHZ}}{2}$ (2) (από το ισοσκελές τρίγωνο $H A\Delta$.

Αλλά από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔAK έχουμε:

$$\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{H} = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{K} = 90^0 - \mathrm{KA\Delta} = 90^0 - \mathrm{MAB} \overset{(1),(2)}{\Leftrightarrow} \frac{180^0 - \mathrm{KHZ}}{2} = 90^0 - \frac{\mathrm{AM\Gamma}}{2}$$

Άρα: $\mathrm{KHZ} = \mathrm{AM\Gamma}$, οπότε το τετράπλευρο KHZM είναι εγγράψιμο(μία γωνία του είναι ίση με την απέναντι εξωτερική. Επειδή όμως $\mathrm{K} = 90^0$, θα είναι και $\mathrm{AZ} \perp \mathrm{B\Gamma}$.

ΘΕΜΑ 3966

Δίνονται ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta\mathrm{B\Gamma}$ με $\mathrm{A} = 90^0, \hat{\Delta} = 90^0$ και M, N τα μέσα των $\mathrm{B\Gamma}$ και $\mathrm{A\Delta}$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $\mathrm{AM} = \mathrm{M\Delta}$. (Μονάδες 10)

β) Η MN είναι κάθετη στην $\mathrm{A\Delta}$. (Μονάδες 10)

γ) $\mathrm{\Gamma B\Delta} = \mathrm{\Gamma A\Delta}$ (Μονάδες 5)

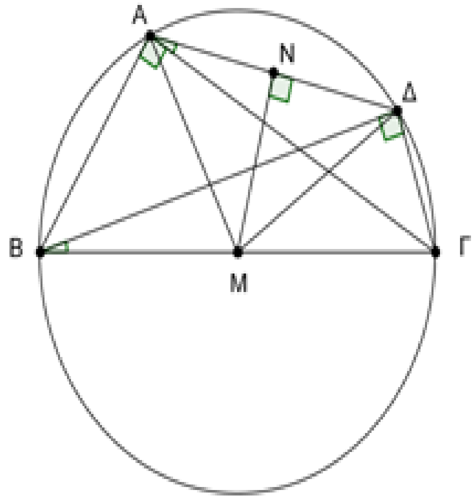
Λύση:

α) Το τετράπλευρο $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο αφού η πλευρά $\mathrm{B\Gamma}$ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές κάτω από ίσες γωνίες . Επίσης , επειδή $\mathrm{A} = 90^0$, το κέντρο του κύκλου είναι το μέσον M της $\mathrm{B\Gamma}$. Κατά συνέπεια $\mathrm{AM} = \mathrm{M\Delta}$ ως ακτίνες του κύκλου .

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

β) Εφόσον το Ν είναι πλέον μέσο χορδής, το ΜΝ είναι απόστημα και επομένως είναι κάθετο στην ΑΔ.

γ) $\Gamma B\Delta = \Gamma A\Delta$ διότι είναι εγγεγραμμένες και βαίνουν στο ίδιο τόξο.



ΘΕΜΑ 4307

Θεωρούμε κύκλο κέντρου Ο, με διάμετρο ΒΓ. Από σημείο Α του κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη (ε) του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ. Από τα σημεία Β, Γ φέρουμε τα τμήματα ΒΔ, ΓΕ κάθετα στην ευθεία (ε).

α) Να αποδείξετε ότι ΒΑ και ΓΑ είναι διχοτόμοι των γωνιών ΔΒΓ και ΕΓΒ αντίστοιχα. (Μονάδες 8)

β) Αν ΑΕ είναι ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι $A\Delta = AE = AZ$.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι $B\Delta + \Gamma E = B\Gamma$. (Μονάδες 9)

Λύση:

α) Είναι $B_1 = A_2$ ως γωνία χορδής – εφαπτομένης και :

$$B_2 = 90^0 - A_1 = 90^0 - (180^0 - BA\Gamma - A_2) =$$

$$= 90^0 - 180^0 + 90^0 + A_2 = A_2,$$

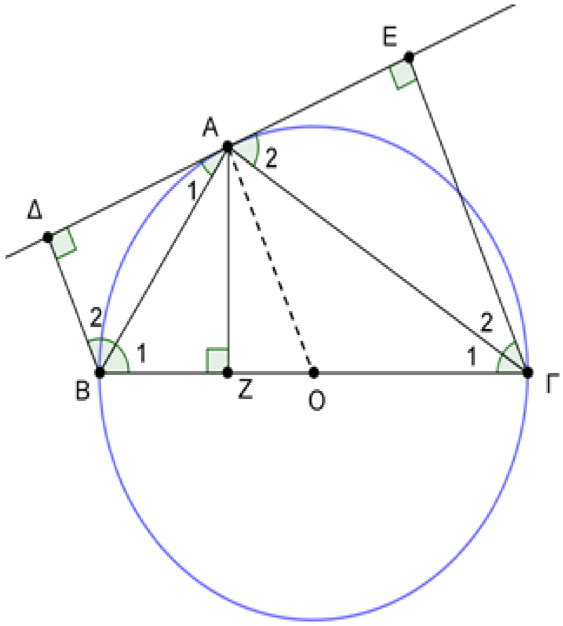
Επομένως $B_1 = B_2$, οπότε η ΒΑ είναι διχοτόμος. Ομοίως για την ΓΑ.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

β) Το τετράπλευρο $\Delta B\Gamma E$ είναι τραπέζιο αφού $\Delta B // \Gamma E$ ως κάθετες στην ίδια ευθεία . Ακόμα $OA \perp \Delta E$,οπότε $OA // \Delta B // \Gamma E$ κι αφού το O είναι μέσον της $B\Gamma$, η OA είναι διάμεσος του τραπεζίου . Επομένως $A\Delta = AE$

Ακόμα από την ισότητα των τριγώνων $BA\Delta, BAZ$, έχουμε $A\Delta = AZ$ και τελικά $A\Delta = AZ = AE$.

γ) Η AO είναι η διάμεσος του τραπεζίου και ισχύει : $\Delta B + \Gamma E = 2 \cdot AO = 2 \cdot O\Gamma = OB + O\Gamma = B\Gamma$.



ΘΕΜΑ 4555

Δίνεται τρίγωνο ABC και από το μέσο της M της BC φέρνουμε τμήματα MD ίσο και παράλληλο με το BA και ME ίσο και παράλληλο με το CA (τα D, E βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της BC με το A). Να αποδειχθεί ότι:

i) Τα σημεία D, E, A είναι συνευθειακά.

ii) Η περίμετρος του τριγώνου $\triangle MDE$ ισούται με την περίμετρο του τριγώνου $\triangle ABC$.

Στο τρίτο ερώτημα λείπουν πολλά δεδομένα. Θα προσπαθήσω να βγάλω άκρη αλλά δείτε το κι εσείς.

Στην εκφώνηση του γ) ερωτήματος λείπουν:

1) Στην 4η σειρά πριν από την παρένθεση, η σχέση: $BA\Gamma = AZ\Delta$ (εντός εναλλάξ...)

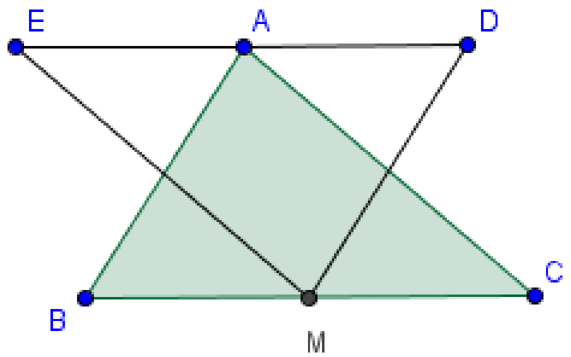
2) Στην 6η σειρά πρέπει να γραφεί:

Όμως, $A\hat{\Delta}Z + AZ\Delta + \Delta AZ = 180^0$ (άθροισμα γωνιών...)

Λύση:

i) Το τετράπλευρο $ABMD$ είναι παραλληλόγραμμο αφού $AB =\parallel MD$ επομένως $AD \parallel BM \Leftrightarrow AD \parallel BC$.

Ομοίως το τετράπλευρο $ACME$ είναι παραλληλόγραμμο κι έτσι $AE \parallel CM \Leftrightarrow AE \parallel BC$.



Άρα από το σημείο A άγονται δύο ημιευθείες παράλληλες στην BC κι έτσι οι ημιευθείες ανήκουν στην ίδια ευθεία όπως και τα σημεία D, E, A.

ii) Από υπόθεση $AC = ME, AB = MD$.Ακόμη $DE = AE + AD = BM + CM = BC$ λόγω των παραλληλογράμμων $ABMD, ACME$.

Έτσι τα τρίγωνα ABC, MDE είναι ίσα άρα έχουν και ίσες περιμέτρους.

ΘΕΜΑ 4562

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και M τυχαίο σημείο της πλευράς $B\Gamma$. Φέρουμε τις διχοτόμους των γωνιών BMA και $AM\Gamma$ οι οποίες τέμνουν τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι, η γωνία ΔME είναι ορθή.

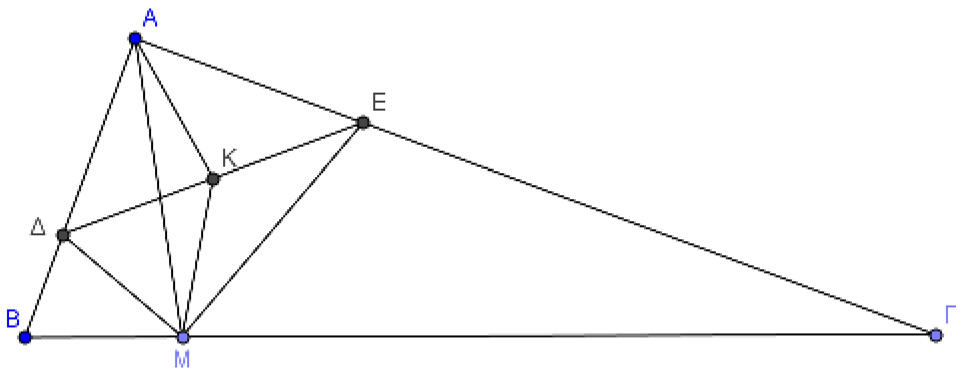
β) Αν K το μέσο του ΔE, να αποδείξετε ότι $MK = KA$.

Λύση:

α) Έστω $BM\Delta = \Delta MA = \phi$ και $AME = EM\Gamma = \omega$

Τότε $\omega + \omega + \phi + \phi = 180 \Leftrightarrow \omega + \phi = 90$ άρα $\Delta ME = 90^o$.

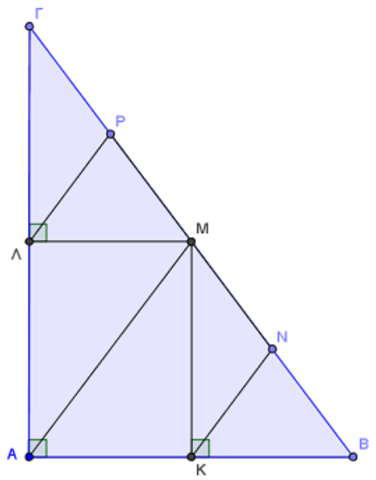
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444



β) Το MK είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΔME που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα άρα $MK = \dfrac{\Delta E}{2}$. Όμοια το AK είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΔAE που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα άρα $AK = \dfrac{\Delta E}{2}$. Οπότε $MK = AK$.

ΘΕΜΑ 4565

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και AM η διάμεσός του. Από το M φέρουμε MK κάθετη στην AB και $\mathrm{M\Lambda}$ κάθετη στην $\mathrm{A\Gamma}$. Αν $\mathrm{N,P}$ είναι τα μέσα των BM και $\mathrm{\Gamma M}$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



α) $\mathrm{NKM} = \mathrm{NMK}$.

β) Η MK είναι διχοτόμος της γωνίας NMA.

γ) $\mathrm{AM} = \mathrm{KN} + \mathrm{\Lambda P}$.

Λύση:

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

α) Είναι $KN=\frac{MB}{2}=MN$ ως διάμεσος στην υποτείνουσα MB του ορθογωνίου τριγώνου MKB.

Έτσι το τρίγωνο KNM είναι ισοσκελές δηλαδή $NKM=NMK$.

β) Είναι $AM=\frac{B\Gamma}{2}=MB$ ως διάμεσος στην υποτείνουσα $B\Gamma$ του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$.

Έτσι στο ισοσκελές τρίγωνο AMB το MK είναι ύψος στη βάση του AB άρα είναι και διχοτόμος της γωνίας NMA.

γ) Είναι $\Lambda P=\frac{\Gamma M}{2}$ ως διάμεσος στην υποτείνουσα $M\Gamma$ του ορθογωνίου τριγώνου $\Gamma\Lambda M$. $KN+\Lambda P=\frac{MB}{2}+\frac{M\Gamma}{2}=\frac{B\Gamma}{2}=AM$.

ΘΕΜΑ 4567

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και εντός αυτού ισόπλευρο τρίγωνο $MB\Gamma$. Αν η προέκταση της AM τέμνει τη $B\Delta$ στο σημείο E, να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta AE=15^0$. (Μονάδες 8)

β) Τα τρίγωνα ΔAE και $\Delta E\Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

γ) Η ΓE είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\Gamma M$. (Μονάδες 9)

Λύση:

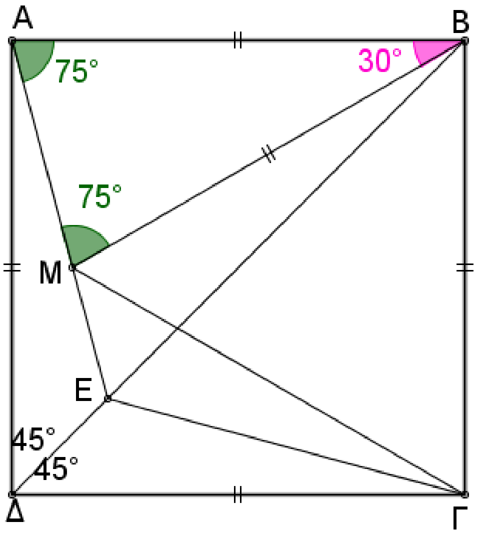
α) Επειδή το τρίγωνο $MB\Gamma$ είναι ισόπλευρο θα είναι $AB=BM$ και $ABM=90^0-60^0=30^0$. Άρα: $BAM=AMB=\frac{180^0-30^0}{2}=75^0$.

Οπότε: $\Delta AE=90^0-75^0 \Leftrightarrow \Delta AE=15^0$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

β) Τα τρίγωνα ΔAE και $\Delta E\Gamma$ είναι ίσα, επειδή έχουν:

ΔE κοινή πλευρά, $\mathrm{A\Delta}=\Gamma\Delta$ (πλευρές τετραγώνου) και $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E}=\mathrm{E}\hat{\Delta}\Gamma=45^0$ (η διαγώνιος τετραγώνου διχοτομεί τις γωνίες του).



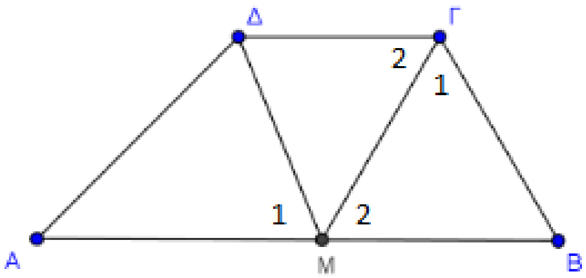
γ) Από την ισότητα των τριγώνων του προηγούμενου ερωτήματος προκύπτει ότι $\mathrm{E}\hat{\Gamma}\Delta=\Delta\mathrm{AE}=15^0$ κι επειδή $\mathrm{M}\hat{\Gamma}\Delta=30^0$, θα είναι και $\mathrm{M}\hat{\Gamma}\mathrm{E}=15^0$, δηλαδή η ΓE είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\Gamma M$.

ΘΕΜΑ 4569

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB//\Gamma\Delta$ και $AB=\mathrm{A\Delta}+\mathrm{B\Gamma}$. Αν η διχοτόμος της γωνίας Δ τέμνει την AB στο σημείο M, να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο $A\Delta\mathrm{M}$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
β) Το τρίγωνο $\mathrm{M}B\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)
γ) Η $\Gamma\mathrm{M}$ είναι διχοτόμος τις γωνίας Γ του τραπεζίου. (Μονάδες 8)

Λύση:

α) Είναι $\hat{M}_1=\hat{\Delta}_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $\Delta\Gamma, AB$ με τέμνουσα την ΔM. Επίσης $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{M}=\hat{\Delta}_1=\hat{\Delta}_2=\mathrm{M}\hat{\Delta}\Gamma$ αφού ΔM διχοτόμος. Επομένως είναι και $\hat{M}_1=\hat{\Delta}_2$. Συνεπώς το τρίγωνο ΔAM είναι ισοσκελές και άρα $A\Delta=AM$ (1).



β) Είναι

$AB=\mathrm{A\Delta}+\mathrm{B\Gamma}\overset{(1)}{=}AM+B\Gamma \Leftrightarrow B\Gamma=AB-AM=MB$ άρα το τρίγωνο ΓMB ισοσκελές και άρα $\hat{M}_2=\hat{\Gamma}_1$ (2).

γ) Είναι $\hat{M}_2 = \hat{\Gamma}_2$ (3) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $\Delta\Gamma, AB$ με τέμνουσα την ΓM. Από (2),(3) είναι $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$ άρα ΓM διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$.

ΘΕΜΑ 4571

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και σημείο Δ στην προέκταση της $B\Gamma$. Από το Δ φέρουμε ΔK κάθετη στην AB και ΔE κάθετη στην προέκταση της $A\Gamma$. Από το σημείο Γ φέρουμε ΓH κάθετη στην AB και ΓZ κάθετη στην $K\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία $Z\Gamma\Delta$ είναι ίση με τη γωνία B. (Μονάδες 4)

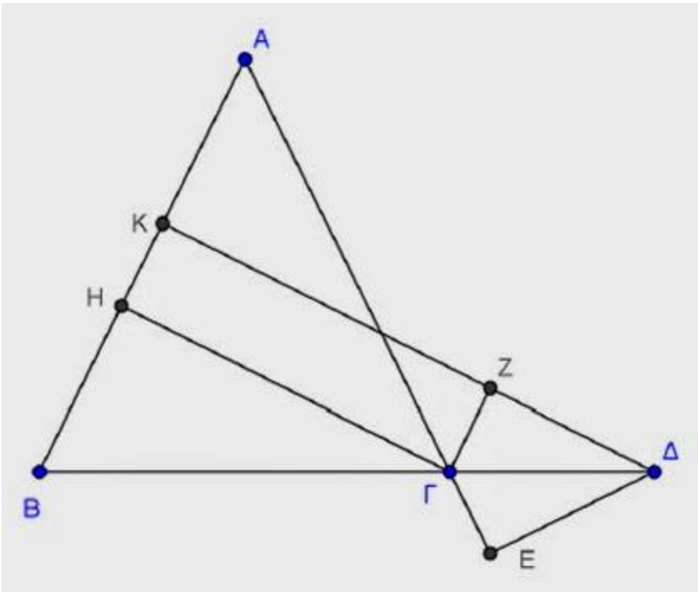
β) Η $\Gamma\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $Z\Gamma E$. (Μονάδες 4)

γ) Το τρίγωνο $\Delta Z E$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

δ) $\Delta K - \Delta E = H\Gamma$ (Μονάδες 8)

Λύση:

α) Έχουμε $\Delta K \perp AB, \Gamma H \perp AB, \Gamma Z \perp K\Delta$ άρα το $KH\Gamma Z$ είναι ορθογώνιο αφού έχει 3 ορθές γωνίες. Άρα $KH // \Gamma Z \Rightarrow AB // \Gamma Z$ άρα $B = Z\Gamma\Delta$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των $AB // \Gamma Z$ που τέμνονται από την $B\Gamma$.



β) $\Delta\Gamma E = A\Gamma B$ ως κατακορυφήν

$B = A\Gamma B$ αφού το $AB\Gamma$ τρίγωνο ισοσκελές και $B = Z\Gamma\Delta$ από ερώτημα (α).

Άρα $\Delta\Gamma E = Z\Gamma\Delta$ άρα η $\Gamma\Delta$ διχοτόμος της $Z\Gamma E$.

γ) Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $Z\Gamma\Delta, \Gamma\Delta E$ αυτά έχουν:

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

1) $\Gamma\Delta$ κοινή πλευρά

2) $\Gamma\Delta E = Z\Delta\Gamma$ από ερώτημα (β)

Άρα τα τρίγωνα $Z\Gamma\Delta, \Gamma\Delta E$ είναι ίσα άρα έχουν $\Delta Z = \Delta E$ άρα το τρίγωνο ΔZE είναι ισοσκελές.

δ) Από ερώτημα (α) $KH\Gamma Z$ ορθογώνιο αφού έχει 3 ορθές γωνίες.

Άρα $KZ = H\Gamma$ (1) (απέναντι πλευρές ορθογωνίου).

Από ερώτημα (γ) $\Delta Z = \Delta E$ (2).

Έχουμε $\Delta K = \Delta Z + ZK \overset{(1),(2)}{\Rightarrow} \Delta K = \Delta E + H\Gamma \Rightarrow \Delta K - \Delta E = H\Gamma$.

ΘΕΜΑ 4579

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A\Delta$ και AE αντίστοιχα η εσωτερική και η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας A (Δ, E σημεία της ευθείας $B\Gamma$). Φέρουμε BZ κάθετη στην $A\Delta$ και BH κάθετη στην AE και θεωρούμε M το μέσο του $\Delta\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $AZBH$ είναι ορθογώνιο.

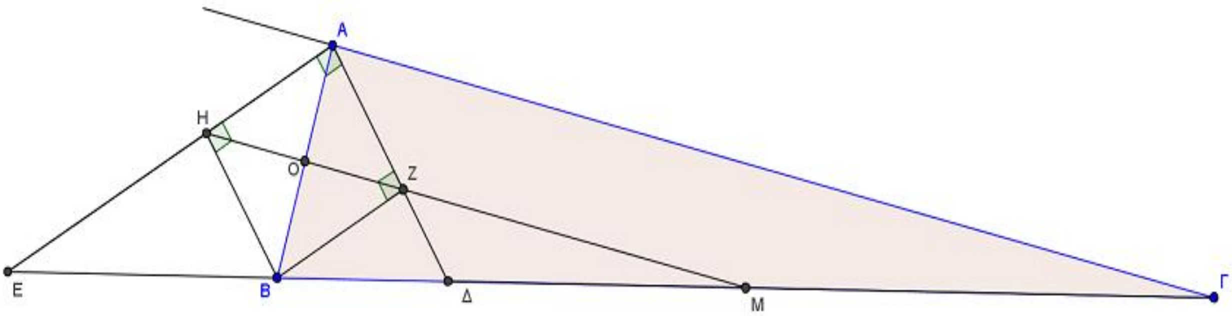
β) Η γωνία HZA είναι ίση με τη γωνία $ZA\Gamma$.

γ) Η ευθεία HZ διέρχεται από το M.

δ) $MH = \dfrac{AB + A\Gamma}{2}$

Λύση:

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444



(Υπάρχει τυπογραφικό λάθος, μάλλον στην άσκηση, το M είναι μέσο της $B\Gamma$ και όχι της $\Delta\Gamma$).

α) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ δεν μπορεί να είναι ισοσκελές.

Είναι $A\Delta \perp AE$ ως διχοτόμοι εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών.

Έτσι το τετράπλευρο $AZBH$ είναι ορθογώνιο αφού έχει τρείς ορθές γωνίες.

β) Αν O είναι το κέντρο του $AZBH$ τότε $OA = OZ$ ως μισά των ίσων διαγωνίων AB, HZ οπότε το τρίγωνο AOZ είναι ισοσκελές δηλαδή $HZA = BAZ = \frac{A}{2} = ZA\Gamma$.

γ) Το O είναι μέσο της AB και το M της $B\Gamma$, έτσι από το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $OM // = \frac{A\Gamma}{2}$.

Από το (β) ερώτημα είναι $HZA = ZA\Gamma$ δηλαδή η HOZ είναι παράλληλη στην $A\Gamma$ αφού σχηματίζονται εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.

Άρα η HZ διέρχεται από το M αφού από το O μία μόνο παράλληλη διέρχεται προς την $A\Gamma$.

δ) Είναι: $MH = MO + HO \Leftrightarrow MH = \frac{A\Gamma}{2} + \frac{HZ}{2} \overset{HZ=AB}{\Leftrightarrow}$

$$MH = \frac{A\Gamma}{2} + \frac{AB}{2} \Leftrightarrow MH = \frac{AB + A\Gamma}{2}.$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

ΘΕΜΑ 4583

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$, η διχοτόμος του $A\Delta$ και η ευθεία (ε) παράλληλη από το B προς την $A\Gamma$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ φέρουμε ευθεία παράλληλη στην $A\Delta$ η οποία τέμνει την $A\Gamma$ στο Z, την ευθεία (ε) στο σημείο Λ και την προέκταση της BA στο E. Να αποδείξετε ότι:

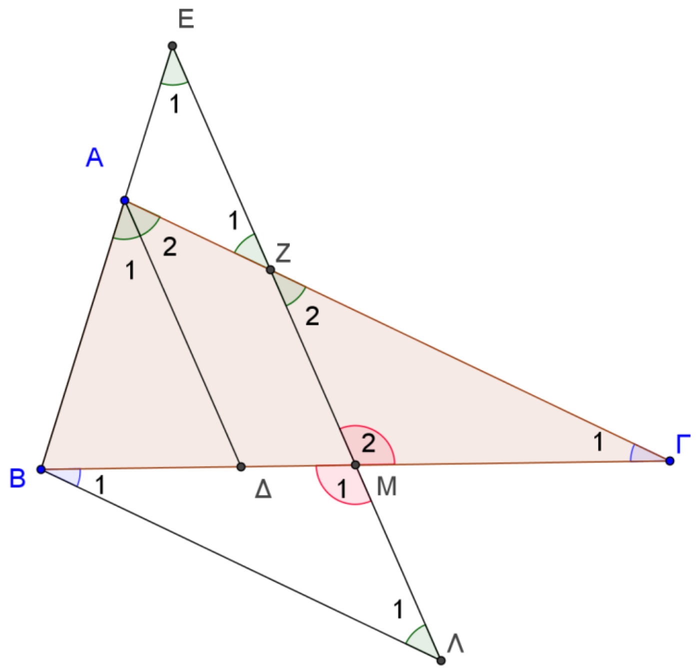
α) Τα τρίγωνα $A\mathrm{EZ}$ και $B\Lambda\mathrm{E}$ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 8)

β) $B\Lambda = \Gamma\mathrm{Z}$. (Μονάδες 9)

γ) $A\mathrm{E} = A\Gamma - B\Lambda$. (Μονάδες 8)

Λύση:

α) $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ($A\Delta$ διχοτόμος), $\hat{A}_1 = \hat{E}_1$ (εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων $A\Delta$, $\mathrm{E}\Lambda$ που τέμνονται από την EA), $\hat{A}_2 = \hat{Z}_1$ (εντός και εναλλάξ των παραλλήλων $A\Delta$, $\mathrm{E}\Lambda$ που τέμνονται από την AZ).



Επομένως $\hat{E}_1 = \hat{Z}_1$ άρα $A\hat{E}Z$ ισοσκελές.

Επίσης: $\hat{Z}_1 = \hat{Z}_2$ (κατακορυφήν), $\hat{Z}_2 = \hat{\Lambda}_1$ (εντός και εναλλάξ των παραλλήλων $\mathrm{A\Gamma}$, $\mathrm{B\Lambda}$ που τέμνονται από την $\Lambda\mathrm{Z}$).

Άρα $\hat{Z}_1 = \hat{\Lambda}_1$ και επομένως $\hat{E}_1 = \hat{\Lambda}_1$ άρα $\mathrm{B}\hat{\Lambda}\mathrm{E}$ ισοσκελές.

β) Συγκρίνω τα τρίγωνα $\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\Lambda$ και $\mathrm{Z}\hat{\mathrm{M}}\Gamma$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

Έχουν $BM = M\Gamma$ (υπόθεση), $\hat{M}_2 = \hat{M}_1$ (κατακορυφήν, $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ (εντός και εναλλάξ των παραλλήλων $A\Gamma$, $B\Lambda$ που τέμνονται από την $B\Gamma$.

Άρα $B\hat{M}\Lambda =$ $Z\hat{M}\Gamma$ (Γ-Π-Γ). Επομένως $B\Lambda = \Gamma Z$.

γ) Είναι: $AE = AZ$ ($A\hat{E}Z$ ισοσκελές) και $AZ = A\Gamma - \Gamma Z$, επομένως $AE = A\Gamma - \Gamma Z$, όμως $B\Lambda = \Gamma Z$, επομένως $AE = A\Gamma - B\Lambda$.

ΘΕΜΑ 4599

Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^o$) με $B\Gamma = \Gamma\Delta = 2AB$ και K, Λ τα μέσα των $B\Gamma, \Gamma\Delta$. Η παράλληλη από το K προς την AB τέμνει την $A\Lambda$ στο Z. Να αποδείξετε ότι:

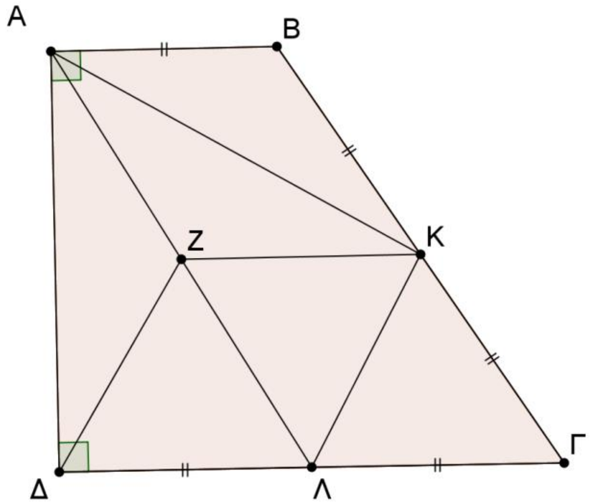
α) $B\Gamma = 2\Delta Z$. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο $ZK\Gamma\Lambda$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)

γ) $A\hat{K}\Lambda = 90^o$. (Μονάδες 8)

Λύση:

α) Οι παράλληλες ευθείες AB, ZK και $\Lambda\Gamma$ ορίζουν ίσα τμήματα στην $B\Gamma$



($BK = K\Gamma$). Επομένως θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην $A\Lambda$, επομένως το Z είναι μέσο της $A\Lambda$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta A\Lambda$, ΔZ διάμεσος προς την υποτείνουσα , επομένως $\Delta Z = \dfrac{A\Lambda}{2}$ (1).

Είναι $AB // \Lambda\Gamma$ (υπόθεση) και $AB = \Lambda\Gamma (= \dfrac{\Gamma\Delta}{2})$, άρα $AB\Gamma\Lambda$ παραλληλόγραμμο ,άρα $A\Lambda = B\Gamma$ (2).

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$\Delta Z=\dfrac{B\Gamma}{2}$, δηλ. $B\Gamma=2\Delta Z$.

β) Το τετράπλευρο $ZK\Gamma\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο ($ZK//\Gamma\Lambda$ από την υπόθεση και $Z\Lambda//K\Gamma$ επειδή $AB\Gamma\Lambda$ παραλληλόγραμμο). Επιπλέον , είναι $K\Gamma=\Lambda\Gamma$ (μισά των ίσων τμημάτων $B\Gamma,\Gamma\Delta$). Άρα το $ZK\Gamma\Lambda$ είναι ρόμβος.

γ) Είναι $Z\Lambda=\Lambda\Gamma=KZ$ ($ZK\Gamma\Lambda$ ρόμβος , επομένως $KZ=AZ=\dfrac{A\Lambda}{2}$ και $Z\Lambda=AZ$

(Z μέσο $A\Lambda$). Το τρίγωνο $AK\Lambda$ είναι ορθογώνιο με $A\hat{K}\Lambda=90^0$.

ΘΕΜΑ 4603

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, $AB=A\Gamma$, και τυχαίο σημείο M της πλευράς $B\Gamma$. Από το σημείο M φέρουμε ευθεία κάθετη στην πλευρά που τέμνει τις ευθείες AB και $A\Gamma$ στα σημεία E και Θ αντίστοιχα. Αν $A\Delta$ και AH τα ύψη των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A\Theta E$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

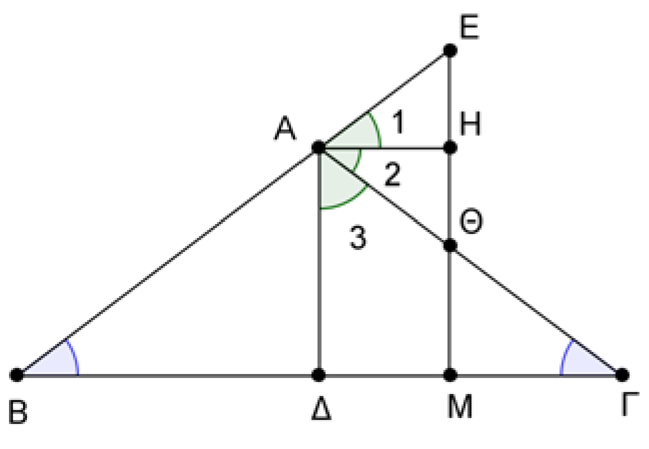
α) $\Delta AH=90^0$ (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο $A\Theta E$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) $M\Theta+ME=2A\Delta$ (Μονάδες 9)

Λύση:

β και α) Το τετράπλευρο ΔAHM είναι ορθογώνιο αφού έχει τρεις ορθές γωνίες.



Λόγω της παραλληλίας είναι $B=A_1$, $\hat{\Gamma}=A_2$ κι αφού $B=\hat{\Gamma}$ έχουμε ότι η AH είναι διχοτόμος της $A\Theta E$. Αυτό έχει σαν συνέπεια το τρίγωνο $A\Theta E$ να είναι ισοσκελές αφού το AH

είναι ταυτόχρονα και ύψος .

Έτσι $\Delta AH=90^0$ αφού οι πλευρές της είναι διχοτόμοι εφεξής παραπληρωματικών γωνιών .

γ) Το ΑΗ είναι και διάμεσος του ΕΑΘ , οπότε $EH=\Theta H$.

Τότε: $M\Theta+ME=M\Theta+M\Theta+\Theta E=2M\Theta+\Theta H+HE=2M\Theta+2\Theta H=$

$=2(M\Theta+\Theta H)=2MH=2A\Delta$.

ΘΕΜΑ 4606

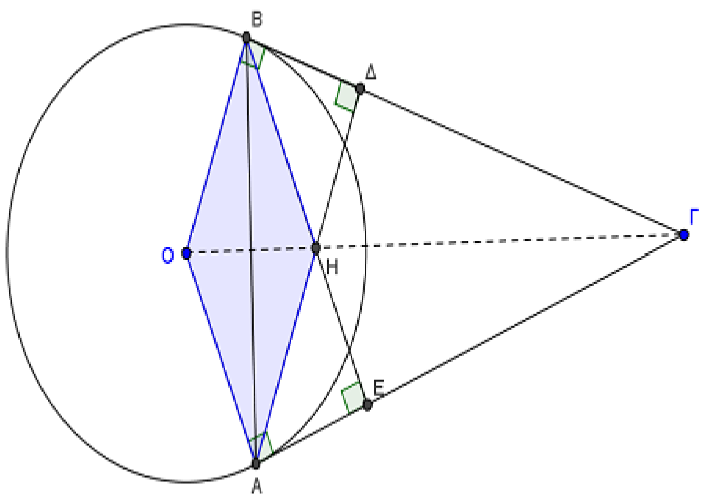
Δίνεται κύκλος κέντρου O και δυο μη αντιδιαμετρικά σημεία του A και B. Φέρουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία A και B οι οποίες τέμνονται στο σημείο Γ. Φέρουμε επίσης και τα ύψη $A\Delta$ και BE του τριγώνου $AB\Gamma$ τα οποία τέμνονται στο σημείο H. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο BHA είναι ισοσκελές.

β) Το τετράπλευρο $OBHA$ είναι ρόμβος.

γ) Τα σημεία O,H,Γ είναι συνευθειακά.

Λύση:



α) Είναι $\Gamma A=\Gamma B$ ως εφαπτόμενα τμήματα, δηλαδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
Τα ορθ. τρίγωνα $AB\Delta$ και ABE είναι ίσα αφού έχουν την πλευρά AB κοινή και $AB\Delta=EAB$ ως προσκείμενες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΓBA.
Άρα και

$\mathrm{AB}\hat{\mathrm{H}}=\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{H}$, οπότε το τρίγωνο BHA είναι ισοσκελές αφού έχει δύο ίσες γωνίες.

β) Είναι $\mathrm{OA}\perp\Gamma\mathrm{A}$ και $\mathrm{BH}\perp\mathrm{A}\Gamma$ έτσι $\mathrm{OA}//\mathrm{BH}\,(1)$

Ομοίως είναι $\mathrm{OB}//\mathrm{AH}\,(2)$ ως κάθετες στην $\Gamma\mathrm{B}$.

Επίσης είναι $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}\,(3)$ ως ακτίνες του κύκλου.

Από τις τρείς παραπάνω σχέσεις συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο OBHA είναι ρόμβος.

γ) Είναι $\Gamma\mathrm{A}=\Gamma\mathrm{B}$ από το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, $\mathrm{HA}=\mathrm{HB}$ από το ισοσκελές τρίγωνο HAB και $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$. Άρα τα σημεία $\mathrm{O},\mathrm{H},\Gamma$ ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος AB δηλαδή ανήκουν στη μεσοκάθετο του, δηλαδή στην ίδια ευθεία.

ΘΕΜΑ 4611

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και στην προέκταση της ΓB (προς το B) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $B\Delta=AB$ ενώ στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $\Gamma E=\Gamma A$. Αν οι εξωτερικοί διχοτόμοι των γωνιών B και Γ τέμνουν τις $A\Delta$ και AE στα σημεία K και Λ αντίστοιχα, και η $K\Lambda$ τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία M και N αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

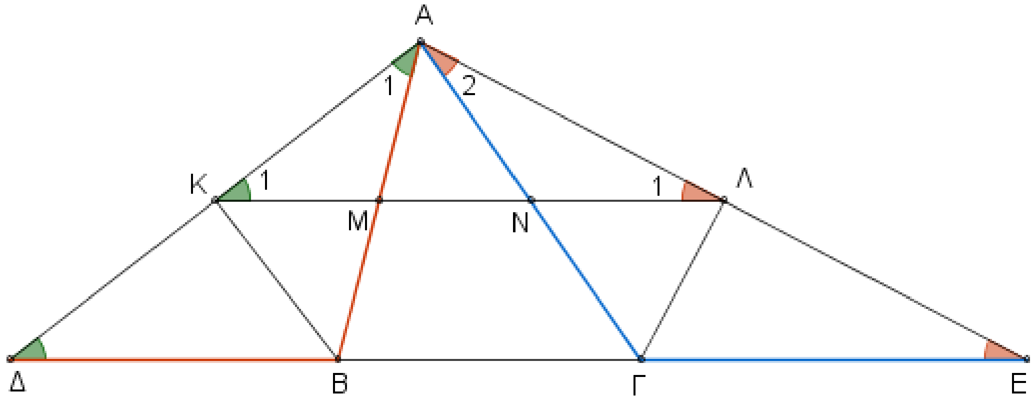
α) Τα σημεία K και Λ είναι μέσα των $A\Delta$ και AE αντίστοιχα. (Μονάδες 8)

β) Τα τρίγωνα KMA και $AN\Lambda$ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 9)

γ) $\mathrm{K\Lambda}=\dfrac{\mathrm{AB}+\mathrm{A\Gamma}+\mathrm{B\Gamma}}{2}$. (Μονάδες 8)

Λύση:

α) Επειδή τα τρίγωνα $AB\Delta, A\Gamma E$ είναι ισοσκελή οι διχοτόμοι $BK, \Gamma\Lambda$ των γωνιών $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta, \mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{E}$ αντίστοιχα, θα είναι και διάμεσοι.



β) Η $ΚΛ$ ενώνει τα μέσα των πλευρών $ΑΔ, ΑΕ$ του τριγώνου $ΑΔΕ$, άρα $ΚΛ \parallel ΔΕ$.

Οπότε θα είναι $\mathrm{K}_1 = \hat{\Delta}$ και $\hat{\Lambda}_1 = \mathrm{E}$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά)

Αλλά από τα ισοσκελή τρίγωνα $ΑΒΔ, ΑΓΕ$, έχουμε: $\mathrm{A}_1 = \hat{\Delta}$ και $\mathrm{A}_2 = \mathrm{E}$.

Άρα: $\mathrm{A}_1 = \mathrm{K}_1$ και $\mathrm{A}_2 = \hat{\Lambda}_1$, δηλαδή τα τρίγωνα KMA και $ΑΝΛ$ είναι ισοσκελή.

γ) Η $ΚΛ$ ως παράλληλη στη $ΔΕ$ θα διέρχεται από τα μέσα των πλευρών $ΑΒ, ΑΓ$ του τριγώνου $ΑΒΓ$. Άρα τα σημεία M, N είναι τα μέσα των $ΑΒ, ΑΓ$ αντίστοιχα, οπότε θα είναι: $\mathrm{KM} = \frac{\mathrm{B\Delta}}{2} = \frac{\mathrm{AB}}{2}$ και $\mathrm{\Lambda N} = \frac{\mathrm{\Gamma E}}{2} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{2}$.

Επομένως: $\mathrm{K\Lambda} = \mathrm{KM} + \mathrm{MN} + \mathrm{N\Lambda} \Leftrightarrow \mathrm{K\Lambda} = \frac{\mathrm{AB} + \mathrm{A\Gamma} + \mathrm{B\Gamma}}{2}$.

ΘΕΜΑ 4616

Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ και $Μ$ το μέσο της πλευράς $ΔΓ$. Φέρνουμε κάθετη στην AM στο σημείο της $Μ$, η οποία τέμνει την ευθεία $ΑΔ$ στο σημείο $Ρ$ και την $ΒΓ$ στο $Σ$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $ΔΡ = ΣΓ$.

β) Το τρίγωνο $ΑΡΣ$ είναι ισοσκελές.

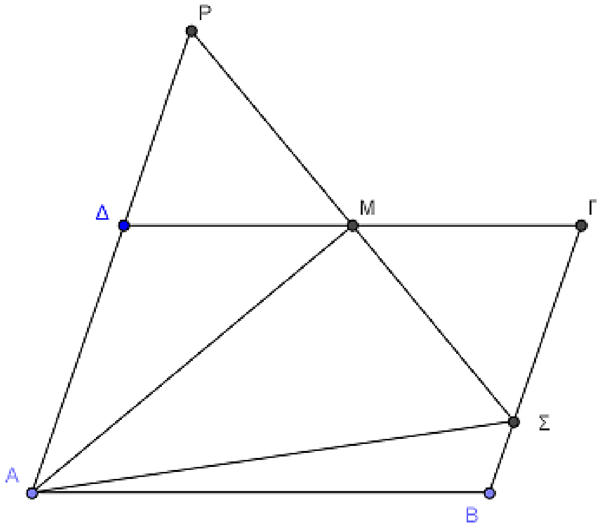
γ) $ΑΣ = ΑΔ + ΓΣ$.

Λύση:

α) Τα τρίγωνα $ΜΡΔ$ και $ΜΓΣ$ είναι ίσα γιατί η $ΔΜ = ΜΓ$ αφού το $Μ$ είναι το μέσο της $ΓΔ$ και $ΡΔΜ = ΜΓΣ$ ως εντός εναλλάξ και $ΡΜΔ = ΓΜΣ$ ως κατακορυφήν. Άρα $ΔΡ = ΣΓ$ και $ΡΜ = ΜΣ$

mathematica.gr

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444



β) Η AM είναι ύψος και διάμεσος του τριγώνου $P A\Sigma$ άρα το τρίγωνο $AP\Sigma$ είναι ισοσκελές.

γ) Αφού το τρίγωνο $AP\Sigma$ είναι ισοσκελές τότε $A\Sigma = AP$ όμως $AP = A\Delta + \Delta P = A\Delta + \Gamma\Sigma$.

Δηλαδή το ζητούμενο.

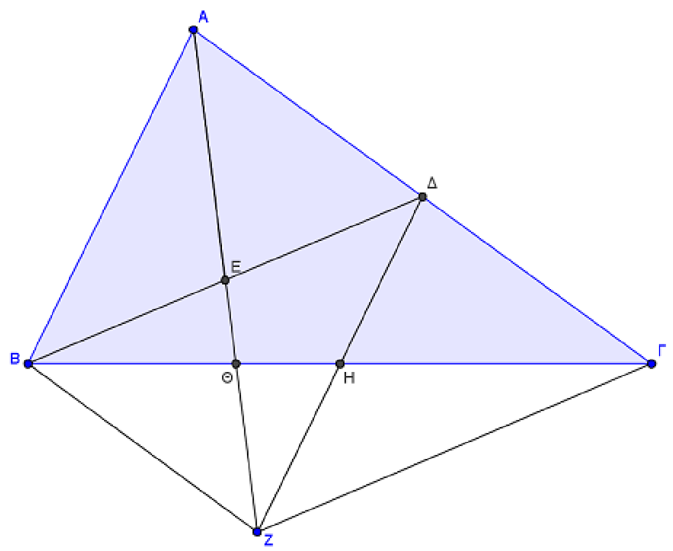
ΘΕΜΑ 4619

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και E το μέσο της διαμέσου $B\Delta$. Στην προέκταση της AE θεωρούμε σημείο Z τέτοιο ώστε $EZ = AE$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $ABZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Το τετράπλευρο $B\Delta\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.



γ) Το σημείο Θ είναι βαρύκεντρο του τριγώνου $B\Delta Z$.

Λύση:

α) Το σημείο E είναι μέσο των $B\Delta$ και AZ. Άρα το τετράπλευρο $ABZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοι του διχοτομούνται.

β) Από το παρ/μο $ABZ\Delta$ ισχύει $BZ // = A\Delta \Leftrightarrow BZ // = \Delta\Gamma$ αφού $A\Delta = \Delta\Gamma$.

Έτσι το $B\Delta\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Έστω το σημείο H είναι το κέντρο του $B\Delta\Gamma Z$, τότε το H είναι μέσο της $B\Gamma$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

Στο τρίγωνο $B\Delta Z$ οι BH, ZE είναι διάμεσοι που τέμνονται στο Θ, οπότε το Θ είναι βαρύκεντρο του τριγώνου $B\Delta Z$.

Σημείωση: Η εκφώνηση δεν αναφέρει ποιο σημείο είναι το Θ, ευτυχώς υπήρχε το σχήμα.

ΘΕΜΑ 4622

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του ΓE. Στην προέκταση της ΓB (προς το B) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $B\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$. Αν η ευθεία ΔE τέμνει την $A\Gamma$ στο Z και $Z\Theta \parallel B\Gamma$:

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισοσκελές και το τρίγωνο $A\Theta Z$ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 10)

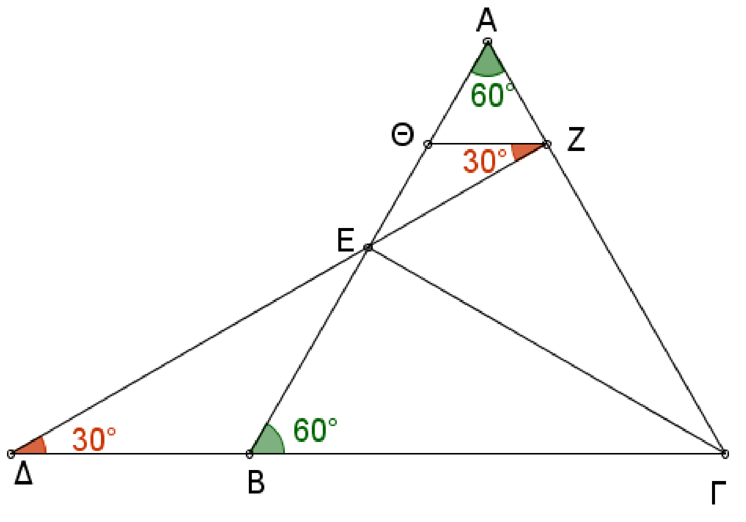
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΘEZ. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι $AE = 2\Theta Z$. (Μονάδες 5)

δ) Να αποδείξετε ότι $3AB = 4\Theta B$. (Μονάδες 5)

Λύση:

α) Το ύψος ΓE είναι και διάμεσος κι επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$



είναι ισόπλευρο θα είναι: $\text{BE}=\frac{\text{B}\Gamma}{2}=\text{B}\Delta$, οπότε το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισοσκελές.

Επειδή $\text{Z}\Theta \parallel \text{B}\Gamma$, το τρίγωνο $A\Theta Z$ θα είναι ισογώνιο με το $AB\Gamma$, δηλαδή και το $A\Theta Z$ είναι ισόπλευρο.

β) $\text{E}\hat{\Theta}\text{Z}=120^0$ (παραπληρωματική της γωνίας $\text{A}\hat{\Theta}\text{Z}=60^0$)

$\Theta\text{ZE}=\text{B}\hat{\Delta}\text{E}$ (ως εντός εναλλάξ). Αλλά $\text{AB}\Gamma=2\text{B}\hat{\Delta}\text{E}$ (ως εξωτερική γωνία στο τρίγωνο $BE\Delta$). Οπότε $\Theta\text{ZE}=30^0$ και κατά συνέπεια $\Theta\text{EZ}=30^0$

γ) $\Theta\text{EZ}=\Theta\text{ZE} \Leftrightarrow \Theta\text{E}=\Theta\text{Z}$. Οπότε: $\text{AE}=\text{A}\Theta+\Theta\text{E} \Leftrightarrow \text{AE}=2\Theta\text{Z}$

δ) $\Theta\text{B}=\Theta\text{E}+\text{EB}=\frac{\text{AE}}{2}+\text{AE}=\frac{3}{2}\text{AE}=\frac{3}{4}\text{AB} \Leftrightarrow 3AB=4\Theta B$.

ΘΕΜΑ 4626

Σε μια ευθεία (ε) θεωρούμε διαδοχικά τα σημεία A,B,Γ έτσι ώστε $\text{AB}=2\text{B}\Gamma$ και στο ίδιο ημιεπίπεδο θεωρούμε ισόπλευρα τρίγωνα $\text{AB}\Delta$ και $\text{B}\Gamma\text{E}$. Αν H είναι το μέσο του $A\Delta$ και η ευθεία ΔE τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο Z να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $BH\Delta E$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΓZE είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

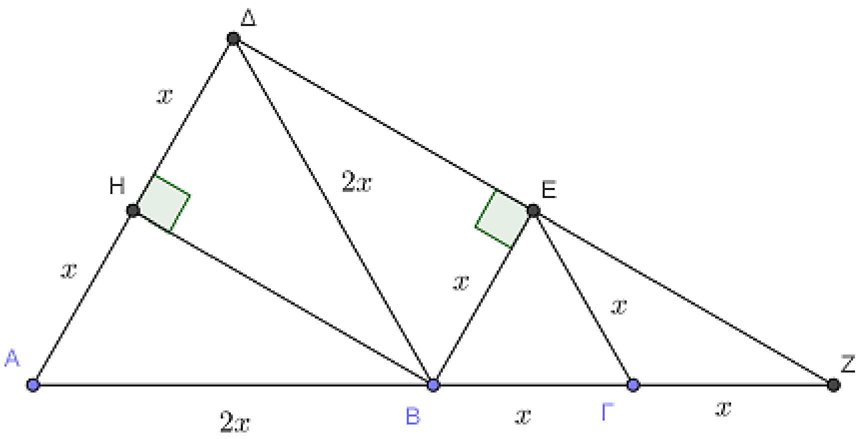
γ) Το τετράπλευρο $HE\Gamma A$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)

Λύση:

α) Έστω $AB=2x$ τότε και $A\Delta=B\Delta=2x$ και $B\Gamma=BE=\Gamma E=AH=H\Delta=x$

Το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο άρα $A\Delta B=60^o$ και

$\Delta BE=180^o-AB\Delta-EB\Gamma=180^o-60^o-60^o=60^o$, άρα



$H\Delta // BE$ αφού σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ ίσες. Οπότε το ΗΔΕΒ είναι ορθογώνιο.

Το ΒΗ είναι διάμεσος στο ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Delta$ άρα και ύψος όποτε το $H\Delta BE$ είναι ορθογώνιο.

β) $\Gamma EZ = 90^o - BE\Gamma = 90^o - 60^o = 30^o$ και $\hat{Z} = 90^o - \hat{A} = 90^o - 60^o = 30^o$

Άρα το τρίγωνο ΓZE είναι ισοσκελές

γ) Το τρίγωνο ΔBZ είναι ισοσκελές και ΒΕ είναι ύψος άρα και διάμεσος. Άρα το ΗΕ ενώνει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου $A\Delta Z$ άρα είναι παράλληλο στην ΑΖ δηλαδή το ΗΕΓΑ είναι τραπέζιο και επειδή $HA = E\Gamma = x$ είναι και ισοσκελές.

ΘΕΜΑ 4630

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και K το σημείο τομής των διαγωνίων του. Φέρνουμε την ΑΗ κάθετη στη $B\Delta$ και στην προέκταση της ΑΗ (προς το Η) Θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε $AH = HE$. Να αποδείξετε ότι:

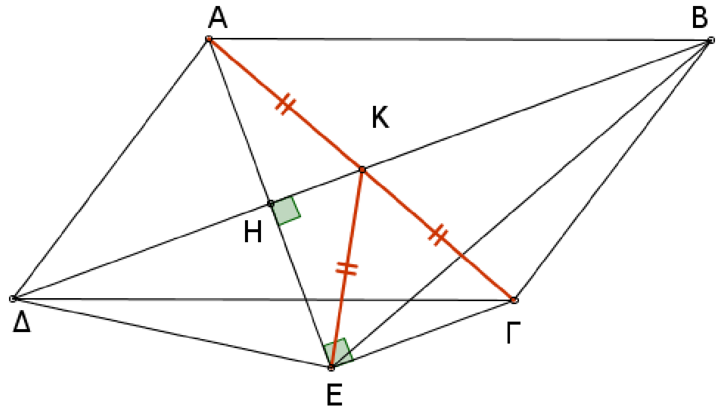
α) Το τρίγωνο ΑΚΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Το τρίγωνο $AE\Gamma$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

γ) Το τετράπλευρο $\Delta B\Gamma E$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)

Λύση:

α) Το τρίγωνο AKE είναι ισοσκελές αφού η KH είναι μεσοκάθετος της AE.



β) Επειδή το K διχοτομεί τις διαγώνιες του παραλληλογράμμου και, λόγω του προηγούμενου ερωτήματος, θα είναι $\mathrm{K\Gamma = KA = KE}$. Στο τρίγωνο $AE\Gamma$ λοιπόν, η διάμεσος είναι το μισό της πλευράς που αντιστοιχεί, άρα θα είναι ορθογώνιο.

γ) Φέρνουμε τις $E\Delta, BE$. $E\Gamma \parallel B\Delta$ (είναι κάθετες στην ίδια ευθεία AE.

Η $\mathrm{\Delta E}$ δεν μπορεί να είναι παράλληλη στη $B\Gamma$, αφού $\Delta A \parallel B\Gamma$, άρα το τετράπλευρο $\Delta B\Gamma E$ είναι τραπέζιο.

Επειδή το B είναι σημείο της μεσοκαθέτου του AE θα είναι $AB = BE$, οπότε $BE = \Delta\Gamma$. Δηλαδή οι διαγώνιοι του τραπεζίου είναι ίσες που σημαίνει ότι το $\Delta B\Gamma E$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

ΘΕΜΑ 4635

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με τη γωνία A ορθή και $\hat{\mathrm{B}} = 2\hat{\Gamma}$. Φέρουμε το ύψος του $\mathrm{A\Delta}$ και σημείο E στην προέκταση της AB τέτοιο ώστε $\mathrm{BE = B\Delta}$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\mathrm{B\Delta E}$. (Μονάδες 9)

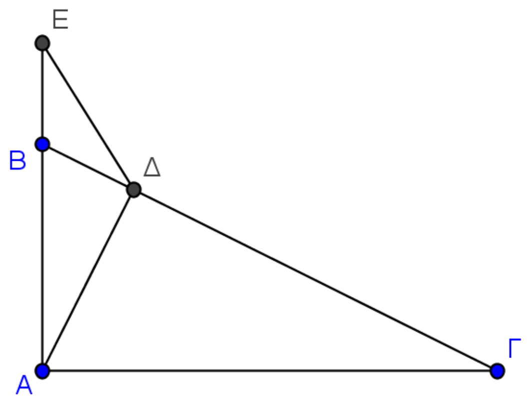
β) Να αποδείξετε ότι:

i. $\mathrm{BE} = \dfrac{\mathrm{AB}}{2}$. (Μονάδες 8)

ii. $\mathrm{AE = \Gamma\Delta}$. (Μονάδες 8)

Λύση:

α) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και αφού $\hat{B}=2\hat{\Gamma}$ άρα $\hat{B}=60^0$ και $\hat{\Gamma}=30^0$. Η γωνία $EB\Delta$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $AB\Gamma$ της $\hat{B}$ οπότε είναι $EB\Delta=120^0$. Το τρίγωνο $E\Delta B$ είναι ισοσκελές ($BE=B\Delta$) οπότε $E\Delta B=\hat{E}=30^0$.



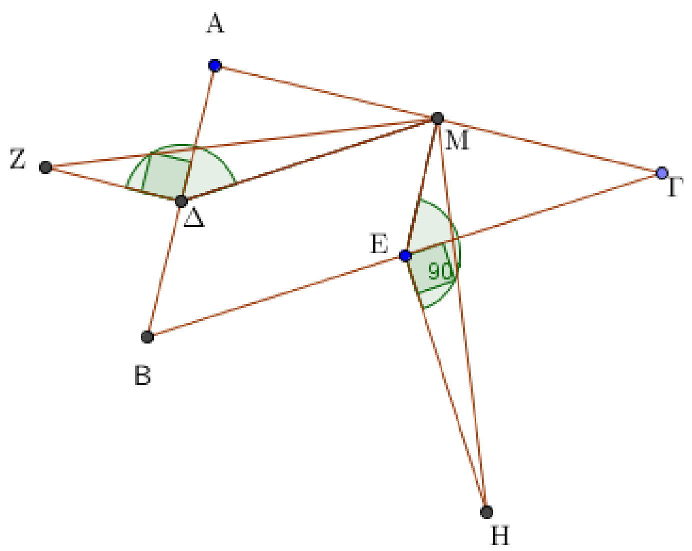
β) i) Είναι $BE=B\Delta=\frac{BA}{2}$ αφού $A\Delta B$ τρίγωνο ορθογώνιο και $BA\Delta=30^0$.

ii) Είναι $AE=AB+BE=AB+\frac{BA}{2}=\frac{3BA}{2}$ και

$\Gamma\Delta=B\Gamma-B\Delta=2AB-BE=2AB-\frac{BA}{2}=\frac{3BA}{2}$, (αφού $\hat{\Gamma}=30^0$).

ΘΕΜΑ 4640

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ οξείες και Δ, M και E τα μέσα των πλευρών του $AB, A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Στις μεσοκάθετες των AB και $B\Gamma$ και εκτός του τριγώνου $AB\Gamma$ θεωρούμε σημεία Z και H αντίστοιχα, τέτοια ώστε $\Delta Z=\frac{AB}{2}$ και $EH=\frac{B\Gamma}{2}$.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο $B\Delta ME$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 5)

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

ii. Τα τρίγωνα $Z\Delta M$ και EMH είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Αν τα σημεία Z, Δ, E είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι η γωνία $A = 90^o$.

(Μονάδες 10)

Λύση:

α) i.) Γνωρίζουμε ότι Δ, M είναι μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα άρα: $\Delta M = \frac{B\Gamma}{2} = BE$. Ομοίως $ME = \frac{AB}{2} = \Delta B$, συνεπώς δείξαμε ότι το τετράπλευρο ΔMEB έχει τις απέναντι πλευρές ίσες άρα είναι παραλληλόγραμμο.

ii.) Στο παραλληλόγραμμο ΔMEB οι γωνίες $A\Delta M, \Delta BE, ME\Gamma$ είναι ίσες καθώς είναι εντός εκτός και επί τα αυτά διαδοχικά με την σειρά που δίνονται.

Άρα : $Z\hat{\Delta}M = Z\hat{\Delta}A + A\hat{\Delta}M = \Gamma\hat{E}H + M\hat{E}\Gamma = M\hat{E}H \, (1)$.

Γνωρίζουμε ότι: $\Delta Z = \frac{AB}{2} = \Delta B = ME \, (2)$.

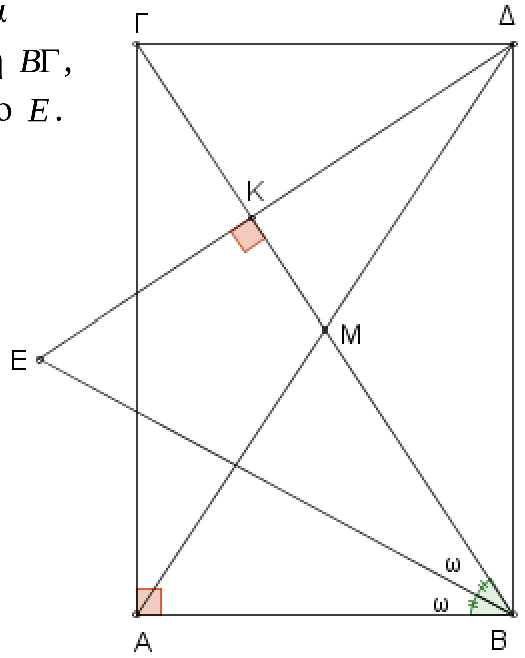
$EH = \frac{B\Gamma}{2} = BE = \Delta M \, (3)$.

Από τις παραπάνω σχέσεις (1), (2), (3) συμπεραίνουμε ότι ισχύει το κριτήριο ισότητας τριγώνων εκείνο των δύο πλευρών και περιεχόμενων αυτών γωνιών, άρα είναι ίσα.

β) Αν τα σημεία Z, Δ, E είναι συνευθειακά τότε το ευθύγραμμο τμήμα ΔE που ενώνει τα μέσα των πλευρών είναι παράλληλο προς την πλευρά $A\Gamma$, άρα η γωνία $BA\Gamma$ είναι εντός εναλλάξ της γωνίας $Z\Delta A$ και ορθή αφού το ευθύγραμμο τμήμα $Z\Delta$ ανήκει στην μεσοκάθετο.

ΘΕΜΑ 4643

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($A = 90^0$). Φέρουμε τη διάμεσό του $ΑΜ$ την οποία προεκτείνουμε προς το $Μ$ κατά τμήμα $MΔ = AM$. Θεωρούμε ευθεία $ΔK$ κάθετη στη $BΓ$, η οποία τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας B στο E. Να αποδείξετε ότι:



α) Το τετράπλευρο $ΑΒΔΓ$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

β) $ΚΕΒ = 90^0 - \frac{Β}{2}$. (Μονάδες 8)

γ) $ΔE = BΔ$. (Μονάδες 9)

Λύση:

α) Οι διαγώνιες του τετραπλεύρου $ΑΒΔΓ$ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο κι επειδή έχει μία γωνία ορθή, θα είναι ορθογώνιο.

β) Είναι $\omega = \frac{Β}{2}$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΚΕΒ$: $ΚΕΒ = 90^0 - \omega \Leftrightarrow ΚΕΒ = 90^0 - \frac{Β}{2}$.

γ) $ΔΒΕ = 90^0 - ΕΒΑ = 90^0 - \omega \Leftrightarrow ΔΒΕ = 90^0 - \frac{Β}{2}$.

Άρα: $ΔΕΒ = ΔΒΕ \Leftrightarrow ΔΕ = ΒΔ$.

ΘΕΜΑ 4645

Στο παρακάτω τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ ισχύουν: $ΑΔ = ΒΓ$, $ΑΓ = ΒΔ$, και $ΑΒ < ΓΔ$.

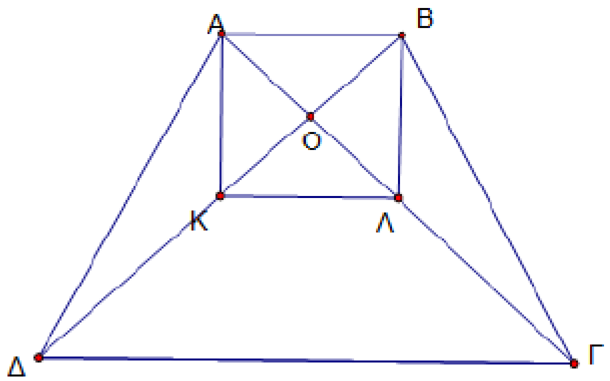
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΟΒ$ και $ΔΟΓ$ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 8)

γ) Αν επιπλέον ισχύει ότι $ΓΔ = 3ΑΒ$ και $Κ, Λ$ τα μέσα των διαγωνίων $ΒΔ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΑΒΛΚ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

Λύση:

α) Τα τρίγωνα $ΑΔΓ$ και $ΔΒΓ$ είναι ίσα μεταξύ τους καθώς έχουν τρείς πλευρές ίσες. Τις $ΑΔ = ΒΓ$, $ΑΓ = ΒΔ$ και την πλευρά $ΔΓ$ κοινή.



Συνεπώς έχουμε: $Β\hat{Δ}Γ = Α\hat{Γ}Δ$, άρα το τρίγωνο $ΔΟΓ$ είναι ισοσκελές.

Τα τρίγωνα $ΑΔΒ$ και $ΑΒΓ$ είναι ίσα μεταξύ τους καθώς έχουν τρείς πλευρές ίσες. Τις $ΑΔ = ΒΓ$, $ΑΓ = ΒΔ$ και την πλευρά $ΑΒ$ κοινή.

Συνεπώς έχουμε: $Β\hat{Α}Γ = Α\hat{Β}Δ$, άρα το τρίγωνο $ΑΟΒ$ είναι ισοσκελές.

β) Οι γωνίες $ΑΟΒ$ και $ΔΟΓ$ είναι ίσες ως κατακορυφήν , τα τρίγωνα $ΑΟΒ$ και $ΔΟΓ$ στα οποία περιέχονται είναι ισοσκελή, άρα οι γωνίες των βάσεων τους είναι ίσες. Συνεπώς $Β\hat{Α}Ο = Ο\hat{Γ}Δ$ το οποίο σημαίνει ότι οι εντός εναλλάξ γωνίες που σχηματίζονται είναι ίσες άρα $ΑΒ // ΔΓ$ και το τετράπλευρο είναι τραπέζιο.

Όμοια οι $ΑΔ$, $ΒΓ$ δεν είναι παράλληλες γιατί αν ήσαν παράλληλες τότε το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ θα ήταν παραλληλόγραμμο . Άρα θα είχαμε $ΑΒ=ΔΓ$, ΑΤΟΠΟ γιατί από την υπόθεση έχουμε $ΑΒ<ΔΓ$.

γ) Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος του τραπεζίου διέρχεται από τα μέσα $Κ, Λ$ των διαγωνίων του είναι παράλληλη με τις βάσεις του και ότι $ΚΛ = \frac{ΔΓ - ΑΒ}{2} = \frac{3ΑΒ - ΑΒ}{2} = ΑΒ$. Άρα το τετράπλευρο $ΑΒΛΚ$ είναι παραλληλόγραμμο. Συγκρίνοντας τα τρίγωνα $ΑΟΒ$ και $ΚΟΛ$ διαπιστώνουμε ότι είναι ίσα καθώς $AB = K\Lambda$, $B\hat{A}O = O\hat{\Lambda}K$ και $A\hat{B}O = O\hat{K}\Lambda$ ως εντός εναλλάξ, είναι ισοσκελή άρα οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου είναι ίσες συνεπώς το παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο.

ΘΕΜΑ 4646

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^0$) και $\Gamma = 30^0$ με M, N τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Έστω ότι η μεσοκάθετος της $B\Gamma$ τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο E.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) Η BE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$. (Μονάδες 6)

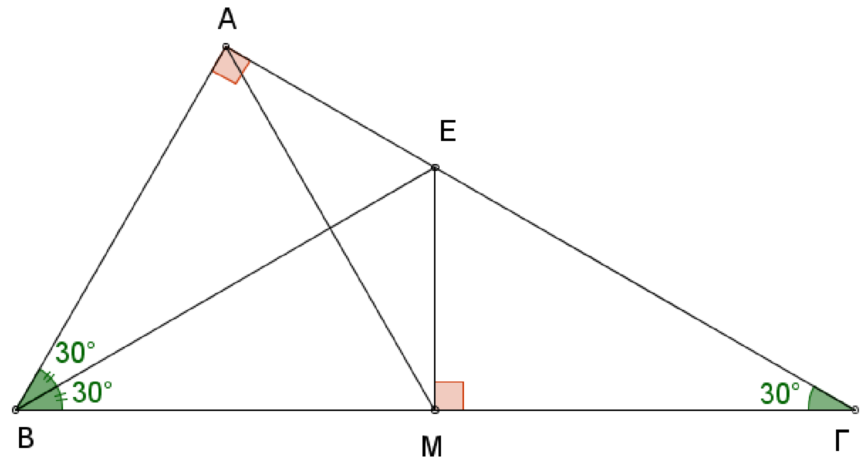
ii) $AE = \dfrac{\Gamma E}{2}$. (Μονάδες 6)

iii) Η BE είναι μεσοκάθετος της διαμέσου AM. (Μονάδες 7)

β) Αν η $A\Delta$ είναι το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ που τέμνει τη BE στο H, να αποδείξετε ότι τα σημεία M, H και N είναι συνευθειακά. (Μονάδες 6)

Λύση:

α) i) $B = 60^0$. Το τρίγωνο $EB\Gamma$ είναι ισοσκελές επειδή η EM είναι μεσοκάθετος της $B\Gamma$. Άρα: $E\hat{\Gamma}B = EB\Gamma = EBA = 30^0$

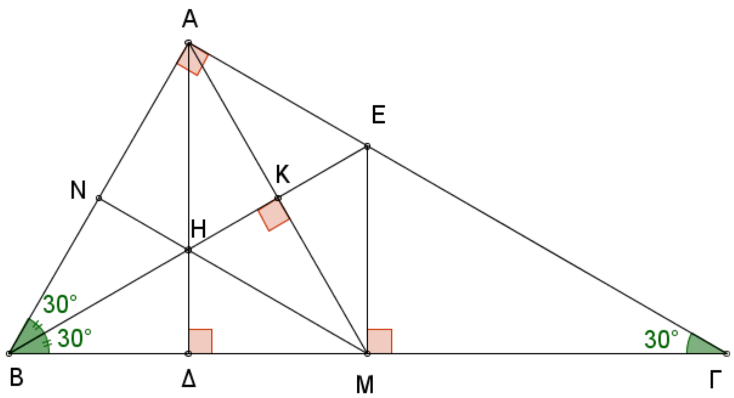


http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

ii) Επειδή το E είναι σημείο της διχοτόμου BE της γωνίας B θα ισαπέχει από τις πλευρές της, οπότε: $AE=EM$. Αλλά από το ορθογώνιο τρίγωνο $EM\Gamma$ έχουμε: $\hat{\Gamma}=30^0 \Leftrightarrow \text{EM}=\dfrac{\text{E}\Gamma}{2}$. Οπότε: $\text{AE}=\dfrac{\text{E}\Gamma}{2}$.

iii) $AB=BM$ (διότι η AB είναι απέναντι από γωνία 30^{o} στο ορθογώνιο τρίγωνο $\text{AB}\Gamma$ και άρα $\text{AB}=\dfrac{\text{B}\Gamma}{2}=\text{BM}$). Άρα στο ισοσκελές τρίγωνο BAM, η BE που διχοτομεί τη γωνία B θα είναι μεσοκάθετος της AM.

β) Έστω ότι η BE τέμνει την AM στο K. Τα $A\Delta, BK$ είναι ύψη του τριγώνου BAM, άρα H είναι το ορθόκεντρο. Αρκεί να δείξουμε ότι MN είναι το τρίτο ύψος του τριγώνου.



Πράγματι, $MN \parallel A\Gamma$ (ενώνει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου) κι επειδή

$\text{A}=90^0 \Leftrightarrow \text{MN}\perp\text{AB}$.

ΘΕΜΑ 4648

Από εξωτερικό σημείο P ενός κύκλου φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA, PB και τη διακεντρική ευθεία PO που τέμνει τον κύκλο στα Δ, Γ αντίστοιχα. Η εφαπτομένη του κύκλου στο Γ τέμνει τις προεκτάσεις των PA, PB στα E, Z αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι:

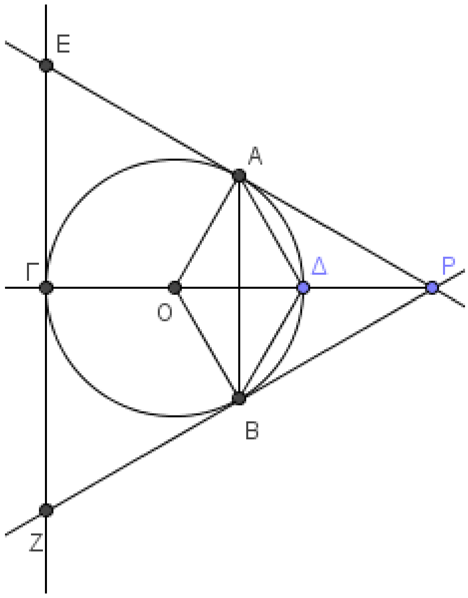
i) $\Delta AP=\Delta BP$.

ii) $EA=ZB$.

iii) Το τετράπλευρο $ABZE$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση:

i) Συγκρίνουμε αρχικά τα τρίγωνα $\mathrm{A\overset{\triangle}{O}P}$ και $\mathrm{B\overset{\triangle}{O}P}$.



Αυτά είναι ορθογώνια και επιπλέον έχουν $PA=PB$ ως εφαπτόμενα τμήματα και OP κοινή άρα είναι ίσα. Επομένως $APO=BPO$.

Θα συγκρίνουμε τώρα τα τρίγωνα $_{\triangle}AP\Delta$ και $BP\Delta$. Αυτά έχουν $PA=PB$,την $P\Delta$ κοινή και όπως δείξαμε στην προηγούμενη σύγκριση $AP\Delta=BP\Delta$ επομένως από Π-Γ-Π είναι ίσα κι έτσι $\mathrm{\Delta AP=\Delta BP}$.

ii) Γνωρίζουμε ότι $PA=PB$.Επίσης η $P\Delta$ που περνά και από τα O,Γ είναι κάθετη στην EZ επειδή η τελευταία είναι εφαπτόμενη του κύκλου στο Γ και η $P\Gamma$ ταυτίζεται με την ακτίνα $O\Gamma$ στο τμήμα αυτό.

Όμως η $P\Gamma$ είναι και διχοτόμος της γωνίας EPZ όπως δείξαμε παραπάνω άρα το τρίγωνο EPZ είναι ισοσκελές κι έτσι $EP=ZP$.Αφαιρώντας κατά μέλη με την $PA=PB$ προκύπτει $EA=ZB$.

iii) Οι EA,ZB δεν είναι παράλληλες αφού τέμνονται στο P.

Ακόμη τα τρίγωνα $_{\triangle}ABP$ και EPZ είναι ισοσκελή όπως έχουμε δείξει,με κοινή γωνία κορυφής άρα και οι άλλες δύο γωνίες τους θα είναι ίσες.

Επομένως για παράδειγμα $ABP=EZP$ κι επειδή αυτές οι δύο είναι εντός-εκτός και επί τα αυτά, οι ευθείες AB,EZ θα είναι παράλληλες.

Ακόμη όπως δείξαμε στο ii) ισχύει $EA=ZB$ άρα το τετράπλευρο $ABZE$ είναι όντως ισοσκελές τραπέζιο.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

ΘΕΜΑ 4649

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και η διχοτόμος BE της γωνίας B. Αν $AZ \perp BE$ όπου Z σημείο της $B\Gamma$ και M το μέσον της $A\Gamma$, να αποδείξετε ότι :

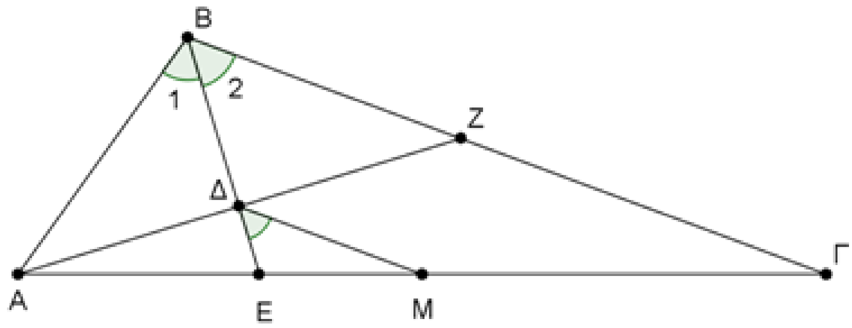
α) Το τρίγωνο ABZ είναι ισοσκελές . (Μονάδες 7)

β) $\Delta M // B\Gamma$ και $\Delta M = \dfrac{B\Gamma - AB}{2}$. (Μονάδες 10)

γ) $E\Delta M = \dfrac{B}{2}$ όπου B η γωνία του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 8)

Λύση:

α) Το τρίγωνο ABZ είναι ισοσκελές , αφού η $B\Delta$ είναι διχοτόμος και ύψος του τριγώνου ABZ .



β) Στο τρίγωνο $AZ\Gamma$ τα Δ, M είναι τα μέσα δυο πλευρών , οπότε $\Delta M // Z\Gamma \Rightarrow \Delta M // B\Gamma$.

Ακόμα : $\Delta M = \dfrac{Z\Gamma}{2} = \dfrac{B\Gamma - BZ}{2} = \dfrac{B\Gamma - AB}{2}$, αφού από το (α) ισχύει $AB = BZ$.

γ) $E\Delta M = B_2 = \dfrac{B}{2}$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $\Delta M // B\Gamma$, τεμνομένων υπό της BE !!

Σχόλιο : Η άσκηση είναι από το σχολικό βιβλίο Γεωμετρίας (αποδεικτική 5 σελ 111)

ΘΕΜΑ 4650

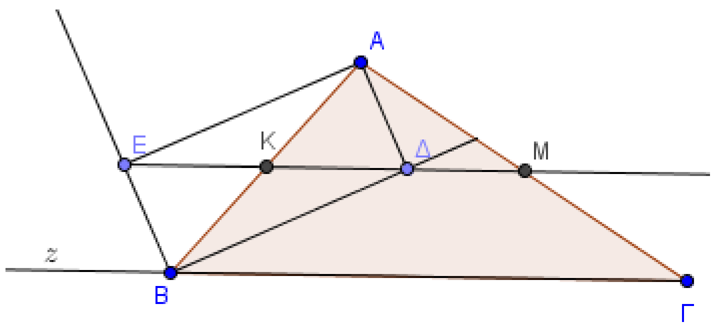
Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ η διχοτόμος Bx της γωνίας $\hat{B}$ και η διχοτόμος By της εξωτερικής γωνίας $\hat{B}$. Αν Δ, E οι προβολές της κορυφής A στις Bx, By αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι:

i) Το τετράπλευρο $A\Delta BE$ είναι ορθογώνιο,

ii) Η ευθεία $E\Delta$ είναι παράλληλη προς τη $B\Gamma$ και διέρχεται από το μέσο M της $A\Gamma$,

iii) Το τετράπλευρο $KM\Gamma B$ είναι τραπέζιο του οποίου η διάμεσος ισούται με $\frac{3a}{4}$ όπου $a = B\Gamma$.

Λύση:



i) Οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{B}_{εξ}$ είναι εφεξής και παραπληρωματικές άρα οι διχοτόμοι τους σχηματίζουν ορθή γωνία. Ακόμη $A\hat{\Delta}B = A\hat{E}B = 90^\circ$ επειδή οι E, Δ είναι προβολές του σημείου A πάνω στις ημιευθείες. Τελικά το τετράπλευρο $A\Delta BE$ έχει τρεις ορθές γωνίες άρα είναι ορθογώνιο.

ii) Ισχύουν $E\Delta = AB$ ως διαγώνιοι ορθογωνίου. Ξέρουμε πως αυτές διχοτομούνται άρα $EK = \frac{E\Delta}{2}$ και $BK = \frac{AB}{2}$ άρα $EK = BK$ κι έτσι το τρίγωνο

$B\hat{K}E$ είναι ισοσκελές. Επομένως $E\hat{B}K = B\hat{E}K = \frac{\hat{B}_{εξ}}{2} = E\hat{B}z$.

Άρα $B\hat{E}K = E\hat{B}Z$ κι επειδή οι γωνίες αυτές είναι εντός εναλλάξ των ευθειών $B\Gamma, E\Delta$ άρα $E\Delta \parallel B\Gamma$.

Επιπλέον η $Ε\Delta$ περνά από το μέσο της AB αφού τα δύο αυτά τμήματα είναι διαγώνιοι παραλληλογράμμου..

Η $Ε\Delta$ είναι παράλληλη μίας πλευράς λοιπόν που περνά από το μέσο της άλλης άρα θα περνά από το μέσο και της τρίτης πλευράς το οποίο είναι το σημείο M.

iii) Έχουμε δείξει ότι $Ε\Delta \parallel B\Gamma$ κι επιπλέον οι $BK, M\Gamma$ δεν είναι παράλληλες αφού τέμνονται στο A.

Άρα το ΚΜΓΒ είναι τραπέζιο. Η διάμεσός του είναι ίση με $\frac{B\Gamma + KM}{2}$. Όμως η KM συνδέει μέσα πλευρών άρα θα είναι ίση με $\frac{B\Gamma}{2}$. Τελικά η διάμεσος του τραπεζίου ισούται με $\frac{B\Gamma + \frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{3B\Gamma}{4} = \frac{3a}{4}$ όπως θέλαμε.

ΘΕΜΑ 4651

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ δίνονται σημεία E, Z, H, Θ στις πλευρές $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ ώστε $AE = \Gamma H$ και $BZ = \Delta\Theta$. Να αποδείξετε ότι:

i) Το τετράπλευρο $AE\Gamma H$ είναι παραλληλόγραμμο,

ii) Το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο,

iii) Τα τμήματα $A\Gamma, B\Delta, EH, Z\Theta$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Λύση:

i) Από το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ παίρνουμε $AB \parallel \Gamma\Delta \Leftrightarrow AE \parallel \Gamma H$ αφού τα σημεία E, H βρίσκονται πάνω στα τμήματα $AB, \Gamma\Delta$. Ακόμη $AE = \Gamma H$ επομένως $AE // = \Gamma H$ κι έτσι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

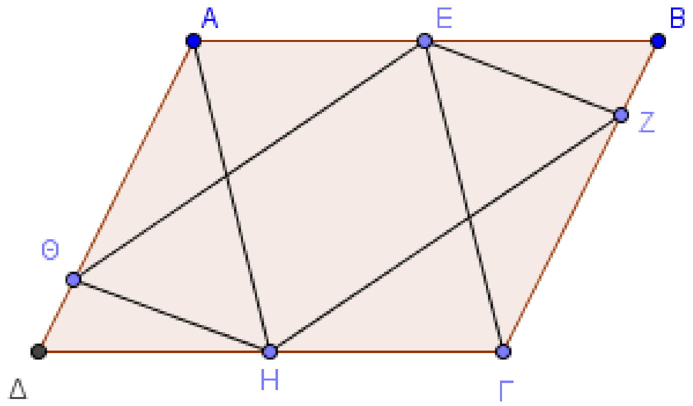
ii) Αφού $A\Delta = B\Gamma$ και $BZ = \Delta\Theta$ με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει $A\Theta = \Gamma Z$.

Ομοίως $EB = \Delta H$.

Τα τρίγωνα $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Theta$ και $\Gamma\hat{\mathrm{H}}\mathrm{Z}$ έχουν $\mathrm{A}\Theta = \Gamma\mathrm{Z}$ και $\Gamma\mathrm{H} = \mathrm{AE}$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

Ακόμη οι γωνίες τους $\hat{H\Gamma Z}$ και $\hat{EA\Theta}$ είναι ίσες ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου.



Επομένως τα δύο τρίγωνα αυτά είναι ίσα από Π-Γ-Π. Ομοίως είναι ίσα τα τρίγωνα $\Delta\hat{H}\Theta$ και $B\hat{E}Z$. Από τις δύο αυτές ισότητες λαμβάνουμε $\Theta E = HZ$ και $EZ = \Theta H$.

Άρα οι απέναντι πλευρές του τετραπλεύρου $EZH\Theta$ είναι ίσες έτσι αυτό είναι παραλληλόγραμμο.

iii) Από τα τρία παραλληλόγραμμα που υπάρχουν στο σχήμα λαμβάνουμε:

Η $B\Delta$ περνά από το μέσο της $A\Gamma$ και μάλιστα το σημείο τομής αυτών των δύο είναι και μέσο της $B\Delta$,

Η EH περνά από το μέσο της $A\Gamma$ και μάλιστα το σημείο τομής των δύο αυτών είναι και μέσο της EH.

Η $Z\Theta$ περνά από το μέσο της EH άρα και από το μέσο της $A\Gamma$.

Άρα όλες περνούν από το ίδιο σημείο που είναι το μέσο της $A\Gamma$.

Υ.Γ. Αν βρεθούν λάθη ας μου το επισημάνει κάποιος.

Υ.Γ.2 Μπορεί και να υπάρχει συντομότερος τρόπος για το ii).

ΘΕΜΑ 4652

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και σημεία K, Λ της διαγωνίου του $B\Delta$, τέτοια ώστε να ισχύει $BK = K\Lambda = \Lambda\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AK\Gamma\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Να αποδείξετε ότι, αν το αρχικό παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος, τότε και το $AK\Gamma\Lambda$ είναι ρόμβος.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

γ) Ποια πρέπει να είναι η σχέση των διαγωνίων του αρχικού παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$ ώστε το $ΑΚΓΛ$ να είναι ορθογώνιο.

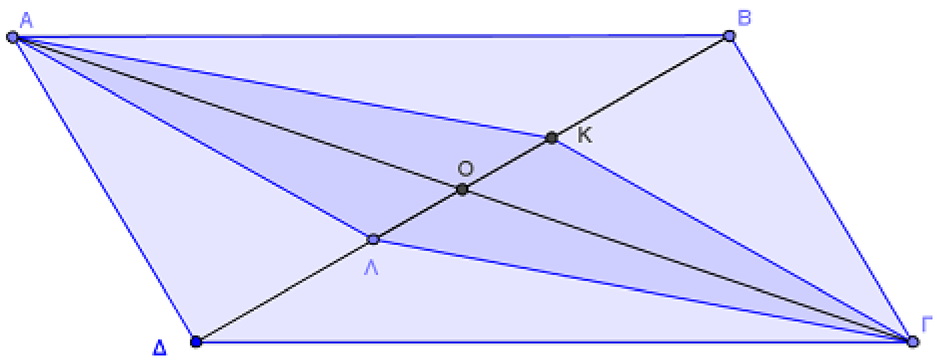
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση:

α) Αν Ο είναι το κέντρο του $ΑΒΓΔ$ τότε $ΟΒ = ΟΔ\,(1)$.

$ΟΚ = ΟΒ - ΒΚ \overset{(1),υποθ.}{\Rightarrow} ΟΚ = ΟΔ - ΛΔ \Rightarrow ΟΚ = ΟΛ$.

Άρα οι διαγώνιοι του $ΑΚΓΛ$ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.



β) Αν το $ΑΒΓΔ$ είναι ρόμβος τότε $ΑΓ \perp ΒΔ \Rightarrow ΑΓ \perp ΚΛ$ άρα το παραλληλόγραμμο $ΑΚΓΛ$ είναι ρόμβος αφού οι διαγώνιοι του τέμνονται κάθετα.

γ) Για να είναι το $ΑΚΓΛ$ ορθογώνιο πρέπει να έχει ίσες διαγώνιους, δηλαδή πρέπει: $ΚΛ = ΑΓ \Leftrightarrow \frac{ΒΔ}{3} = ΑΓ \Leftrightarrow ΒΔ = 3ΑΓ$.

ΘΕΜΑ 4653

Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ και έστω $Ο$ το σημείο τομής των διαγωνίων $ΑΓ, ΒΔ$. Φέρνουμε την $ΑΕ$ κάθετη στη διαγώνιο $ΒΔ$. Εάν $Ζ$ είναι το συμμετρικό του $Α$ ως προς τη διαγώνιο $ΒΔ$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $ΑΔΖ$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

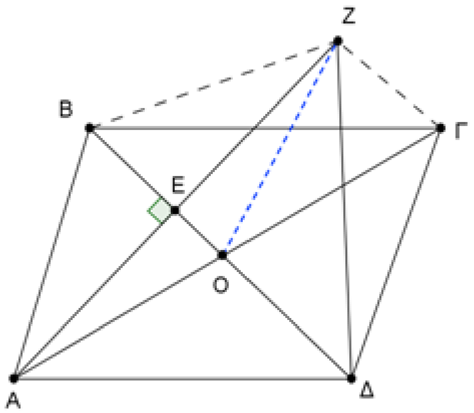
β) $ΖΓ = 2ΟΕ$. (Μονάδες 9)

γ) Το $ΒΔΖΓ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

Λύση:

α) Επειδή $BE \perp AZ$, και το E είναι μέσον της AZ, η BE είναι μεσοκάθετη της AZ κι αφού το Δ είναι σημείο της μεσοκαθέτου , έχουμε $\Delta Z = \Delta A$ άρα το ΔZA είναι ισοσκελές.



β) Στο τρίγωνο $Z\Gamma A$ τα E, O είναι μέσα δυο πλευρών (το O είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου) , οπότε $EO = \dfrac{Z\Gamma}{2} \Rightarrow Z\Gamma = 2EO$.

γ) Από το (β) έχουμε $EO // Z\Gamma \Rightarrow B\Delta // Z\Gamma$ άρα το $B\Delta\Gamma Z$ είναι τραπέζιο.

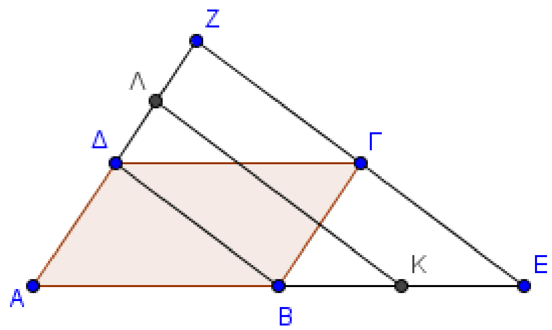
Επιπλέον , $\Gamma\Delta = AB = BZ$ αφού το ABZ είναι ισοσκελές . Άρα είναι ισοσκελές τραπέζιο .

Σχόλιο :

Το ερώτημα (γ) πρέπει να διατυπωθεί ως εξής : Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο με κορυφές B, Z, Γ, Δ είναι ισοσκελές τραπέζιο , διότι ανάλογα με την κατασκευή του σχήματος , αλλάζει η διάταξη των γραμμάτων .

ΘΕΜΑ 4655

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Στην προέκταση της AB παίρνουμε τμήμα $BE = AB$ και στην προέκταση της $A\Delta$ παίρνουμε τμήμα $\Delta Z = A\Delta$.



Να αποδειχθεί ότι:

α) i) Τα τετράπλευρα $B\Delta\Gamma E$ και $B\Delta Z\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμα.

ii) Τα σημεία Z,Γ,E είναι συνευθειακά.

β) Αν K,Λ τα μέσα των $BE,\Delta Z$ αντίστοιχα τότε να αποδειχθεί ότι $K\Lambda \parallel \Delta B$ και $K\Lambda = \frac{3}{2}\cdot \Delta B$.

Λύση:

α) i) Ισχύει $BE = AB = \Gamma\Delta$ από το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$.Ακόμη $AB \parallel \Gamma\Delta$ κι επειδή το E βρίσκεται στην ευθεία AB θα είναι $BE \parallel \Gamma\Delta$.Άρα $BE \,=\!\!\parallel\, \Gamma\Delta$ κι έτσι το τετράπλευρο $B\Delta\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχύει $\Delta Z = A\Delta = B\Gamma$ από το $AB\Gamma\Delta$ που είναι παραλληλόγραμμο. Ακόμη $A\Delta \parallel B\Gamma$ κι επειδή το Z βρίσκεται στην ευθεία $A\Delta$ θα είναι $\Delta Z \parallel B\Gamma$.Τελικά $\Delta Z \,=\!\!\parallel\, B\Gamma$ άρα το τετράπλευρο $B\Delta Z\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

ii) Ισχύουν από τα παραλληλόγραμμα που βρήκαμε παραπάνω $\Gamma E \parallel B\Delta$ και $Z\Gamma \parallel B\Delta$.Από το Γ δεν μπορούμε να φέρουμε δύο διαφορετικές ευθείες παράλληλες προς την $B\Delta$ άρα οι ημιευθείες ΓE και $Z\Gamma$ ανήκουν στην ίδια ευθεία. Έτσι τα σημεία E,Γ,Z είναι συνευθειακά.

β) Ισχύει όπως είδαμε $B\Delta \parallel EZ$ και οι ευθείες ΔZ και BE δεν είναι παράλληλες αφού τέμνονται στο A.Άρα το τετράπλευρο $B\Delta ZE$ είναι τραπέζιο. Η $K\Lambda$ είναι διάμεσός του. Έτσι ισούται $\frac{EZ + B\Delta}{2}$.Όμως $EZ = \Gamma Z + \Gamma E = 2B\Delta$.Επομένως $K\Lambda = \frac{EZ + B\Delta}{2} = \frac{2B\Delta + B\Delta}{2} = \frac{3}{2}\cdot B\Delta$ όπως θέλαμε.

ΘΕΜΑ 4731

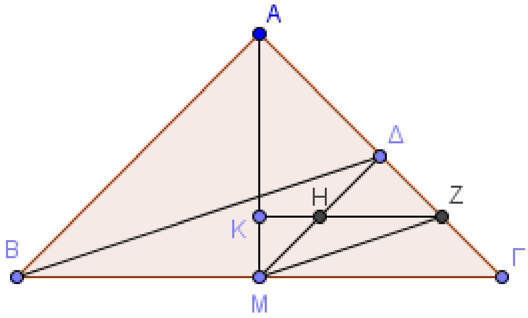
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και το ύψος του AM. Φέρνουμε $M\Delta \perp A\Gamma$ και θεωρούμε το μέσο H του $M\Delta$.Από το H φέρνουμε παράλληλη στη $B\Gamma$ η οποία τέμνει τις $AM, A\Gamma$ στα K,Z αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι:

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

i) $HZ = \frac{B\Gamma}{4}$,

ii) $MZ \parallel B\Delta$,

iii) Η ευθεία AH είναι κάθετη στη $B\Delta$.



Λύση:

i) Ισχύει $HZ \parallel M\Gamma$ κι επειδή το H είναι το μέσο της $M\Delta$, το Z είναι το μέσο του $\Gamma\Delta$ και $HZ = \frac{M\Gamma}{2}$.

Όμως το AM είναι, ως ύψος ισοσκελούς που βαίνει στη βάση, και διάμεσος κι έτσι $M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow HZ = \frac{M\Gamma}{4}$.

ii) Βλέπουμε πως η MZ περνά από τα μέσα των $\Gamma\Delta$ και $B\Gamma$ οπότε $MZ \parallel B\Delta$.

iii) Από υπόθεση $M\Delta \perp A\Gamma$ ενώ αφού $ZK \parallel B\Gamma$ και $AM \perp B\Gamma$ θα είναι $ZK \perp AM$. Επομένως το H είναι το ορθόκεντρο του AMZ κι έτσι $AH \perp MZ$.

Όμως από το ερώτημα ii) ισχύει $MZ \perp B\Delta$ άρα $AH \perp B\Delta$.

ΘΕΜΑ 4735

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και $A\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας A για την οποία ισχύει $A\Delta = \Delta\Gamma$. Η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $A\Delta B$ και η ΔZ είναι παράλληλη στην AB. Να αποδείξετε ότι:

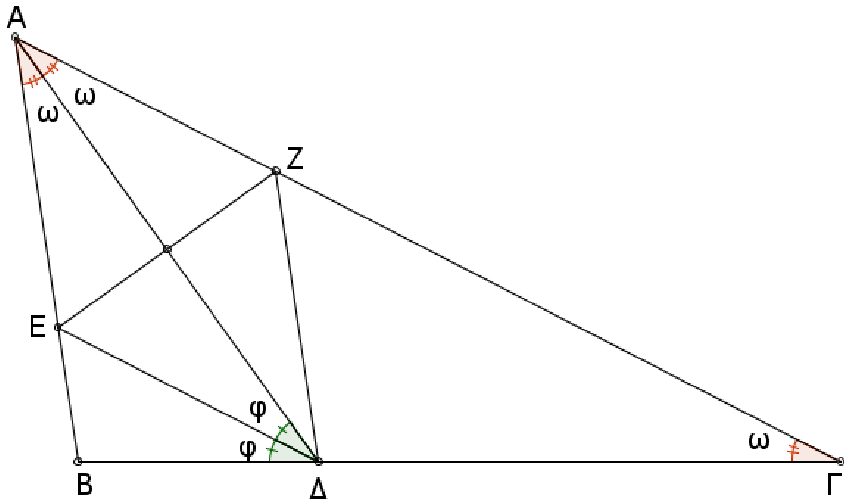
α) Τα τμήματα $E\Delta, A\Gamma$ είναι παράλληλα. (Μονάδες 9)

β) Το τρίγωνο $EA\Delta$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) Τα τμήματα $A\Delta, EZ$ διχοτομούνται. (Μονάδες 8)

Λύση:

α) $E\hat{\Delta}A = E\hat{\Delta}B = \varphi, EA\Delta = \Delta AZ \overset{A\Delta=\Delta\Gamma}{=} \Delta\hat{\Gamma}A = \omega$



$A\hat{\Delta}B = \Delta A\Gamma + \Delta\hat{\Gamma}A$ (ως εξωτερική στο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$).

Άρα: $2\omega = 2\varphi \Leftrightarrow \omega = \varphi \Leftrightarrow E\hat{\Delta}B = A\hat{\Gamma}\Delta \Leftrightarrow$ $E\Delta // A\Gamma$ (επειδή οι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι ίσες).

β) $\omega = \varphi \Leftrightarrow EA\Delta = E\hat{\Delta}A \Leftrightarrow$ $EA = E\Delta$ και το τρίγωνο $EA\Delta$ είναι ισοσκελές.

γ) Το τετράπλευρο $AE\Delta Z$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε τα τμήματα $A\Delta, EZ$ διχοτομούνται.

ΘΕΜΑ 4737

Δίδεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με γωνία $B = 60^0$. Φέρνουμε τα ύψη $A\Delta$ *και* ΓE που τέμνονται στο H. Φέρνουμε KZ διχοτόμο της γωνίας EHA και ΘH κάθετο στο ύψος $A\Delta$. Να αποδείξετε ότι :

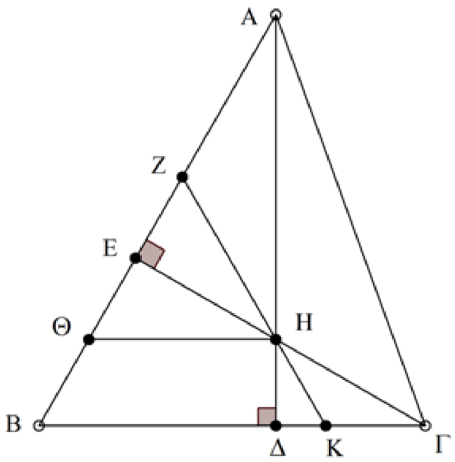
α) Για το τμήμα ZE ισχύει $ZH = 2EZ$. (Μονάδες 9)

β) Το τρίγωνο ΘZH είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

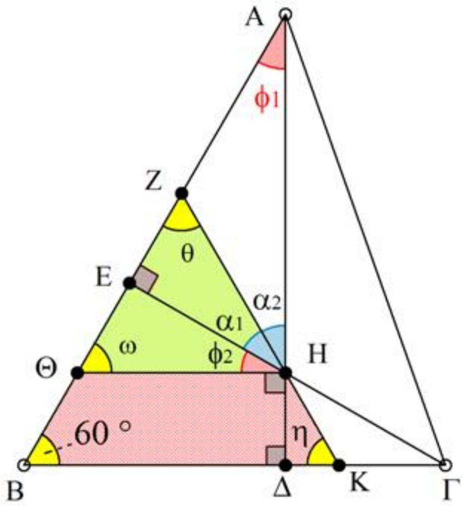
γ) Το τετράπλευρο ΘHKB είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)

Λύση:

Επειδή οι $\Theta H \kappa\alpha\iota B\Gamma$ είναι κάθετες στην $A\Delta$ θα είναι μεταξύ τους παράλληλες



και άρα $\hat{\omega} = B = 60^0$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔAB το άθροισμα των οξειών του είναι 90^0 , συνεπώς $\phi_1 = 30^0$. Όμως $\phi_1 = \phi_2$ γιατί έχουν κάθετες πλευρές και άρα και $\phi_2 = 30^0$. Επειδή όμως το ορθογώνιο τρίγωνο EAH έχει την οξεία του γωνία $\phi_1 = 30^0$ η άλλη οξεία του γωνία θα είναι 60^0 και συνεπώς κάθε μια από τις ίσες , λόγω διχοτόμου, γωνίες $\alpha_1 \, \kappa\alpha\iota \, \alpha_2$ θα είναι από 30^0 , δηλαδή : $\alpha_1 = \alpha_2 = 30^0$.



Στο τρίγωνο ZAH η γωνία $\hat{\theta}$ είναι εξωτερική του και άρα $\hat{\theta} = \phi_1 + \alpha_2 = 30^0 + 30^0 = 60^0$. Μετά απ αυτά αβίαστα προκύπτουν:

α) $ZH = 2EZ$ (η EZ κάθετη πλευρά ορθογωνίου τριγώνου με απέναντι γωνία 30^0).

β) τα τρίγωνα $ZBK \, \kappa\alpha\iota \, Z\Theta H$ είναι ισόπλευρα γιατί έχουν από 2 γωνίες ίσες με 60^0.

γ) Το τραπέζιο ΘHKB είναι ισοσκελές γιατί οι γωνίες της βάσης του BK είναι ίσες, από 60^0 κάθε μία.

ΘΕΜΑ 4741

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Στην προέκταση της AB προς το B παίρνουμε σημείο E ώστε $AE = A\Gamma$. Στην πλευρά $A\Gamma$ θεωρούμε σημείο Δ ώστε $A\Delta = AB$. Αν τα τμήματα ΔE και $B\Gamma$ τέμνονται στο K και προέκταση της AK τέμνει την $E\Gamma$ στο M. Να αποδειχθεί ότι:

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

i) $B\Gamma = \Delta E$,

ii $BK = \Delta K$,

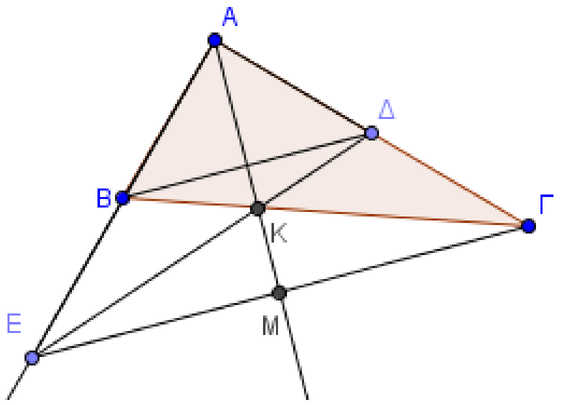
iii) Η AK είναι διχοτόμος της $\angle A$,

iv) Η AM είναι μεσοκάθετος της $E\Gamma$.

Λύση:

i) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $_\triangle AE\Delta$ και $AB\Gamma$.Έχουν $AE = A\Gamma$ και $A\Delta = AB$ (από υπόθεση).Ακόμη έχουν κοινή τη γωνία $\angle A$ όποτε από Π-Γ-Π είναι ίσα.

ii) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $_\triangle B\Gamma\Delta$ και $_\triangle B\Delta E$.Έχουν κοινή την $B\Delta$ και $B\Gamma = \Delta E$ από την ισότητα των τριγώνων του ερωτήματος i).Ακόμη $BE = AE - AB \overset{i)}{=} A\Gamma - AB \overset{i)}{=} A\Gamma - A\Delta = \Delta\Gamma$.Επομένως από Π-Π-Π τα τρίγωνα είναι ίσα κι έτσι $\angle \Gamma B\Delta = \angle B\Delta E$.Επομένως το τρίγωνο $_\triangle BK\Delta$ είναι ισοσκελές κι έτσι $K\Delta = BK$.



iii) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $_\triangle AEK$ και $_\triangle AK\Gamma$.Έχουν κοινή την AK ενώ είναι $AE = A\Gamma$ από υπόθεση. Ακόμη $EK = E\Delta - K\Delta$.Όμως $E\Delta = B\Gamma$ και $K\Delta = BK$ οπότε $EK = B\Gamma - BK = K\Gamma$.Τελικά από Π-Π-Π τα δύο τρίγωνα είναι ίσα κι έτσι $\angle EAK = \angle \Gamma AK$ ή ισοδύναμα η AK είναι διχοτόμος της γωνίας $\angle A$.

iv) Το τρίγωνο $_\triangle AE\Gamma$ είναι ισοσκελές και η AM είναι διχοτόμος της γωνίας της κορυφής άρα είναι και ύψος και διάμεσος και μεσοκάθετος της βάσης.

ΘΕΜΑ 4756

Δίνεται κύκλος(O,ρ) και $A\Gamma$ μια διάμετρός του. Θεωρούμε τις χορδές $A\Delta = B\Gamma$. Έστω K και Λ τα μέσα των χορδών $\Delta\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Οι χορδές AB και $\Delta\Gamma$ είναι παράλληλες.

β) Το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

γ) Η $ΒΔ$ είναι διάμετρος του κύκλου.

δ) Το τετράπλευρο $ΟΛΓΚ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

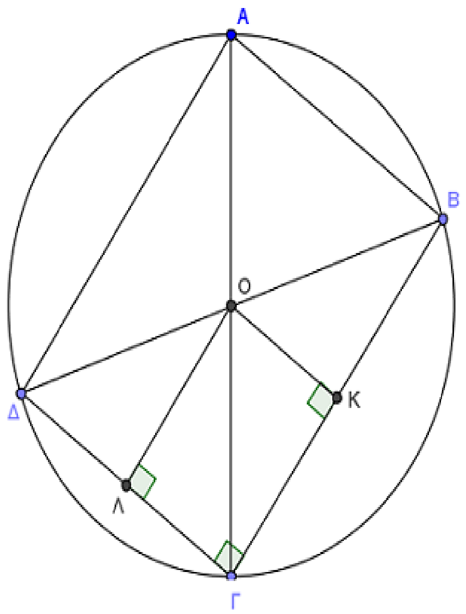
Λύση:

α) Είναι $ΓΑΒ = ΑΓΔ$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στα ίσα τόξα $ΒΓ$ και $ΑΔ$ (αφού οι αντίστοιχες χορδές τους είναι ίσες).

Έτσι $ΑΒ//ΓΔ$ αφού σχηματίζονται εντός εναλλάξ γωνίες ίσες από την τέμνουσα τους $ΑΓ$.

β) Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΑΔΓ$ είναι ίσα αφού έχουν: $ΑΓ$ κοινή πλευρά, $ΑΔ = ΒΓ$ από την υπόθεση και $ΑΒΓ = ΑΔΓ = 90^\circ$ ως εγγεγραμμένες σε ημικύκλια.

Οπότε και $ΑΒ = ΓΔ$.



Έτσι το $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο αφού $ΑΒ//=ΓΔ$ και $ΑΔΓ = 90^\circ$

γ) Αφού το $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο τότε $ΔΓΒ = 90^\circ$ και αφού είναι εγγεγραμμένη θα βαίνει σε ημικύκλιο, δηλαδή η $ΒΔ$ είναι διάμετρος του κύκλου.

δ) Τα τμήματα $ΟΚ, ΟΛ$ είναι αποστήματα των χορδών $ΔΓ$ και $ΒΓ$ αντίστοιχα επειδή τα $Κ$, $Λ$ είναι μέσα των χορδών. Έτσι $ΟΚ \perp ΔΓ$ και $ΟΛ \perp ΒΓ$ δηλαδή το $ΟΛΓΚ$ είναι ορθογώνιο αφού έχει τρείς ορθές γωνίες.

ΘΕΜΑ 4757

Στις πλευρές $Αx'$ και $Αx$ γωνίας $x'Αx$ θεωρούμε σημεία $Β$ και $Γ$ ώστε $ΑΒ = ΑΓ$. Οι κάθετες στις $Αx'$ και $Αx$ στα σημεία $Β$ και $Γ$ αντίστοιχα, τέμνονται στο $Δ$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

Αν οι ημιευθείες Ay και Az χωρίζουν τη γωνία $x'\hat{A}x$ σε τρεις ίσες γωνίες και τέμνουν τις $B\Delta$ και $\Delta\Gamma$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο EAZ είναι ισοσκελές.

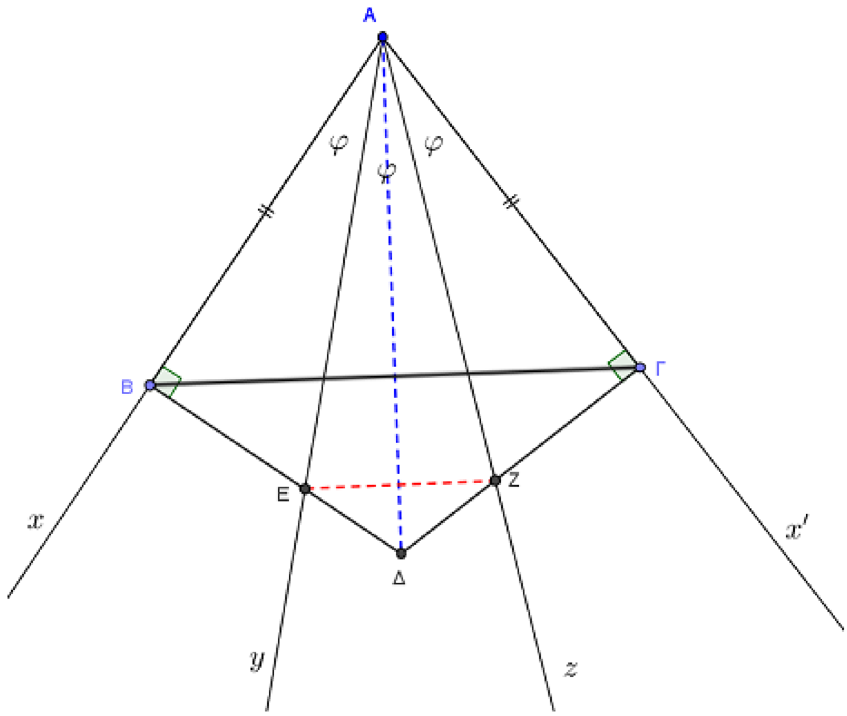
β) Το Δ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $x'\hat{A}x$.

γ) Οι γωνίες $\Gamma B\Delta$ και $\Gamma A\Delta$ είναι ίσες.

Λύση:

α) Έστω $xAy = yAz = zAx' = \varphi$

Τα ορθογώνια τρίγωνα ABE και $A\Gamma Z$ είναι ίσα επειδή έχουν: $AB = A\Gamma$ από την υπόθεση και $xAy = zAx' = \varphi$,



άρα και $AE = AZ$ δηλαδή το τρίγωνο EAZ είναι ισοσκελές.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta\Gamma$ είναι ίσα αφού έχουν:

$AB = A\Gamma$ (κάθετες) και $A\Delta$ κοινή πλευρά (υποτείνουσα)

Έτσι $\Delta B = \Delta\Gamma$, οπότε το Δ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $x'Ax επειδή ισαπέχει από τις πλευρές της.

γ) Το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι εγγράψιμο επειδή $B + \hat{\Gamma} = 90^\circ$ οπότε $\Gamma B\Delta = \Gamma A\Delta$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

Παρατήρηση:

Νομίζω η άσκηση έχει πρόβλημα κατασκευής (τριχοτόμηση γωνίας). Μπορούσαν να δώσουν "Δίνονται τρεις ίσες διαδοχικές γωνίες ...

ΘΕΜΑ 4762

Στο παρακάτω σχήμα το ορθογώνιο $EZH\Theta$ είναι ένα τραπέζι μπιλιάρδου. Ένας παίκτης τοποθετεί μία μπάλα στο σημείο A το οποίο ανήκει στη μεσοκάθετο του ΘH και απέχει από αυτή απόσταση ίση με ΘH. Όταν ο παίκτης χτυπήσει τη μπάλα, αυτή ακολουθεί τη διαδρομή $\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \Gamma \to \Delta \to \mathrm{A}$ χτυπώντας στους τοίχους του μπιλιάρδου $E\Theta, \Theta H, ZH$ διαδοχικά. Για τη διαδρομή αυτή ισχύει ότι κάθε γωνία πρόσπτωσης (π.χ η γωνία ABE είναι ίση με κάθε γωνία ανάκλασης (π.χ. η γωνία $\hat{\Gamma}$) και κάθε μία από αυτές 45^{o}.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) Η διαδρομή $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ της μπάλας είναι τετράγωνο. (Μονάδες 9)

ii) Το σημείο A ισαπέχει από τις κορυφές $\mathrm{E,Z}$ του μπιλιάρδου. (Μονάδες 8)

β) Αν η AZ είναι διπλάσια από την απόσταση του A από τον τοίχο EZ, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AEZ. (Μονάδες 8)

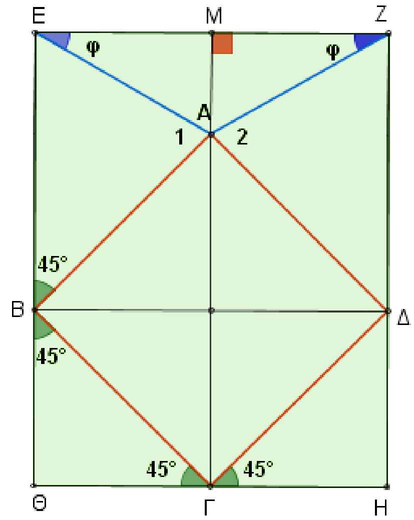
Λύση:

α. i) Από το ισοσκελές τρίγωνο AEZ είναι $\mathrm{EZA} = \mathrm{ZEA} = \varphi \Leftrightarrow \mathrm{BEA} = \Delta\mathrm{ZA} = 90^0 - \varphi$

Εξάλλου είναι $\mathrm{EBA} = \mathrm{Z}\hat{\Delta}\mathrm{A} = 45^0$, οπότε θα είναι και $\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_2$ (άθροισμα γωνιών τριγώνου). Επειδή όμως $AE = AZ$, τα τρίγωνα $AEB, AZ\Delta$ θα είναι ίσα. Άρα $AB = A\Delta$ (1).

Επειδή τώρα κάθε γωνία πρόσπτωσης και κάθε γωνία ανάκλασης είναι ίση με 45^0, προκύπτει άμεσα ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με δύο διαδοχικές πλευρές ίσες (από την (1)). Άρα είναι τετράγωνο.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444



α. ii) Οι πλευρές $EZ, \Theta H$ του μπιλιάρδου έχουν την ίδια μεσοκάθετο, άρα το A ανήκει και στη μεσοκάθετο του EZ, οπότε $AE = AZ$.

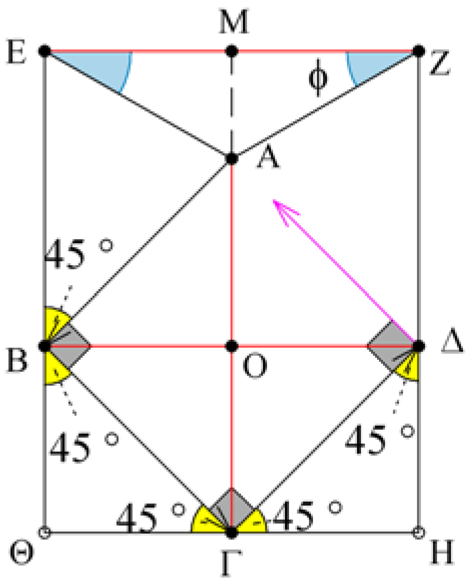
β) Έστω M η ορθή προβολή του A πάνω στην EZ. Από την υπόθεση έχουμε $\mathrm{AM} = \dfrac{\mathrm{AZ}}{2}$. Αλλά το τρίγωνο AMZ είναι ορθογώνιο. Οπότε $\mathrm{AEZ} = \mathrm{AZE} = 30^0$ και κατά συνέπεια $\mathrm{EAZ} = 120^0$.

Παρατήρηση

Το στοιχείο ότι το σημείο A απέχει από τη ΘH απόσταση ίση με ΘH δεν χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη. Ωστόσο, είναι υποχρεωτικό στην κατασκευή του σχήματος.

Θα μπορούσε όμως κάλλιστα, να δοθεί σαν αποδεικτικό ερώτημα.

Μια άποψη (υπάρχουν και άλλες το ίδιο περίπου «επώδυνες» για τους μαθητές λόγω βοηθητικών γραμμών)



α) Πριν χτυπήσουμε την μπάλα φέρνουμε την απόσταση $\mathrm{A\Gamma}$ του A από τη $\mathrm{\Theta H}$ και τη μεσοκάθετο του $\mathrm{A\Gamma}$ η οποία τέμνει την $\mathrm{E\Theta}$ σε σημείο B και τη HZ σε σημείο Δ.

Έστω δε O, το σημείο τομής των $\mathrm{A\Gamma}, \mathrm{B\Delta}$. Στο τετράπλευρο που προέκυψε $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα , είναι ίσες (αφού το τετράπλευρο $\mathrm{B\Theta H\Delta}$ είναι ορθογώνιο και έτσι $\mathrm{B\Delta} = \mathrm{\Theta H} = \mathrm{A\Gamma}$). Τώρα στο ορθογώνιο $\mathrm{B\Theta H\Delta}$ η $\mathrm{A\Gamma}$ είναι μεσοκάθετος στο $\mathrm{\Theta H}$, άρα η μεσοπαράλληλος των $\mathrm{E\Theta}, \mathrm{HZ}$, δηλαδή είναι μεσοκάθετος και στο $ΒΔ$. Δηλαδή στο τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ οι διαγώνιοι διχοτομούνται και είναι ίσες και κάθετοι.

Το τετράπλευρο λοιπόν $ΑΒΓΔ$ είναι ταυτόχρονα ρόμβος και ορθογώνιο άρα και τετράγωνο. Τώρα στο τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ οι διαγώνιοι του θα χωρίζουν τις ορθές γωνίες του σε δύο ίσες γωνίες και κάθε μια ίση με 45^0.

Τότε όμως προφανές οι πλευρές του θα σχηματίζουν με τις $ΕΘ, ΘΗ, ΗΖ$ γωνίες από 45^0. Συνεπώς αν χτυπήσουμε την μπάλα, αυτή με την προϋπόθεση ότι η γωνία προσπτώσεως ισούται με τη γωνία ανακλάσεως και ίση με 45^0 θα ακολουθήση την πορεία $Α \to Β \to Γ \to Δ \to Α$

β) Έστω $Μ$ το σημείο τομής των $ΑΓ, ΕΖ$. Αφού η $ΑΓ$ είναι μεσοκάθετος στο $ΘΗ$ θα είναι μεσοκάθετος και στο $ΕΖ$ και άρα, το $Α$ θα ισαπέχει από τα $Ε, Ζ$.

γ) Αφού $ΑΖ = 2ΑΜ$, στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΜΑΖ$ η γωνία $\hat{\phi} = 30^0$ και αφού το $ΑΕΖ$ είναι ισοσκελές τρίγωνο θα είναι και $ΑΕΖ = 30^0$. Προφανώς δε $ΑΕΖ = 120^0$

ΘΕΜΑ 4767

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $\hat{Α} = 90^o$. Στην πλευρά $ΒΓ$ θεωρούμε τα σημεία $Κ, Μ, Λ$ ώστε $ΒΚ = ΚΜ = ΜΛ = ΛΓ$. Αν τα σημεία $Δ$ και $Ε$ είναι τα μέσα των πλευρών $ΑΒ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $ΔΕΛΚ$ είναι παραλληλόγραμμο (Μονάδες 13)

β) Η διάμεσος του τραπεζίου $ΚΔΑΜ$ ισούται με $\frac{3}{8}ΒΓ$ (Μονάδες 12)

Λύση:

α) Το $ΔΕ$ ενώνει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου $ΑΒΓ$ άρα $ΔΕ \parallel ΒΓ$ και $ΔΕ = \frac{ΒΓ}{2} = ΚΛ$, άρα το τετράπλευρο $ΔΕΛΚ$ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει δυο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες.

β) Έτσι όπως είναι διατυπωμένο το ερώτημα πρέπει να αποδείξουμε ότι το $ΚΔΕΜ$ είναι παραλληλόγραμμο ή εννοείται άραγε; Τέλος πάντων.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

Το $K\Delta$ ενώνει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΑΒΜ άρα $K\Delta \parallel AM$ και $K\Delta = \frac{AM}{2}$. Προφανώς η $A\Delta$ δεν είναι παράλληλη στην ΚΜ, άρα το $K\Delta EM$ είναι τραπέζιο. Έστω δ η διάμεσος του τραπεζίου, τότε:

$$\delta = \frac{\Delta K + AM}{2} = \frac{\frac{AM}{2} + AM}{2} = \frac{3AM}{4} \overset{*}{=} \frac{3B\Gamma}{8}$$

* αφού ΑΜ διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ άρα $AM = \frac{B\Gamma}{2}$.

ΘΕΜΑ 4769

Έστω ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ $(\mathrm{AB}//\Gamma\Delta)$ με $\mathrm{B} = 2\hat{\Gamma}$ και $\mathrm{AB} = \mathrm{B\Gamma} = \mathrm{A\Delta} = \frac{\Gamma\Delta}{2}$.

Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Β, η οποία τέμνει το ΔΓ στο Κ και η κάθετη από το Κ προς το ΒΓ το τέμνει στο Μ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του ΑΒΓΔ.

β) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΑΒΚΔ είναι ρόμβος.

ii. Το σημείο Μ είναι το μέσο του ΒΓ.

Λύση:

α) Είναι $\mathrm{B} = 2\hat{\Gamma}$ και $\mathrm{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ ως εντός και επί τα αυτά

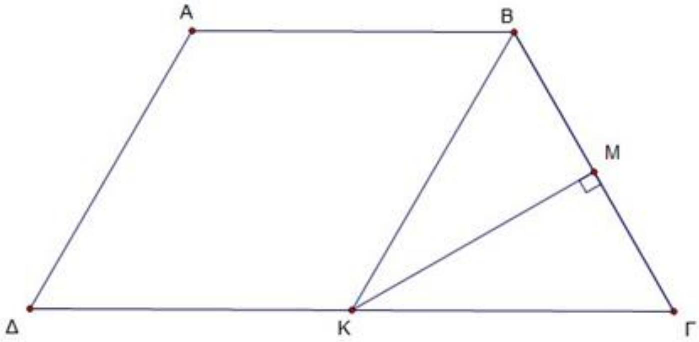
Έτσι $2\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow \hat{\Gamma} = 60^\circ$ και $\mathrm{B} = 2\hat{\Gamma} \Rightarrow \mathrm{B} = 120^\circ$.

Οπότε $\mathrm{A} = \mathrm{B} = 120^\circ$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 60^\circ$ αφού το τραπέζιο είναι ισοσκελές και οι γωνίες των βάσεων του είναι ίσες.

β) i. Η ΒΚ είναι η διχοτόμος της Β έτσι $\mathrm{KB\Gamma} = \frac{\mathrm{B}}{2} = 60^\circ$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

Το τρίγωνο $\mathrm{BK\Gamma}$ είναι ισόπλευρο αφού έχει $\mathrm{KB\Gamma} = \hat{\Gamma} = 60^\circ$, άρα



$\mathrm{BK} = \mathrm{K\Gamma} = \mathrm{B\Gamma} = \dfrac{\Gamma\Delta}{2}$ (από την υπόθεση).

Αφού ισχύει $\mathrm{K\Gamma} = \dfrac{\Gamma\Delta}{2}$ το K είναι μέσο του $\Delta\Gamma$, έτσι:

$\mathrm{BK} = \mathrm{K\Delta} = \mathrm{A\Delta} = \mathrm{AB} = \dfrac{\Gamma\Delta}{2}$ οπότε το $\mathrm{ABK\Delta}$ είναι ρόμβος διότι έχει και τις τέσσερεις πλευρές του ίσες.

ii) Αφού το τρίγωνο $\mathrm{BK\Gamma}$ είναι ισόπλευρο και το KM είναι ύψος άρα θα είναι και διάμεσος, οπότε το σημείο M είναι μέσον του $\mathrm{B\Gamma}$.

ΘΕΜΑ 4771

Έστω τετράγωνο $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ και M το μέσο της πλευράς $\Delta\mathrm{A}$. Προεκτείνουμε το τμήμα $\Delta\mathrm{A}$ (προς την πλευρά του A) κατά τμήμα $\mathrm{AN} = \dfrac{\mathrm{A\Delta}}{2}$. Φέρουμε τα τμήματα $\Gamma\mathrm{M}$ και BN και θεωρούμε τα μέσα τους K και Λ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $\mathrm{MNB\Gamma}$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Το τετράπλευρο $\mathrm{A\Delta K\Lambda}$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Το τετράπλευρο $\mathrm{AMK\Lambda}$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση:

α) Αν α είναι η πλευρά του τετραγώνου τότε:

$$\mathrm{MN} = \mathrm{MA} + \mathrm{AN} \Leftrightarrow \mathrm{MN} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \mathrm{MN} = \alpha .$$

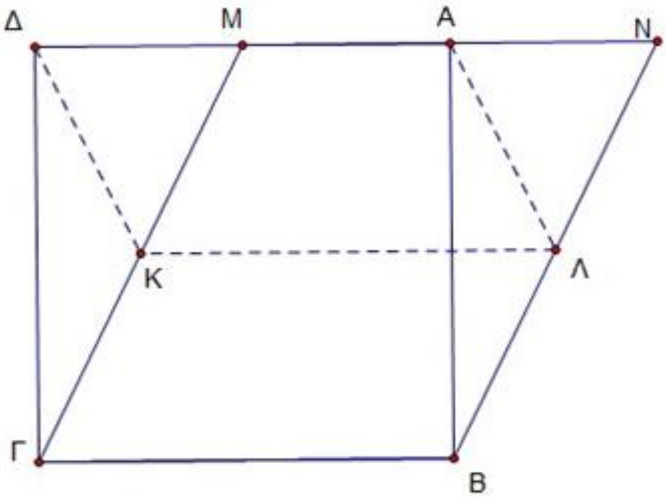
Άρα το $\mathrm{MNB\Gamma}$ είναι παραλληλόγραμμο αφού $\mathrm{MN} // = \mathrm{B\Gamma} (= \alpha)$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

β) Το $MN\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο επειδή $MK//=N\Lambda$ ως μισά των ίσων και παραλλήλων τμημάτων $M\Gamma, NB$

έτσι $K\Lambda//=MN \overset{MN=A\Delta}{\Leftrightarrow} K\Lambda//=A\Delta$ οπότε

το $A\Delta K\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο.



γ) $A\Lambda=\dfrac{BN}{2} \overset{BN=M\Gamma}{\Rightarrow} A\Lambda=\dfrac{M\Gamma}{2} \Rightarrow A\Lambda=MK$ ως διάμεσος στην υποτείνουσα BN του ορθ. τριγώνου BAN .

Το τετράπλευρο $AMK\Lambda$ έχει $K\Lambda//MN \Rightarrow K\Lambda//AM$ και $MK=A\Lambda$ οπότε είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Η $A\Lambda$ τέμνει τη BN άρα τέμνει και την παράλληλη της $M\Gamma$, δηλαδή οι ευθείες $A\Lambda$ και MK τέμνονται) .

ΘΕΜΑ 4774

Έστω κύκλος με κέντρο O και δύο κάθετες ακτίνες του OB και $O\Gamma$. Έστω A το μέσον του τόξου $B\Gamma$. Από το A φέρω κάθετες στις ακτίνες OB και $O\Gamma$ που τις τέμνουν στα Δ και E αντίστοιχα. Οι προεκτάσεις των $A\Delta$ και AE τέμνουν τον κύκλο στα σημεία H και Θ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $AH=A\Theta$. (Μονάδες 4)

α) Το $A\Delta OE$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 7)

β) Τα σημεία H και Θ είναι αντιδιαμετρικά. (Μονάδες 7)

γ) Το τετράπλευρο $B\Gamma\Theta H$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 7)

Λύση:

α) Αφού $A\Theta \perp OB$, $O\Delta$ απόστημα της χορδής AB. Άρα B μέσο του τόξου $A\Theta$. Άρα $B\Theta=AB=\mu$. Όμοια, $A\Gamma=\Gamma H=\mu$ δεδομένου ότι A μέσο $B\Gamma$.

Τότε όμως $A\Theta = AH$ ως χορδές ίσων τόξων (2μ).

β) Από υπόθεση $A\Theta \perp OB$, $AH \perp O\Gamma$ και $OA \perp OB$. Τότε το τετράπλευρο $B\Gamma\Theta H$ έχει 3 ορθές γωνίες, άρα είναι ορθογώνιο.

γ) Από το β), έχω $H\hat{A}\Theta = 90^o$. Άρα το τόξο ΘH είναι ημικύκλιο, επομένως ΘH διάμετρος δηλ. Θ, H αντιδιαμετρικά.

δ) Αφού τα τόξα $B\Theta = \Gamma H = \mu$, τότε $B\Gamma // H\Theta$ και $B\Theta = \Gamma H$.

Αφού $B\hat{\Theta}H + \Theta\hat{H}\Gamma = \frac{3\mu}{2} + \frac{3\mu}{2} = 3\mu < 4\mu = 180^o$, άρα η $B\Theta$ τέμνει ΓH.

Συνεπώς $B\Gamma\Theta H$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

ΘΕΜΑ 4799

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο $A\hat{B}\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Φέρνουμε τμήμα $A\Delta$ κάθετο στην AB και τμήμα AE κάθετο στην $A\Gamma$ με $A\Delta = AE$. Θεωρούμε τα μέσα H, Θ και M τα μέσα των $\Delta B, E\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα $A\hat{\Delta}B$ και $A\hat{E}\Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 7)

ii. Το τρίγωνο $Z\hat{A}H$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

iii. Η AM είναι μεσοκάθετος του $H\Theta$. (Μονάδες 7)

β) Ένας μαθητής συγκρίνοντας τα τρίγωνα και έγραψε τα εξής:

« 1. $A\Delta = AE$ *από υπόθεση*

2. $AB = A\Gamma$ *πλευρές ισοσκελούς τριγώνου*

3. $\Delta\hat{A}B = E\hat{A}\Gamma$ *ως κατακορυφήν*

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα έχοντας δύο πλευρές ίσες μια προς μια και την περιεχόμενη γωνία ίση».

Ο καθηγητής είπε ότι αυτή η λύση περιέχει λάθος μπορείς να το εντοπίσεις;

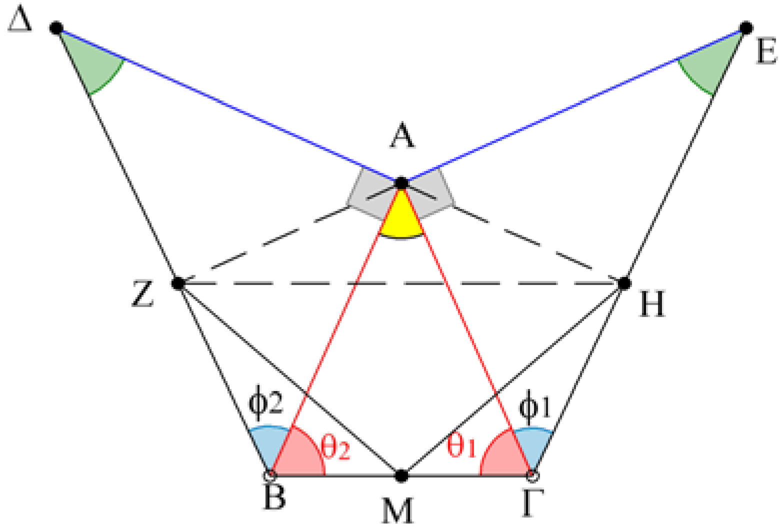
(Μονάδες 5)

Λύση:

α) Πρώτα-πρώτα $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_2$ (*) ως προσκείμενες στην βάση του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

i) Τα ορθογώνια (από την υπόθεση) τρίγωνα $AB\Delta$ *και* $A\Gamma E$ έχουν : $AB = A\Gamma$ (υπόθεση) και $A\Delta = AE$ (υπόθεση) δηλαδή κάθετες πλευρές ίσες , άρα είναι ίσα.



ii) Αφού τώρα $A\overset{\triangle}{B}\Delta = A\overset{\triangle}{\Gamma}E$ θα έχουν και όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα , δηλαδή $\hat{\Delta} = E$ (1) και $\Delta B = E\Gamma$ (2) , και $\phi_1 = \phi_2$ (3) .

Τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{\Delta}Z$ και $A\overset{\triangle}{E}H$ έχουν :

$A\Delta = AE$ (υπόθεση) , $\Delta AZ = EAH$ ως κατακορυφήν άρα και λόγω της (1) σύμφωνα με το κριτήριο ($\Gamma - \Pi - \Gamma$) είναι ίσα με άμεση συνέπεια:

$AZ = AH$ (4) *και* $\Delta Z = EH$ (5), δηλαδή το $A\overset{\triangle}{Z}H$ ισοσκελές με κορυφή το A.

iii) Αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με κορυφή το A και το M είναι μέσο της βάσης του $B\Gamma$, η AM είναι μεσοκάθετος στο $B\Gamma$.

Εξ άλλου αν συγκρίνουμε τα τρίγωνα $M\overset{\triangle}{\Gamma}H$ και $M\overset{\triangle}{B}Z$ θα έχουν $M\Gamma = MB$ (υπόθεση) και $\Gamma H = BZ$ (προκύπτει αν αφαιρέσουμε τις (2) *και* (5) κατά μέλη) και $H\hat{\Gamma}M = ZBM$ (προκύπτει αν προσθέσουμε τις (*) *και* (3) κατά μέλη). Τα τρίγωνα λοιπόν $M\overset{\triangle}{\Gamma}H$ και $M\overset{\triangle}{B}Z$ θα είναι ίσα σύμφωνα με το κριτήριο

($\Pi - \Gamma - \Pi$) και συνεπώς θα έχουν $MH = MZ$. Αλλά λόγω της (4) $AH = AZ$, συνεπώς τα A, M ανήκουν στη μοναδική μεσοκάθετο του ZH.

Τέλος για το

β) το λάθος εντοπίζεται στην έκφραση : « 3. $\Delta AB = EA\Gamma$ ως κατακορυφήν» αφού σε τέτοια περίπτωση οι ημιευθείες AE, AB, θα ήταν αντικείμενες και η

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

γωνία $\mathrm{BAE}=180^0 \Rightarrow \mathrm{BA\Gamma}+\Gamma\mathrm{AE}=180^0$ δηλαδή $\mathrm{BA\Gamma}+90^0=180^0 \Rightarrow \mathrm{BA\Gamma}=90^0$ άτοπο αφού το τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ είναι οξυγώνιο.

ΘΕΜΑ 5886

Δίνεται τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB}<\mathrm{A\Gamma}$ και το ύψος του AH. Αν Δ, E και Z είναι τα μέσα των $\mathrm{AB}, A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι :

α) το τετράπλευρο ΔEZH είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)

β) οι γωνίες $H\hat{\Delta}Z$ και $H\hat{E}Z$ είναι ίσες . (Μονάδες 8)

γ) οι γωνίες $E\hat{\Delta}Z$ και $E\hat{H}Z$ είναι ίσες. (Μονάδες 9)

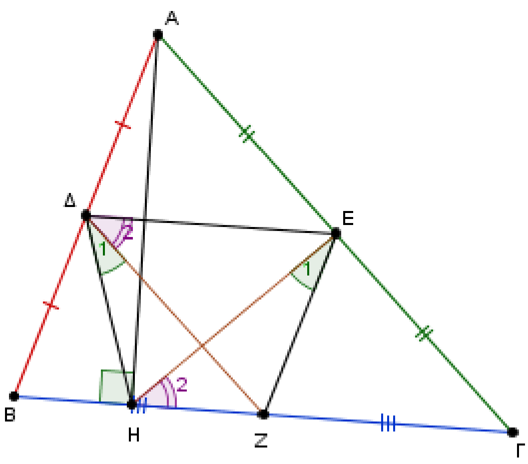
Λύση:

α) Τα Δ, E είναι μέσα των AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Από θεώρημα, $\Delta E \parallel= \frac{B\Gamma}{2}$.

Άρα $\Delta E \parallel HZ$. Συνεπώς ΔEZH τραπέζιο.

Αρκεί να δείξω ότι $ZE = H\Delta$. Πράγματι, $H\Delta$ διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου ABH, άρα $H\Delta = \frac{AB}{2}$

και όμοια με πριν $ZE = \frac{AB}{2}$. Επομένως ΔEZH ισοσκελές τραπέζιο.



β), γ) Λόγω του ισοσκελούς τραπεζίου,

οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες, $\Delta\mathrm{HZ} = H\mathrm{ZE}$.

Αφού $\Delta E \parallel HZ$, $\Delta\mathrm{EZ} + E\mathrm{ZH} = 180^0$ ως εντός και επί τα αυτά (...).

Επομένως οι απέναντι γωνίες του τραπεζίου είναι παραπληρωματικές, συνεπώς το τραπέζιο είναι εγγράψιμο. Κάθε πλευρά φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες (θεώρημα). Έτσι, $\hat{E}_1 = \hat{\Delta}_1$ και $\hat{H}_1 = \hat{\Delta}_2$.

ΘΕΜΑ 5902

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Από το B φέρουμε κάθετη στην διχοτόμο AM της γωνίας $\hat{A}$, η οποία τέμνει την AM στο H και την $A\Gamma$ στο Δ. Στην προέκταση της AH θεωρούμε σημείο Z τέτοιο ώστε $AH = HZ$ και έστω Θ το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο $ABZ\Delta$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)

β) το τετράπλευρο $HBZ\Theta$ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 9)

γ) η διάμεσος του τραπεζίου $HBZ\Theta$ είναι ίση με $\dfrac{AB + A\Gamma}{4}$. (Μονάδες 7)

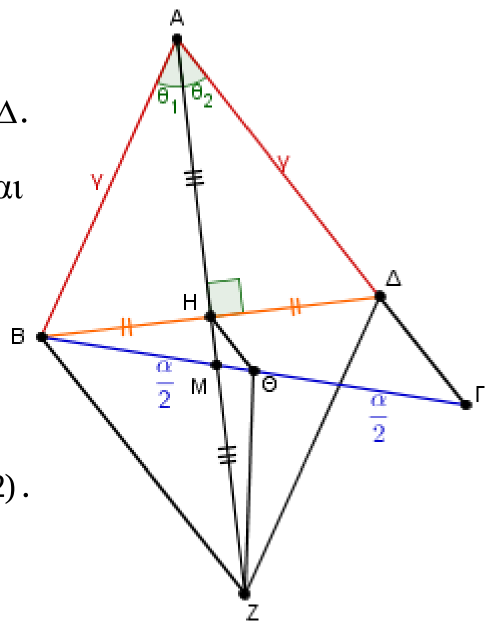
Λύση:

α) Στο τρίγωνο $AB\Delta$ το AH είναι διχοτόμος και ύψος (υπόθεση). Επομένως το τρίγωνο $AB\Delta$ ισοσκελές, με $AB = A\Delta = \gamma$.

Επειδή AH ύψος προς τη βάση του $B\Delta$, AH είναι και διάμεσος. Έτσι H μέσο $B\Delta$, δηλ. $BH = H\Delta$.

Από υπόθεση $AH = HZ$. Άρα $AZ, B\Delta$ διχοτομούνται και είναι και κάθετα. Συνεπώς $ABZ\Delta$ ρόμβος.

Έτσι $BZ = A\Delta = \gamma$ και $BZ // A\Delta$ (1).



β) Στο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$, τα H, Θ είναι μέσα των $B\Delta$, $B\Gamma$ αντίστοιχα. Άρα από θεώρημα, $H\Theta // = \dfrac{\Delta\Gamma}{2}$ (2).

Λόγω των (1) και (2), $H\Theta // BZ$.

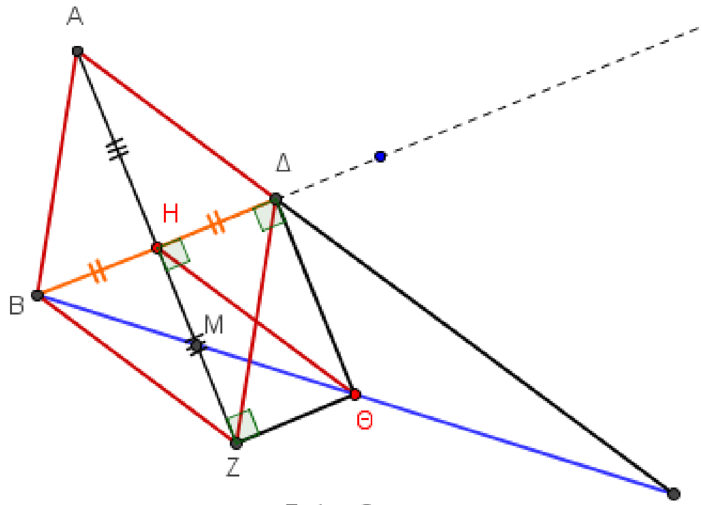
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

Αν η HB τέμνει την $Z\Theta$ τότε το $HBZ\Theta$ είναι τραπέζιο.

γ) Από θεώρημα η διάμεσος του, $\delta = \frac{BZ + H\Theta}{2} = \frac{A\Delta + \frac{\Delta\Gamma}{2}}{2} = \frac{2A\Delta + \Delta\Gamma}{4} = \frac{AB + A\Gamma}{4}$.

Παρατήρηση

Αν η $BH \parallel \Theta Z$ τότε $HBZ\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο και δεν έχει νόημα το γ) ερώτημα. Δες Σχήμα 2 που ακολουθεί



Σχήμα 2

ΘΕΜΑ 5910

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$, εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο O. Θεωρούμε το μέσο M του κυρτογώνιου τόξου $B\Gamma$ και το ύψος $A\Delta$ του τριγώνου $AB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) η AM είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{A}O$. (Μονάδες 8)

β) $O\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{A}B$. (Μονάδες 9)

γ) $\Delta\hat{A}O = \hat{B} - \hat{\Gamma}$. (Μονάδες 8)

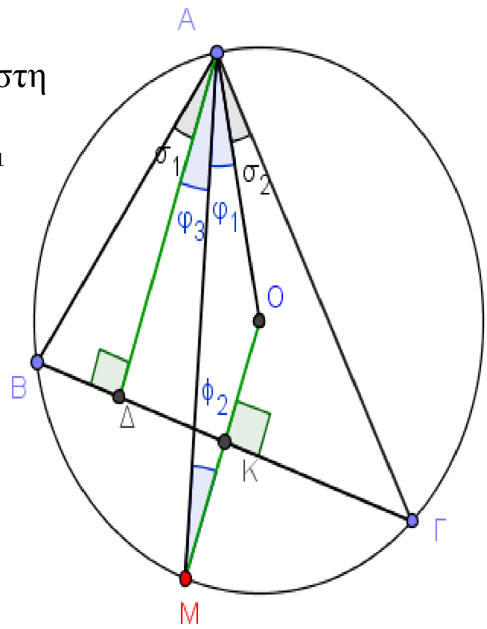
Λύση:

Φέρνω το απόστημα OK. Τότε η ευθεία OK διέρχεται από το μέσο M του τόξου $B\Gamma$.

α) Αφού OK απόστημα και $A\Delta$ ύψος: $\left.\begin{matrix} OK \perp B\Gamma \\ A\Delta \perp B\Gamma \end{matrix}\right\} \Rightarrow OK // A\Delta$.

Άρα, $\hat{\varphi}_3 = \hat{\varphi}_2 = \hat{\varphi}$ ως εντός εναλλάξ.

Είναι: $OA = OM = \rho \Rightarrow \hat{\varphi}_1 = \hat{\varphi}_2 = \hat{\varphi}$ ως προσκείμενες στη βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου. Συνεπώς $\hat{\varphi}_3 = \hat{\varphi}_1$ δηλ. η AM διχοτόμος $\Delta\hat{A}O$.



β) $B\hat{A}M = M\hat{A}\Gamma$ ως εγγεγραμμένες γωνίες στα ίσα τόξα BM, $M\Gamma$.

Άρα, $\hat{\varphi}_3 + \hat{\sigma}_1 = \hat{\varphi}_1 + \hat{\sigma}_2$. Αλλά $\hat{\varphi}_3 = \hat{\varphi}_1$, οπότε $\hat{\sigma}_1 = \hat{\sigma}_2 = \hat{\sigma}$.

γ) Στα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta\Gamma$ έχω: $\hat{B} = 90^o - \hat{\sigma}$ και $\hat{\Gamma} = 90^o - 2\hat{\varphi} - \hat{\sigma}$.

Έτσι, $\hat{B} - \hat{\Gamma} = 90^o - \hat{\sigma} - (90^o - 2\hat{\varphi} - \hat{\sigma}) = 2\hat{\varphi} = \Delta\hat{A}O$.

ΘΕΜΑ 6875

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^0$) φέρουμε τη διχοτόμο του $A\Delta$. Έστω ΔK και ΔP οι προβολές του Δ στις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Η κάθετη της $B\Gamma$ στο σημείο Δ τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο E και την προέκταση της πλευράς AB (προς το B) στο σημείο Z.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $B = \Delta E\Gamma$ (Μονάδες 8)

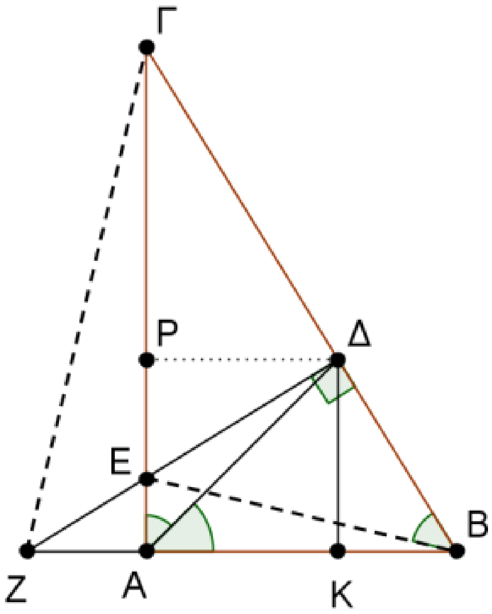
ii. $\Delta E = \Delta B$ (Μονάδες 8)

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta\Gamma Z$ (Μονάδες 9)

Λύση:

α) Το τετράπλευρο $BAE\Delta$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο αφού $A+\hat{\Delta}=180^0$ οπότε $B=\Delta E\Gamma$, ως εξωτερική γωνία .



β) Πάλι από το εγγράψιμο τετράπλευρο $BAE\Delta$ έχουμε $EB\Delta = EA\Delta = 45^0$ και $BE\Delta = BA\Delta = 45^0$, αφού μια πλευρά φαίνεται από τις απέναντι κορυφές κάτω από ίσες γωνίες . Επομένως $BE\Delta = \Delta BE = 45^0$, οπότε το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισοσκελές και κατά συνέπεια : $\Delta E = \Delta B$

γ) Το τετράπλευρο $\Delta AZ\Gamma$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο αφού $ZA\Gamma + Z\Delta\Gamma = 90^0$,

οπότε η πλευρά $Z\Gamma$ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές κάτω από ίσες γωνίες .

Επομένως $\Delta\Gamma Z = \Delta AB = 45^0$ ως εξωτερική γωνία που ισούται με την απέναντι εσωτερική στο $\Delta AZ\Gamma$.

Σχόλιο : Το σημείο P δεν υπήρχε λόγος να είναι εκεί. Ο ρόλος του είναι να μπερδεύει το σχήμα .

Αν δεν είναι τυπογραφικό και λειτουργεί σαν υπόδειξη , είναι μια κακή υπόδειξη .

mathematica.gr

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

ΘΕΜΑ 6879

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R). Έστω σημείο $Δ$ του τόξου $ΑΒ$ τέτοιο, ώστε $ΔΒ \perp ΒΓ$.

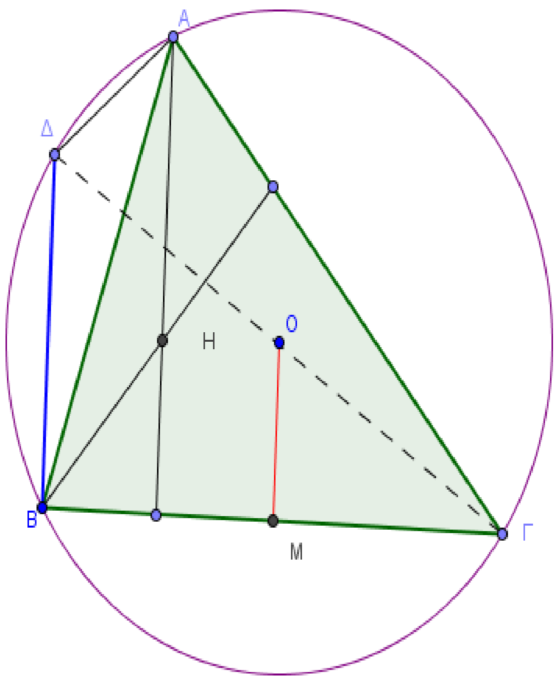
α) Να αποδείξετε ότι $ΔΑ \perp ΑΓ$. (Μονάδες 8)

β) Έστω $Η$ το ορθόκεντρο του τριγώνου $ΑΒΓ$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΑΔΒΗ$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

γ) Αν $Μ$ είναι το μέσον της $ΒΓ$, να αποδείξετε ότι $ΟΜ = \dfrac{ΑΗ}{2}$ (Μονάδες 8)

Λύση:

α) Επειδή η εγγεγραμμένη γωνία $Δ\hat{Β}Γ$ είναι ορθή , η $ΓΔ$ είναι διάμετρος του κύκλου. Επομένως και η γωνία $Δ\hat{Α}Γ$ είναι ορθή, αφού βαίνει σε ημικύκλιο. Επομένως $ΔΑ \perp ΑΓ$.



β) Επειδή το $Η$ είναι ορθόκεντρο του τριγώνου $ΑΒΓ$, είναι $ΒΗ \perp ΑΓ$. Είναι όμως και $ΔΑ \perp ΑΓ$, οπότε $ΒΗ // ΔΑ$.

Όμοια, είναι $ΔΒ \perp ΒΓ$ και $ΑΗ // ΒΓ$, οπότε $ΑΗ // ΔΒ$. Επομένως το τετράπλευρο $ΑΔΒΗ$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Επειδή το τετράπλευρο $ΑΔΒΗ$ είναι παραλληλόγραμμο, είναι $ΑΗ = ΔΒ$. Στο τρίγωνο λοιπόν $ΓΒΔ$ το τμήμα $ΟΜ$ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών , οπότε :

$ΟΜ = \frac{ΔΒ}{2} = \frac{ΑΗ}{2}$.