http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ 2014

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α ΛΥΚΕΙΟΥ

4^{ο} ΘΕΜΑ

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

Έλυσαν οι

Δημήτρης Ιωάννου, Γιώργος Βισβίκης, Μπάμπης Στεργίου, Χρήστος Κάναβης, Γιώργης Καλαθάκης, Παναγιώτης Γκριμπαβιώτης, Περικλής Γιαννουλάτος Κώστας Ζυγούρης, Χρήστος Ντάβας, Γιώργος Ρίζος Ηλίας Καμπελής, Νίκος Φραγκάκης,Αντώνης Βρέντζος, Γιώργος Γαβριλόπουλος, lafkasd, Περικλής Γιαννουλάτος

Επιμέλεια : Τσιφάκης Χρήστος

Αφιερωμένο σε όλους τους μαθητές της Α Λυκείου

Τεύχος 2ο

ΘΕΜΑ 2787

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος η κάθετη από το μέσο M της $B\Gamma$ τέμνει την προέκταση της διχοτόμου $A\Delta$ στο σημείο E. Αν Θ, Z είναι οι προβολές του E στις $AB, A\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

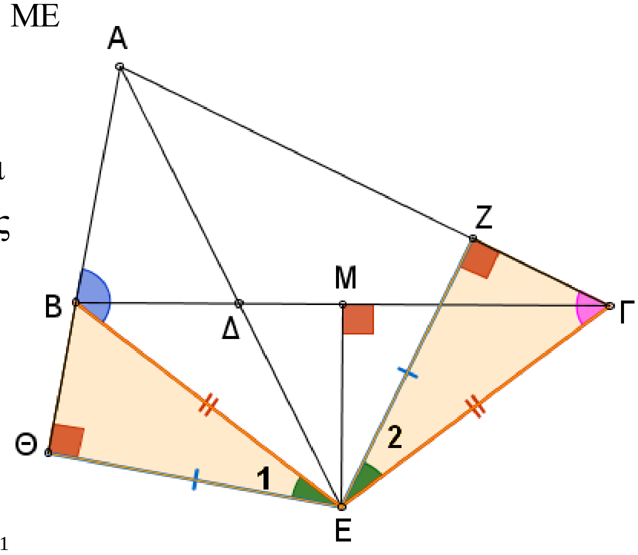
α) Το τρίγωνο $EB\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)

β) Τα τρίγωνα $\Theta BE, Z\Gamma E$ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

γ) $A\hat{\Gamma}E + ABE = 180^0$. (Μονάδες 12)

Λύση:

α) Το τρίγωνο $EB\Gamma$ είναι ισοσκελές, επειδή η ΜΕ είναι μεσοκάθετος του $B\Gamma$.



β) Τα τρίγωνα $\Theta BE, Z\Gamma E$ είναι ορθογώνια και έχουν $EB = E\Gamma$ και $E\Theta = EZ$ (κάθε σημείο της διχοτόμου ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας).

γ) Από την ισότητα των παραπάνω τριγώνων προκύπτει ότι $E_1 = E_2$ (1).

Είναι ακόμα: $A\hat{\Gamma}E = 90^0 - E_2$ και $ABE = 90^0 + E_1$

(ως εξωτερική γωνία στο τρίγωνο $EB\Theta$).

Άρα: $A\hat{\Gamma}E + ABE = 90^0 - E_2 + 90^0 + E_1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} A\hat{\Gamma}E + ABE = 180^0$.

ΘΕΜΑ 2788

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma(A=90^0)$ $B=50^0$, το ύψος του $A\Delta$ και σημείο E $\Delta\Gamma$, ώστε $\Delta E=B\Delta$. Το σημείο Z είναι η προβολή του Γ στην AE.

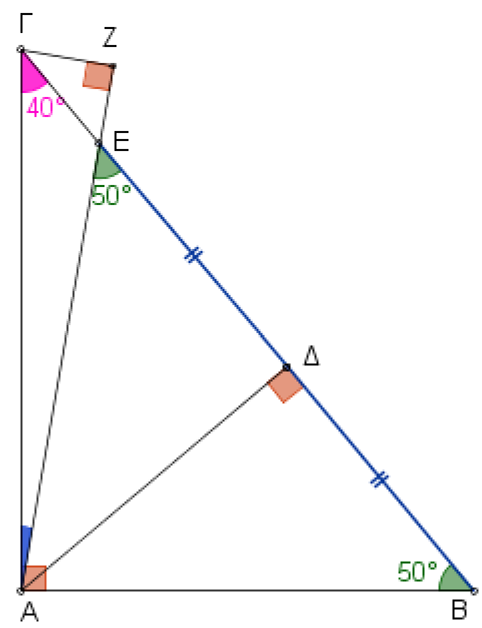
α) Να αποδείξετε ότι:

i) Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

ii) $\Gamma\mathrm{AE}=10^0$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\mathrm{Z\Gamma E}$. (Μονάδες 9)

Λύση:



α.i) Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές, επειδή η $A\Delta$ είναι μεσοκάθετος του BE.

α.ii) $\mathrm{B}=50^0$, οπότε από το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και από το ισοσκελές ABE , έχουμε διαδοχικά:

$\hat{\Gamma}=40^0$ και $A\hat{E}\Delta=50^0$.

Αλλά η $A\hat{E}\Delta$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $AE\Gamma$, άρα:

$\mathrm{AEB}=\hat{\Gamma}+\Gamma\mathrm{AE} \Leftrightarrow \Gamma\hat{A}E=10^0$.

β) Είναι $\hat{Z}=90^0$, $\Gamma\hat{E}Z=50^0$ (ως κατακορυφήν της $\mathrm{AE\Delta}$), οπότε, $E\hat{\Gamma}\mathrm{Z}=40^0$.

ΘΕΜΑ 2792

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB και στο εσωτερικό του θεωρούμε τα σημεία Γ,Δ ώστε να ισχύει $\mathrm{A\Gamma}=\Gamma\Delta=\Delta\mathrm{B}$. Επίσης θεωρούμε σημείο O εκτός του ευθυγράμμου τμήματος AB έτσι ώστε να ισχύουν $\mathrm{O\Gamma}=\mathrm{A\Gamma}$ και $\mathrm{O\Delta}=\Delta\mathrm{B}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. η γωνία $\Gamma O\Delta = 60^0$ (Μονάδες 9)

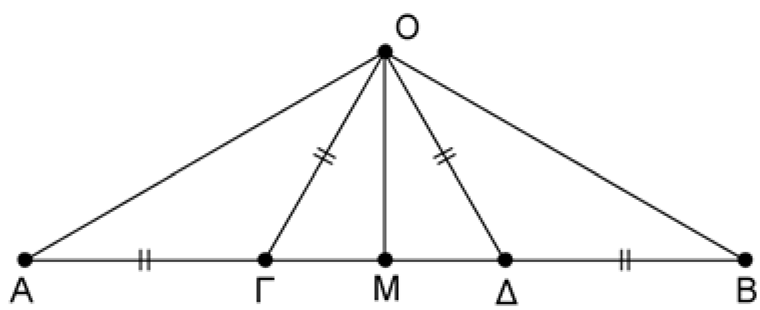
ii. οι γωνίες $OA\Gamma, OB\Delta$ είναι ίσες και κάθε μια ίση με 30^0. (Μονάδες 9)

β) Αν M το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος AB, να αποδείξετε ότι $2OM = OA$.

(Μονάδες 7)

Λύση:

α) Το τρίγωνο $\Gamma O\Delta$ είναι ισόπλευρο εκ κατασκευής και το ζητούμενο έπεται άμεσα



β) Τα τρίγωνα $OA\Gamma, OB\Delta$ είναι ισοσκελή , οπότε οι γωνίες που πρόσκεινται σε κάθε βάση είναι ίσες κι αφού οι εξωτερικές τους γωνίες $\Delta\Gamma O = \Gamma\Delta O = 60^0$, το ζητούμενο έπεται άμεσα .

γ) Το OM είναι διάμεσος στο ισόπλευρο τρίγωνο , άρα και ύψος , οπότε το τρίγωνο MOA είναι ορθογώνιο με $A = 30^0$, άρα $OM = \frac{OA}{2} \Leftrightarrow OA = 2OM$.

ΘΕΜΑ 2794

Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta (AB // \Gamma\Delta)$ είναι $\Gamma\Delta = 2AB$. Επίσης τα Z, H, E είναι τα μέσα των $A\Delta, B\Gamma$ και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα. Ακόμη η ZH τέμνει τις AE, BE στα σημεία Θ, I αντίστοιχα.

α) Να δείξετε ότι, το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Να δείξετε ότι, τα σημεία Θ, I είναι μέσα των AE, BE αντίστοιχα.

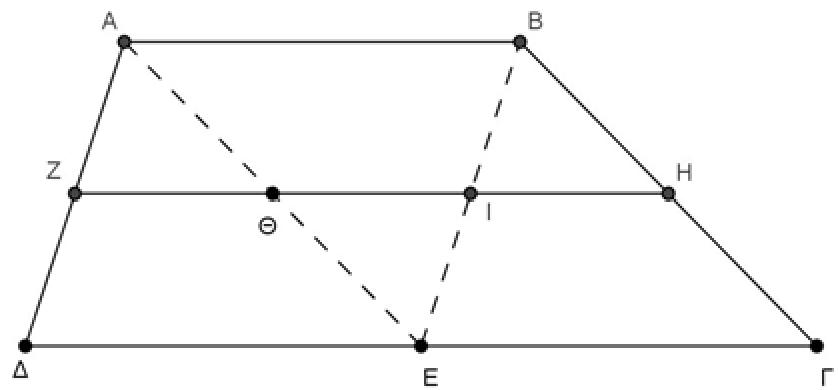
γ) Να δείξετε ότι $ZH = \frac{3}{2}AB$.

Λύση:

α) Είναι $\Delta E = \frac{\Gamma\Delta}{2}\ (1)$ αφού το E είναι μέσο του $\Gamma\Delta$ και

$AB // = \frac{\Gamma\Delta}{2} \overset{(1)}{\Rightarrow} AB // = \Delta E$,

έτσι το $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.



β) Το ZH είναι διάμεσος του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$, οπότε $ZH // AB // \Gamma\Delta$ και $ZH = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2}\ (2)$.

Στο τρίγωνο $A\Delta E$ το Z είναι μέσο της $A\Delta$ και $Z\Theta // \Delta E$, έτσι το Θ είναι μέσο του AE.

Ομοίως, στο τρίγωνο $B\Gamma E$ είναι H μέσο του $B\Gamma$ και $HI // \Gamma E$, έτσι το I είναι μέσο του BE.

γ) Από $(2) \Rightarrow ZH = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} \overset{\Gamma\Delta = 2AB}{\Rightarrow} ZH = \frac{AB + 2AB}{2} \Rightarrow ZH = \frac{3AB}{2}$.

ΘΕΜΑ 2796

Δίνεται κύκλος με κέντρο O και έστω \$AB\$ μία διάμετρός του, Γ το μέσο του ενός ημικυκλίου και Δ τυχαίο σημείο του άλλου. Στην προέκταση της ΔB (προς το B) θεωρούμε σημείο E ώστε $BE = A\Delta$.

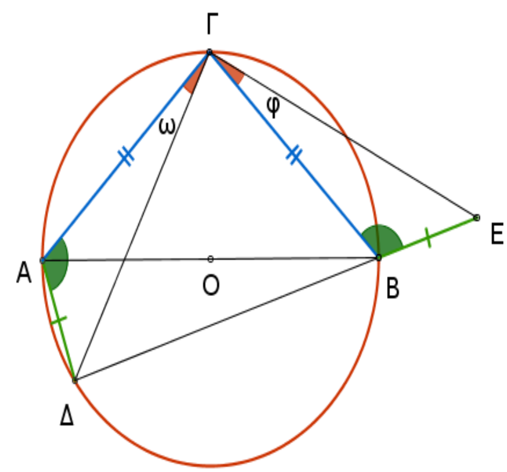
α) Να αποδείξετε ότι:

i) Τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma, BE\Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

ii) Η $\Gamma\Delta$ είναι κάθετη στη ΓE. (Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί στην περίπτωση που το σημείο Δ είναι αντιδιαμετρικό του Γ, η ΓE είναι εφαπτομένη του κύκλου. (Μονάδες 9)

Λύση:



α. i) Επειδή το Γ είναι μέσο του ημικυκλίου,

θα είναι $A\Gamma = B\Gamma$ και $A\hat{\Gamma}B = 90^0$.

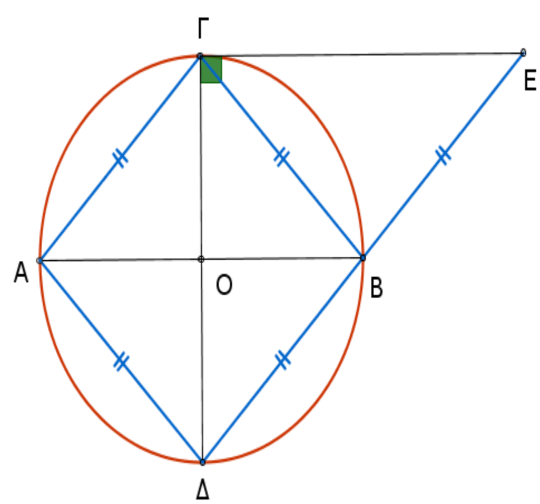
Τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma, BE\Gamma$ έχουν:

$A\Gamma = B\Gamma$

$A\Delta = BE$ (από υπόθεση)

$\Delta A\Gamma = EB\Gamma$ (η γωνία εγγεγραμμένου τετραπλεύρου είναι ίση με την απέναντι εξωτερική).

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα (Π-Γ-Π).



α. ii) Από την ισότητα των τριγώνων προκύπτει ότι $\omega = \varphi$.

$\Delta\Gamma E = A\hat{\Gamma}B - \omega + \varphi = A\hat{\Gamma}B = 90^0 \Leftrightarrow \Gamma\Delta \perp \Gamma E$.

β) Είναι από το προηγούμενο ερώτημα $\Delta\hat{\Gamma}E = 90^0$ και επειδή η $\Delta\Gamma$ είναι διάμετρος του κύκλου, η ΓE θα είναι εφαπτομένη.

ΘΕΜΑ 2797

Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\mathrm{A}+\hat{\Gamma}=2\mathrm{B}$ και έστω ΑΔ ύψος και ΒΕ διχοτόμος του τριγώνου που τέμνονται στο Ζ.

α) Να αποδείξετε ότι:

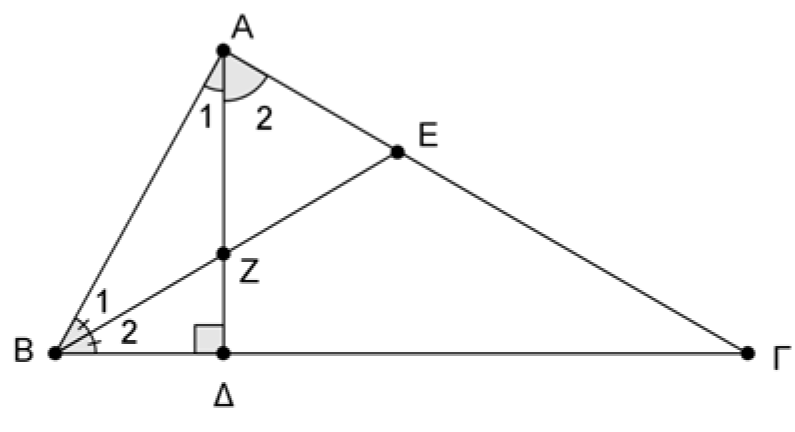
i. $\mathrm{B}=60^0$ και $\mathrm{AZ}=\mathrm{BZ}$. (Μονάδες 10)

ii. $\mathrm{A\Delta}=\frac{3}{2}\mathrm{BZ}$ (Μονάδες 8)

β) Αν είναι γνωστό ότι το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο, να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 7)

Λύση:

α) i. $\mathrm{A}+\hat{\Gamma}=2\mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{A}+\mathrm{B}+\hat{\Gamma}=3\mathrm{B} \Leftrightarrow 3\mathrm{B}=180^0 \Leftrightarrow \mathrm{B}=60^0$.



Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ, έχουμε ότι $\mathrm{A}_1=30^0$ κι ακόμα $\mathrm{B}_1=\frac{60^0}{2}=30^0$, οπότε το ΑΒΖ είναι ισοσκελές, άρα $\mathrm{AZ}=\mathrm{BZ}$.

ii. Αφού $\mathrm{AZ}=\mathrm{BZ}$ και από το ΒΖΔ με $\mathrm{B}_2=30^0$, έχουμε ότι: $\mathrm{Z\Delta}=\frac{\mathrm{BZ}}{2}$,

έπεται ότι: $\mathrm{A\Delta}=\mathrm{AZ}+\mathrm{Z\Delta}=\mathrm{BZ}+\frac{\mathrm{BZ}}{2}=\frac{3}{2}\mathrm{BZ}$.

β) Αφού το τρίγωνο $ΑΖΕ$ είναι ισόπλευρο , έχουμε ότι $Α_2 = 60^0$, οπότε $Α = 30^0 + 60^0 = 90^0$. Επίσης $Β = 60^0$, οπότε $\hat{Γ} = 30^0$.

ΘΕΜΑ 2799

Στην παρακάτω εικόνα φαίνεται μια κρεμάστρα τοίχου η οποία αποτελείται από έξι ίσα ευθύγραμμα κομμάτια ξύλου $(ΑΔ, ΒΓ, ΓΖ, ΔΗ, ΖΚ, ΗΛ)$ που είναι στερεωμένα με έντεκα καρφιά $(Α, Β, Γ, Δ, Θ, Ε, Μ, Η, Κ, Λ, Ζ)$. Αν το σημείο $Θ$, είναι μέσο των τμημάτων $ΑΔ$ και $ΒΓ$ ενώ το σημείο $Ε$ είναι μέσο των τμημάτων $ΓΖ$ και $ΔΗ$, να αποδείξετε ότι:

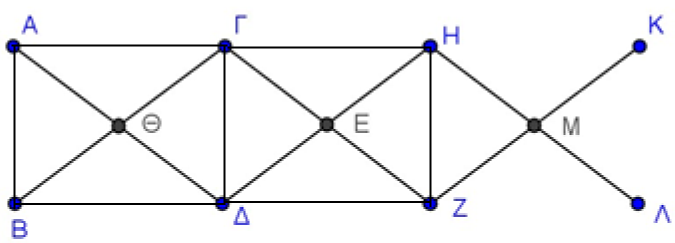
α) Το τετράπλευρο $ΓΗΖΔ$ είναι ορθογώνιο.

β) Τα σημεία $Β, Δ, Ζ$ είναι συνευθειακά.

γ) Το τετράπλευρο $ΑΓΖΔ$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση:

α) Το τετράπλευρο $ΓΗΖΔ$ είναι ορθογώνιο αφού οι διαγώνιοι του διχοτομούνται στο $Ε$ και είναι ίσες λόγω της υπόθεσης.



β) Για τον ίδιο λόγο και το $ΑΒΔΓ$ είναι ορθογώνιο, έτσι:

$ΒΔΓ + ΓΔΖ = 90^{\circ} + 90^{\circ} = 180^{\circ}$ άρα τα σημεία $Β, Δ, Ζ$ είναι συνευθειακά.

γ) Για τον ίδιο λόγο και τα σημεία $Α, Γ, Η$ είναι συνευθειακά, οπότε $ΑΓ // ΔΖ \, (1)$

Το τετράπλευρο $\Gamma\Theta\Delta E$ είναι ρόμβος αφού και οι τέσσερεις πλευρές του είναι ίσες ως μισά ίσων τμημάτων, οπότε $\Gamma\Theta\Delta = \Gamma E\Delta$.

Τα τρίγωνα $A\Theta\Gamma$ και ΔEZ είναι ίσα από $\Pi - \Gamma - \Pi$ αφού έχουν:

$A\Theta = \Delta E$ και $\Gamma\Theta = ZE$ ως μισά ίσων τμημάτων και $A\Theta\Gamma = \Delta EZ$ ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\Gamma\Theta\Delta = \Gamma E\Delta$.

Έτσι $A\Gamma = \Delta Z\,(2)$.

Από $(1),(2) \Rightarrow A\Gamma // = \Delta Z$ άρα το $A\Gamma Z\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

ΘΕΜΑ 2804

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE που τέμνονται στο σημείο H και το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $M\Delta = ME$. (Μονάδες 10)

ii) Η ευθεία AH τέμνει κάθετα τη $B\Gamma$ και $AH\Delta = \hat{\Gamma}$, όπου $\hat{\Gamma}$ η γωνία του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 5)

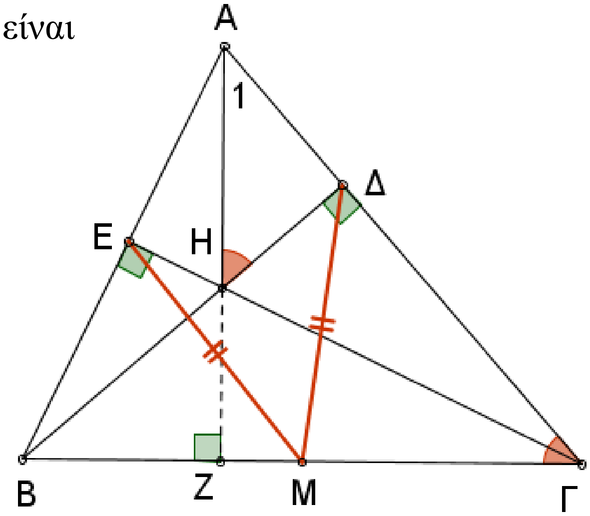
γ) Να βρείτε το ορθόκεντρο του τριγώνου ABH. (Μονάδες 10)

Λύση:

α.i. Τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta B\Gamma, EB\Gamma$ έχουν αντίστοιχες διαμέσους $\Delta M, EM$. Άρα: $M\Delta = ME = \frac{B\Gamma}{2}$.

α. ii) Το H είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$, οπότε και το τρίτο ύψος AZ θα διέρχεται από το σημείο H . Δηλαδή, $AH \perp B\Gamma$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444



Τα τρίγωνα $AH\Delta, AZ\Gamma$ είναι ισογώνια, επειδή είναι ορθογώνια και έχουν κοινή τη γωνία A_1.

Άρα: $AH\Delta = \hat{\Gamma}$.

γ) Το σημείο Γ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΗ. (Πόρισμα του σχολικού βιβλίου).

ΘΕΜΑ 2806

Δύο κύκλοι $(K,\rho),(\Lambda,R)$ τέμνονται στα σημεία A, B. Αν Γ και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία του A στους δύο κύκλους, τότε να αποδείξετε ότι:

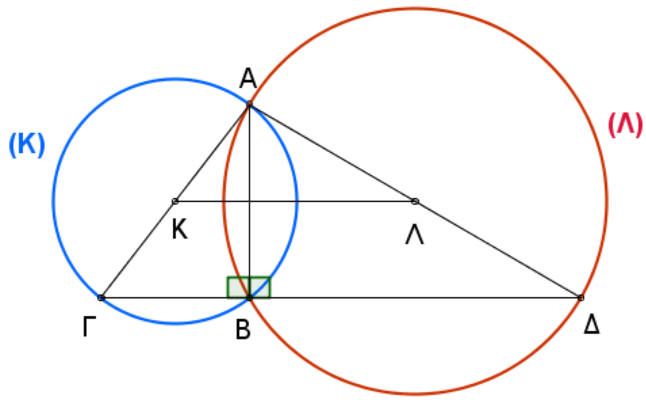
α) $AB\Gamma = 90^0$ (Μονάδες 5)

β) Τα σημεία Γ, B, Δ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)

γ) Το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία $K, \Lambda, \Gamma, \Delta$ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 10)

Λύση:

α) Στον κύκλο (K,ρ) η γωνία $A\hat{B}\Gamma$



είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο, οπότε $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = 90^{o}$.

β) Ομοίως είναι και $\mathrm{AB}\Delta = 90^{0}$ (ως εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο του κύκλου (Λ)). Άρα $\Gamma\mathrm{B}\Delta = 180^{0}$, δηλαδή τα σημεία Γ, B, Δ είναι συνευθειακά.

γ) Τα σημεία K, Λ είναι τα μέσα των πλευρών $A\Gamma, A\Delta$ αντίστοιχα, του τριγώνου $A\Gamma\Delta$. Άρα $K\Lambda \parallel \Gamma\Delta$ και $\mathrm{K\Lambda} = \frac{\Gamma\Delta}{2}$. Το τετράπλευρο λοιπόν, με κορυφές τα σημεία $K, \Lambda, \Gamma, \Delta$ είναι τραπέζιο (δεν μπορεί να είναι παραλληλόγραμμο, αφού $\mathrm{K\Lambda} \neq \Gamma\Delta$).

ΘΕΜΑ 2808

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και τις προβολές A', B', Γ', Δ' των κορυφών A, B, Γ, Δ αντίστοιχα, σε μία ευθεία (ε).

α) Αν η ευθεία (ε) αφήνει τις κορυφές του παραλληλογράμμου στο ίδιο ημιεπίπεδο και είναι $AA' = 3, BB' = 2, \Gamma\Gamma' = 5$, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου O του παραλληλογράμμου από την ευθεία (ε) είναι ίση με 4. (Μονάδες 8)

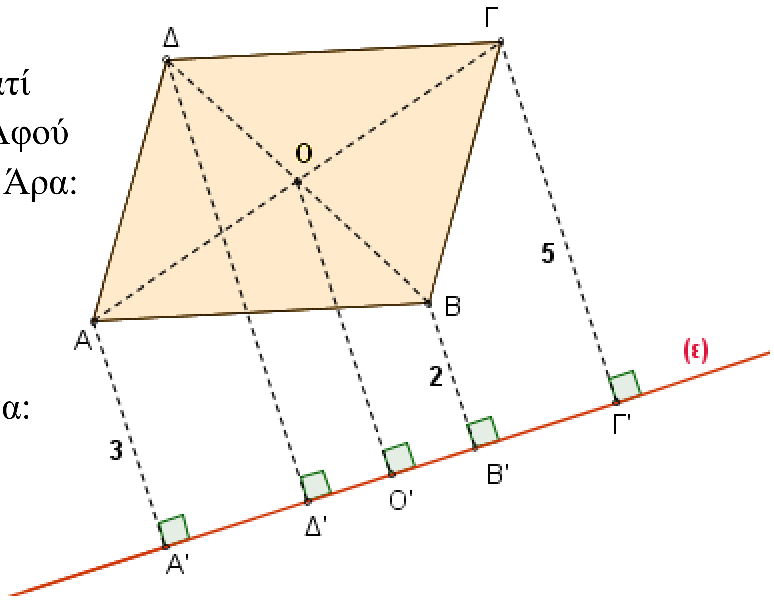
ii) Να βρείτε την απόσταση $\Delta\Delta'$. (Μονάδες 9)

β) Αν η ευθεία (ε) διέρχεται από το κέντρο του παραλληλογράμμου και είναι παράλληλη προς δύο απέναντι πλευρές του, τι παρατηρείτε για τις αποστάσεις $AA', BB', \Gamma\Gamma', \Delta\Delta'$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

Λύση:

α. i) Έστω O' η προβολή του O στην ευθεία (ε).

Το τετράπλευρο $AA'\Gamma'\Gamma$ είναι τραπέζιο



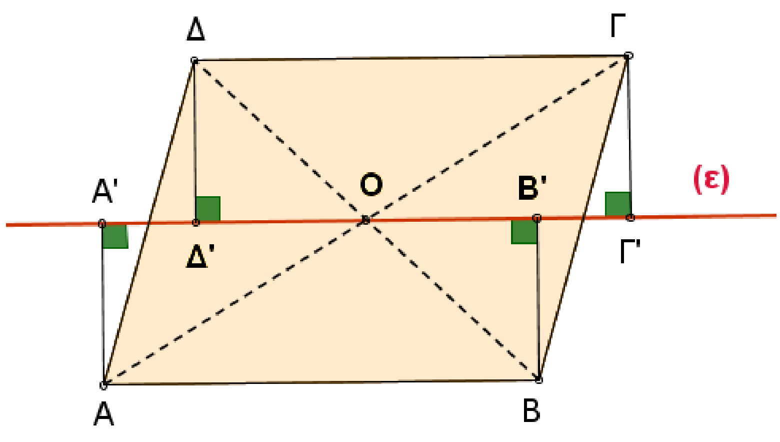
(δεν μπορεί να είναι παραλληλόγραμμο γιατί $AA' \neq \Gamma\Gamma'$) και OO' είναι η διάμεσός του (Αφού O είναι το μέσο του $A\Gamma$ και $OO' \parallel AA' \parallel \Gamma\Gamma'$). Άρα:

$$OO' = \frac{AA' + \Gamma\Gamma'}{2} = \frac{3+5}{2} \Leftrightarrow OO' = 4$$

α. ii) Ομοίως το τετράπλευρο $\Delta\Delta'B'B$ είναι τραπέζιο και OO' είναι η διάμεσός του. Άρα:

$$OO' = \frac{BB' + \Delta\Delta'}{2} \Leftrightarrow 4 = \frac{2 + \Delta\Delta'}{2} \Leftrightarrow \Delta\Delta' = 6$$

β) Οι αποστάσεις είναι ίσες.



Πράγματι, η ευθεία (ε) διέρχεται από το κέντρο του παραλληλογράμμου και έστω ότι είναι παράλληλη στις $AB, \Gamma\Delta$. Άρα θα είναι η μεσοπαράλληλή τους, οπότε θα ισαπέχει από αυτές, άρα και από τις κορυφές του παραλληλογράμμου.

ΘΕΜΑ 2809

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ύψη του $BK, \Gamma\Lambda$ τα οποία τέμνονται στο I. Αν M, N τα μέσα των $BI, \Gamma I$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $BI\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)

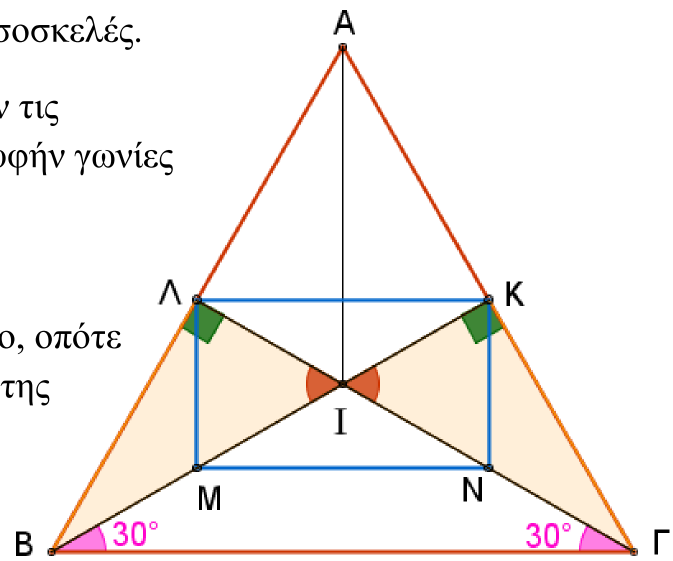
β) Τα τρίγωνα $BI\Lambda$ και ΓIK είναι ίσα. (Μονάδες 5)

γ) Το AI προεκτεινόμενο διέρχεται από το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. (Μονάδες 5)

δ) Το τετράπλευρο $M\Lambda KN$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

Λύση:

α) Στο ισόπλευρο τρίγωνο τα ύψη είναι διάμεσοι και διχοτόμοι. Άρα $\Gamma BI = B\hat{\Gamma}I = 30^0$, οπότε το τρίγωνο $BI\Gamma$ είναι ισοσκελές.



β) Τα ορθογώνια τρίγωνα $BI\Lambda$ και ΓIK έχουν τις υποτείνουσες BI και ΓI ίσες και τις κατακορυφήν γωνίες $B\hat{I}\Lambda = \Gamma\hat{I}K$. Άρα είναι ίσα.

γ) Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο το ορθόκεντρο I, θα συμπίπτει με το βαρύκεντρο, οπότε το AI προεκτεινόμενο διέρχεται από το μέσο της πλευράς $B\Gamma$.

δ) $M\Lambda \parallel= \frac{AI}{2}$ (M, Λ είναι τα μέσα των BI, IA)

$KN \parallel= \frac{AI}{2}$ (N, K είναι τα μέσα των $\Gamma I, \Gamma A$). Άρα: $\Lambda M \parallel= KN$, δηλαδή το τετράπλευρο $ΜΛΚΝ$ είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή όμως $ΑΙ \perp ΒΓ$ ($Ι$ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου $ΑΒΓ$)), θα είναι και $ΑΙ \perp ΚΛ$ ($ΚΛ \parallel ΒΓ$). Άρα οι δύο πλευρές του παραλληλογράμμου είναι κάθετες στις δύο άλλες πλευρές του. Επομένως το παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο.

ΘΕΜΑ 2810

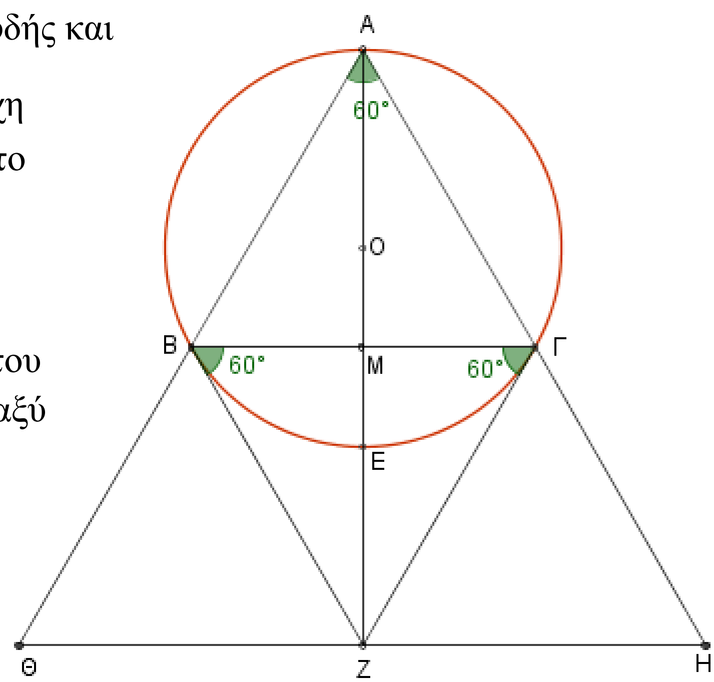
Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο $ΑΒΓ$ που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο $Ο$ και ακτίνα ρ. Τα τμήματα $ΓΖ$ και $ΒΖ$ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου στα σημεία $Γ$ και $Β$ αντίστοιχα. Αν το τμήμα $ΘΗ$ είναι κάθετο στο τμήμα $ΑΖ$ στο $Ζ$, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $ΖΒΓ$ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 7)

β) Το τετράπλευρο $ΑΓΖΒ$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο $ΒΓΗΘ$ είναι τραπέζιο με $ΒΘ = ΒΖ$ και $ΘΗ = 2ΒΓ$. (Μονάδες 10)

Λύση:



α) $Β\hat{Γ}Ζ = ΓΒΖ = 60^0$ (είναι γωνίες χορδής και εφαπτομένης ίσες με την αντίστοιχη εγγεγραμμένη $Α = 60^0$). Επομένως το τρίγωνο $ΖΒΓ$ είναι ισόπλευρο.

β) Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΖΒΓ$ είναι ισόπλευρα, οπότε όλες οι πλευρές του τετραπλεύρου $ΑΓΖΒ$ είναι ίσες μεταξύ τους, άρα είναι ρόμβος.

γ) $ΑΖ \perp ΒΓ$ (ως διαγώνιες ρόμβου) και $ΑΖ \perp ΘΗ$ (από υπόθεση). Άρα $ΒΓ \parallel ΘΗ$, δηλαδή το τετράπλευρο

$B\Gamma H\Theta$ είναι τραπέζιο, αφού οι $B\Theta, \Gamma H$ τέμνονται στο σημείο A. Αν M είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του ρόμβου $A\Gamma ZB$, τότε θα είναι το μέσο της $B\Gamma$, άρα τα σημεία B,Γ είναι τα μέσα των πλευρών $A\Theta, AH$ αντίστοιχα, του τριγώνου $A\Theta H$. Επομένως:

$\Theta H = 2B\Gamma$ και $\mathrm{B\Theta} = \mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma} = \mathrm{BZ}$.

Σημείωση

Το κέντρο O του κύκλου και η ακτίνα ρ που δίνονται στην εκφώνηση, και το σημείο E που δίνεται στο σχήμα, δεν χρησιμεύουν πουθενά.

ΘΕΜΑ 3691

Οι κύκλοι (K,ρ) και $(\Lambda,3\rho)$ εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο A. Μία ευθεία ε εφάπτεται εξωτερικά και στους δυο κύκλους στα σημεία B και Γ αντίστοιχα και τέμνει την προέκταση της διακέντρου $K\Lambda$ στο σημείο E. Φέρουμε από το σημείο K παράλληλο τμήμα στην ε που τέμνει το τμήμα $\Lambda\Gamma$ στο Δ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma\Delta K$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\Delta\hat{K}\Lambda$ είναι 30^o. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι το τμήμα $E\Lambda = 6\rho$, όπου ρ η ακτίνα του κύκλου (K,ρ).

(Μονάδες 8)

Λύση:

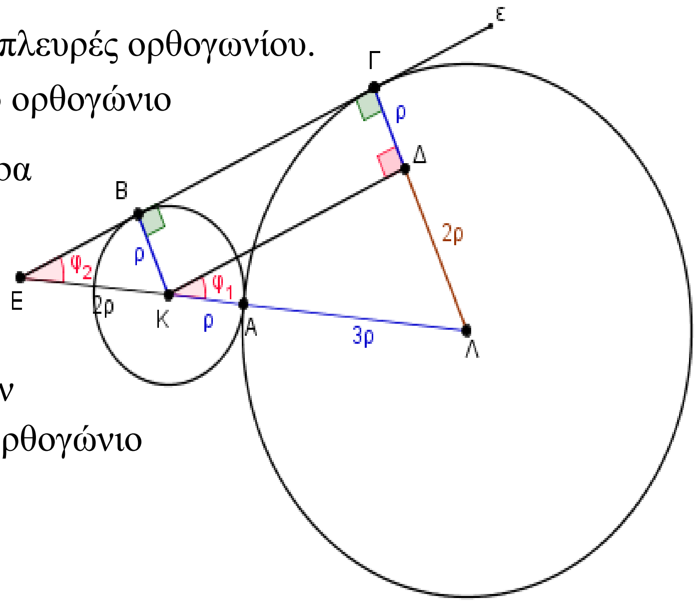
α) Αφού ε είναι κοινή εφαπτομένη έχω $BK \perp \varepsilon$ και $\Lambda\Gamma \perp \varepsilon$.

Άρα $B\Gamma \parallel \Lambda\Gamma$ και $\hat{B} = 90^o = \hat{\Gamma}$.

Είναι $K\Delta \parallel \varepsilon$ (υπόθεση)και $\Lambda\Gamma \perp \varepsilon$, άρα $K\Delta \perp \Lambda\Gamma$ δηλ. $\hat{\Delta} = 90^o$.

Τότε το τετράπλευρο $B\Gamma\Delta K$ είναι ορθογώνιο αφού έχει τρεις ορθές γωνίες.

β) Λόγω του α) $\Gamma\Delta = BK = \rho$ ως απέναντι πλευρές ορθογωνίου.
Έτσι, $\Delta\Lambda = \Gamma\Lambda - \Gamma\Delta = 3\rho - \rho = 2\rho$. Τότε στο ορθογώνιο $(\hat{\Delta} = 90^o)$ τρίγωνο $K\Delta\Lambda$, $\Delta\Lambda = 2\rho = \dfrac{K\Lambda}{2}$. Άρα από θεώρημα, $\hat{\phi}_1 = 30^o$.



γ) Αλλά $\hat{\phi}_2 = \hat{\phi}_1 = 30^o$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες, των παραλλήλων $K\Delta \| \varepsilon$ που τέμνονται από $E\Lambda$. Τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο $E\Gamma\Lambda$, $\hat{\phi}_2 = 30^o$. Επομένως

$$\Gamma\Lambda = \frac{E\Lambda}{2} \leftrightarrow E\Lambda = 2\Gamma\Lambda = 6\rho.$$

ΘΕΜΑ 3693

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ ($\hat{\mathrm{A}} = 90^0$) και η διχοτόμος του $\mathrm{B\Delta}$. Από το Δ φέρουμε $\mathrm{\Delta E} \perp \mathrm{B\Gamma}$ και ονομάζουμε Z το σημείο στο οποίο η ευθεία $\mathrm{E\Delta}$ τέμνει την προέκταση της BA.
Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)
β)Τα τρίγωνα $\mathrm{AB\Gamma}$ και BEZ είναι ίσα. (Μονάδες 6)
γ) Η ευθεία $\mathrm{B\Delta}$ είναι μεσοκάθετη των τμημάτων AE και $\mathrm{Z\Gamma}$. (Μονάδες 6)
δ)Το τετράπλευρο $\mathrm{AE\Gamma Z}$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 7)

Λύση:

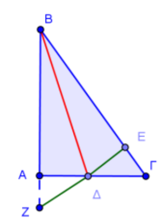
α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $\mathrm{B\Delta A}, \mathrm{B\Delta E}$ είναι ίσα διότι η $\mathrm{B\Delta}$ είναι κοινή και $\mathrm{\Delta A} = \mathrm{\Delta E}$, αφού τα σημεία της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχουν από τις πλευρές της(ή διότι οι γωνίες $\mathrm{\Delta BA}, \mathrm{\Delta B\Gamma}$ είναι ίσες).
Επομένως $\mathrm{BA} = \mathrm{BE}$

β) Τα τρίγωνα $\mathrm{AB\Gamma}$ και ABE είναι ορθογώνια και έχουν :

$AB = AE$, από το πρώτο ερώτημα

Τη γωνία B κοινή.

γ) i) Είναι $BA = BE$ και $\Delta A = \Delta E$, οπότε τα σημεία B, Δ βρίσκονται στη μεσοκάθετο του AE .
ii) Επειδή $BZ = B\Gamma$, το τρίγωνο $BZ\Gamma$ είναι ισοσκελές. Επομένως η διχοτόμος της γωνίας B, δηλαδή η (ημι)ευθεία $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος της βάσης του ΓZ .
Εναλλακτικά, μπορούμε επίσης να βασιστούμε στο γεγονός ότι : $\Delta Z = \Delta\Gamma, BZ = B\Gamma$.



ΘΕΜΑ 3698

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $\hat{A}=\hat{\Delta}=90^{o}$, $\Delta\Gamma = 2AB$ και $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$. Από το B φέρνουμε κάθετη στη $\Gamma\Delta$ που τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο K και την $A\Gamma$ στο E. Επίσης φέρνουμε την AE που τέμνει τη $B\Delta$ στο σημείο Λ. Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{\Gamma} = 45^{o}$. (Μονάδες 8)

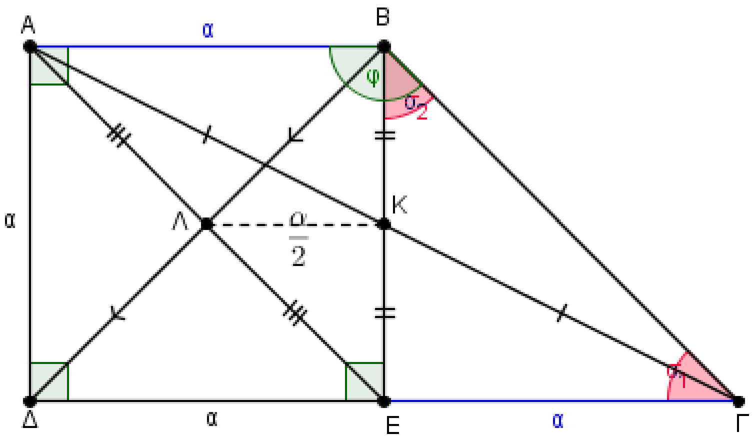
β) $B\Delta = AE$. (Μονάδες 9)

γ) $K\Lambda = \dfrac{1}{4}\Delta\Gamma$. (Μονάδες 8)

Λύση:

α) Αφού $AB \parallel \Gamma\Delta$ τότε $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^{o} \overset{\hat{B}=3\hat{\Gamma}}{\leftrightarrow} \hat{\Gamma} = 45^{o}$ ως εντός και επί τα αυτά μέρη (...).

β) Αφού $BE \perp \Delta\Gamma, B\hat{E}A = B\hat{E}\Gamma = 90^o$. Τότε:



Το τετράπλευρο $ABE\Delta$ είναι ορθογώνιο αφού και $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^o$ (τρεις ορθές). Άρα $AE = B\Delta$ (διαγώνιες ορθογωνίου ίσες).

Ακόμη $AE, B\Delta$ διχοτομούνται. Άρα Λ μέσο του AE.

Λόγω του ορθογωνίου ακόμη, $\Delta E = AB = \alpha$ (απέναντι πλευρές ορθογωνίου).

Τότε $E\Gamma = \Delta\Gamma - \Delta E = \alpha$.

τρίγωνο $BE\Gamma$ ορθογώνιο με $\hat{\sigma}_1 = 45^?$. Άρα ισοσκελές, με $BE = E\Gamma = \alpha$.

γ) Έτσι έχουμε $AB \parallel= E\Gamma$. Άρα το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.
Έτσι $A\Gamma, BE$ διχοτομούνται. Άρα K μέσο $A\Gamma$.

Τότε στο τρίγωνο $AE\Gamma$ τα K, Λ είναι μέσα, άρα $K\Lambda = \dfrac{E\Gamma}{2} = \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\Delta\Gamma}{4}$.

ΘΕΜΑ 3699

Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Αν τα σημεία E και Z είναι τα μέσα των πλευρών του AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι :

α) Το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) $A\hat{E}\Delta = B\hat{Z}\Gamma$. (Μονάδες 8)

γ) Οι ΔE και BZ τριχοτομούν τη διαγώνιο $A\Gamma$ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 9)

Λύση:

α) Επειδή $AB//\Delta\Gamma \Rightarrow BE//\Delta Z$.

$AB=\Delta\Gamma \Rightarrow BE=\frac{AB}{2}=\frac{\Delta\Gamma}{2}=\Delta Z$. Επομένως $BE//=\Delta Z$. Άρα το ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.

β) $A\hat{E}\Delta=E\hat{\Delta}Z$ (1) (ως εντός εναλλάξ, $AB//\Delta Z$ και τέμνουσα $\Delta\Gamma$.)

$E\hat{B}Z=E\hat{\Delta}Z$ (2) (λόγω του ότι το ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.)

$E\hat{B}Z=B\hat{Z}\Gamma$ (3) (ως εντός εναλλάξ, $AB//\Delta Z$ και τέμνουσα BZ.)

Από (1),(2),(3) προκύπτει ότι $A\hat{E}\Delta=B\hat{Z}\Gamma$.

γ) Έστω K,Λ είναι τα σημεία που οι ΔE και BZ αντίστοιχα τέμνουν την $A\Gamma$. Στο τρίγωνο $AB\Lambda$ έχουμε E μέσο του AB και $EK//B\Lambda$ τότε K μέσο $A\Lambda$, άρα $AK=K\Lambda$ (4).

Στο τρίγωνο $\Delta K\Gamma$ έχουμε Z μέσο του $\Delta\Gamma$ και $\Delta K//Z\Lambda$ τότε Λ μέσο $K\Gamma$, άρα $\Lambda\Gamma=K\Lambda$ (5).

Από (4),(5) έχουμε το ζητούμενο.

ΘΕΜΑ 3700

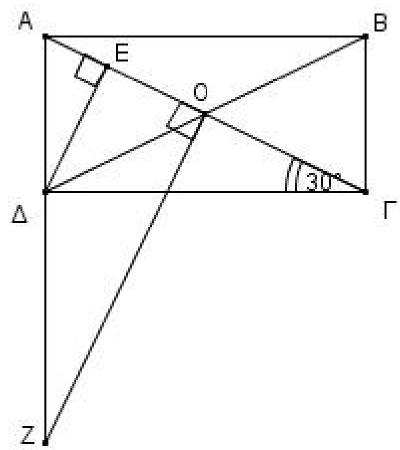
Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\Delta\hat{\Gamma}A=30^o$ και O το κέντρο του. Φέρουμε $\Delta E\perp A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $A\hat{\Delta}\Gamma$ χωρίζεται από τη ΔE και τη διαγώνιο ΔB σε τρείς ίσες γωνίες. (Μονάδες 13)

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

β) Φέρουμε κάθετη στην $ΑΓ$ στο σημείο $Ο$ η οποία τέμνει την προέκταση της $ΑΔ$ στο $Ζ$. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΖΟ$ και $ΑΒΓ$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

Λύση:



$B\hat{Γ}A = 60^o$ γιατί $\hat{Γ} = 90^o - A\hat{Γ}Δ = 90^o - 30^o = 60^o$.
Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ έχουμε

$B\hat{A}Γ = 180^o - A\hat{B}Γ - B\hat{Γ}A = 30^o$. Άρα $Δ\hat{A}Γ = 60^o$.

Στο τρίγωνο $ΑΔΕ$ έχουμε $A\hat{Δ}E = 30^o$.

Στο τρίγωνο $ΟΓΚ$ έχουμε $O\hat{K}Γ = 60^o$.

Άρα $Δ\hat{K}Z = O\hat{K}Γ = 60^o$ (ως κατακορυφήν).

Στο τρίγωνο $ΔΚΖ$ έχουμε $Δ\hat{Z}K = 30^o$.
Στο τρίγωνο $ΟΓΔ$ έχουμε $ΟΔ = ΟΓ$ ($ΟΓΔ$ ισοσκελές)
άρα $E\hat{Δ}O = 30^o$.

β) Επειδή $ΟΒ = ΟΓ$ και $O\hat{Γ}B = 60^o$ τότε $O\hat{Γ}B$ ισόπλευρο.
Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΟΖ$ και $ΑΒΓ$ έχουν

$ΒΓ = ΟΒ = ΟΑ$, $A\hat{Γ}B = Δ\hat{A}Γ$. Άρα είναι ίσα.

ΘΕΜΑ 3701

Έστω ότι $Ε, Ζ$ είναι τα μέσα των πλευρών $ΑΒ, ΓΔ$ παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$ αντίστοιχα.

Αν για το παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ επιπλέον ισχύει $ΑΒ > ΑΔ$, να εξετάσετε αν είναι αληθείς ή όχι οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο $ΔΕΒΖ$ είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχυρισμός 2: $ΑΕΔ$=$ΒΖΓ$

Ισχυρισμός 3: Οι $ΔΕ, ΒΖ$ είναι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών $Δ, Β$.

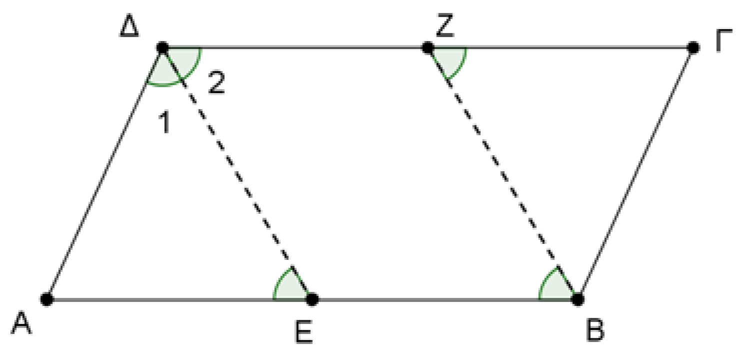
α) Στην περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε. (Μονάδες 16)

β) Στην περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

Λύση:

α) Ισχυρισμός 1: Είναι αληθής αφού : $\Delta Z//EB$ και $\Delta Z = EB$ ως μισά ίσων τμημάτων .



Άρα τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο, αφού έχει ένα ζεύγος πλευρές ίσες και παράλληλες .

Ισχυρισμός 2: Είναι αληθής αφού : $AE\Delta = EBZ$ (εντός ,εκτός και επί τα αυτά των $\Delta E//BZ$) , $EBZ = BZ\Gamma$ (εντός εναλλάξ των $\Delta\Gamma//AB$) .

Επομένως : $AE\Delta = BZ\Gamma$.

Ισχυρισμός 3: Οι $\Delta E, BZ$ είναι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών Δ, B .

Αν υποτεθεί ότι αυτό συμβαίνει , τότε $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = AE\Delta$,οπότε το τρίγωνο $AE\Delta$ θα είναι ισοσκελές , άρα $A\Delta = AE = \frac{1}{2}AB$.

Η τελευταία σχέση , εφόσον $A\Delta < AB$ μπορεί να είναι είτε αληθής , είτε ψευδής.

Άρα ο ισχυρισμός ότι Οι $\Delta E, BZ$ είναι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών Δ, B είναι άλλοτε αληθής κι άλλοτε ψευδής . Ομοίως για την BZ

β) Ισχυρισμός 3: Ο ισχυρισμός είναι αληθής εφόσον , όπως είδαμε στο (α) , ισχύει : $ΑΔ=\frac{1}{2}ΑΒ$.

ΘΕΜΑ 3723

Στο κυρτό εξάγωνο $ΑΒΓΔΕΖ$ ισχύουν τα εξής: $\hat{\alpha}=\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}=\hat{\delta}$ και $\hat{\varepsilon}=\hat{\zeta}$.

(α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\hat{\alpha}+\hat{\gamma}+\hat{\varepsilon}$. (8 Μονάδες)

(β) Αν οι πλευρές ΑΖ και $ΔΕ$ προεκτεινόμενες τέμνονται στο $Η$ και οι πλευρές ΑΒ και ΔΓ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Θ, να αποδείξετε ότι:

(i.) Οι γωνίες $Α$ και $Η$ είναι παραπληρωματικές. (10 Μονάδες)

(ii.) Το τετράπλευρο $ΑΘΔΗ$ είναι παραλληλόγραμμο. (7 Μονάδες)

Λύση:

(α) Οι γωνίες κυρτού εξαγώνου έχουν άθροισμα $2\cdot 6-4=8$ ορθές, δηλ. $8\cdot 90^\circ=720^\circ$.
Αφού $\hat{\alpha}=\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}=\hat{\delta}$ και $\hat{\varepsilon}=\hat{\zeta}$, είναι $\hat{\alpha}+\hat{\gamma}+\hat{\varepsilon}=\frac{720^\circ}{2}=360^\circ$.

(β) (i) Είναι

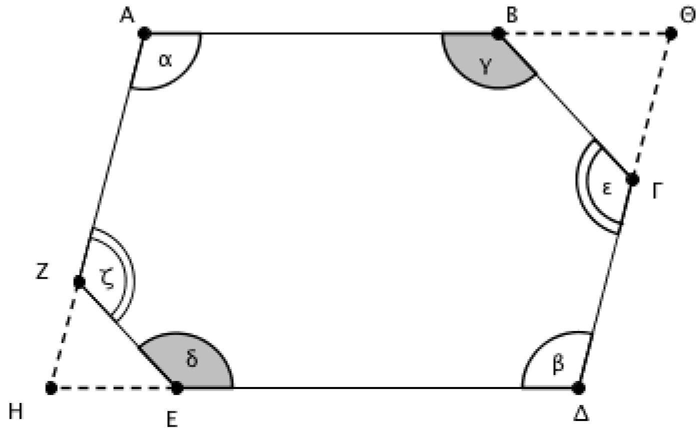
$$\hat{Α}+\hat{Η}=\hat{\alpha}+(180^\circ-Η\hat{Ζ}Ε-Η\hat{Ε}Ζ)=\hat{\alpha}+\hat{\zeta}-Η\hat{Ε}Ζ=$$

$$=\hat{\alpha}+\hat{\zeta}-(180^\circ-\hat{\delta})=\hat{\alpha}+\hat{\delta}+\hat{\zeta}-180^\circ=\hat{\alpha}+\hat{\gamma}+\hat{\varepsilon}-180^\circ=360^\circ-180^\circ=180^\circ$$

2ος τρόπος

Το κυρτό πεντάγωνο $ΑΒΓΔΗ$ έχει άθροισμα γωνιών $2\cdot 5-4=6$ ορθές, δηλ. $6\cdot 90^\circ=540^\circ$. Συνεπώς, $\hat{\alpha}+\hat{\gamma}+\hat{\varepsilon}+\hat{Δ}+\hat{Η}=540^\circ$, κι άρα

$\hat{\Delta}+\hat{H}=540^\circ-(\hat{\alpha}+\hat{\gamma}+\hat{\varepsilon})=540^\circ-360^\circ=180^\circ.$



Αφού $\hat{\Delta}=\hat{A}$, έπεται ότι και $\hat{A}+\hat{H}=180^\circ$.

(ii) Από το προηγούμενο υποερώτημα είναι $A\Theta//H\Delta$. Επίσης,

$\hat{\Delta}+\hat{H}=\hat{A}+\hat{H}=180^\circ$, κι άρα $AH//\Delta\Theta$.

Συνεπώς, οι απέναντι πλευρές του $A\Theta\Delta H$ είναι παράλληλες, κι άρα είναι παραλληλόγραμμο.

ΘΕΜΑ 3737

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$, τέτοιο ώστε $\mathrm{A}=\hat{\Delta}=90^0$, $\mathrm{AB}=\frac{1}{4}\Delta\Gamma$ και $\mathrm{AB}=\frac{1}{3}\mathrm{A}\Delta$.

Επιπλέον φέρνουμε $\mathrm{BE}\perp\Delta\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ABE\Delta$ ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $BE\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

(Μονάδες 10)

γ) Αν K,Λ είναι τα μέσα των BE και $A\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι η $A\Gamma$ διέρχεται από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος BK. (Μονάδες 9)

Λύση:

α)Το τετράπλευρο $AB E\Delta$ είναι ορθογώνιο επειδή έχει τρεις γωνίες ορθές.

β) Είναι $\Delta\Gamma = 4AB$, $BE = A\Delta = 3AB$, $AB = \Delta E$.

Άρα, $E\Gamma = \Delta\Gamma - \Delta E = 3AB$. Δηλαδή,

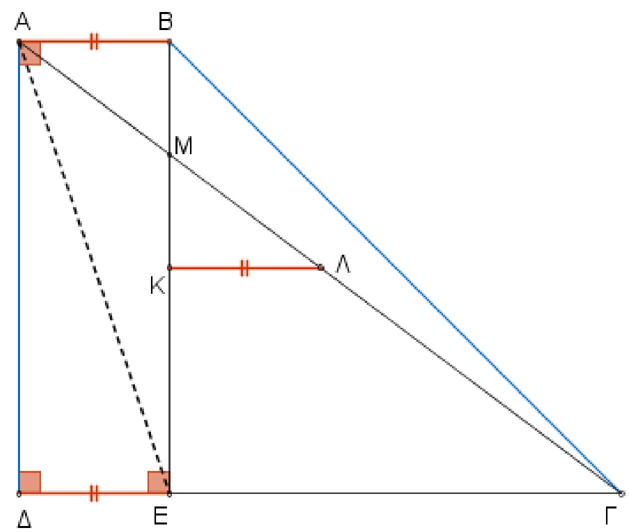
$BE = E\Gamma$, οπότε το τρίγωνο $BE\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

γ) Το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι τραπέζιο και το τμήμα $K\Lambda$ ενώνει τα μέσα των διαγωνίων του.

Άρα $K\Lambda \parallel AB$ και $\mathrm{K\Lambda} = \dfrac{\mathrm{E\Gamma} - \mathrm{AB}}{2} = \dfrac{3\mathrm{AB} - \mathrm{AB}}{2} \Leftrightarrow$

$\mathrm{K\Lambda} \parallel\!= \mathrm{AB}$.

Επομένως το $AB\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο και αν M είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του, τότε θα είναι το μέσο του BK.



ΘΕΜΑ 3759

Δίνεται κύκλος (O,R) με διάμετρο $\mathrm{B\Gamma}$. Θεωρούμε σημείο A του κύκλου και σχεδιάζουμε το τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$. Η προέκταση της AO τέμνει τον κύκλο στο σημείο Z. Φέρουμε το ύψος του $\mathrm{A\Delta}$, η προέκταση του οποίου τέμνει τον κύκλο στο σημείο E.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\mathrm{Z\Gamma} = \mathrm{AB} = \mathrm{BE}$ (Μονάδες 8)

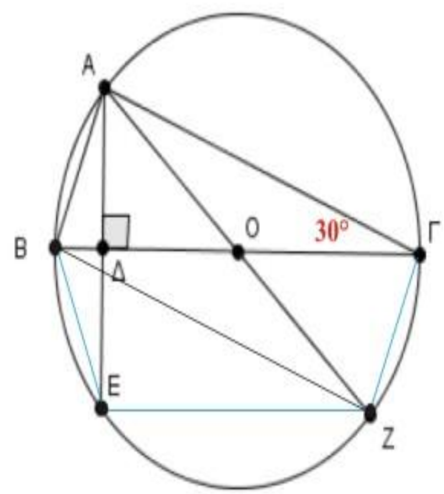
ii. Το τετράπλευρο $\mathrm{BEZ\Gamma}$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 7) β) Αν $\hat{\Gamma}=30^{\circ}$, να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τραπεζίου $\mathrm{BEZ\Gamma}$ είναι ίση με $5\mathrm{R}$, όπου R η ακτίνα του κύκλου. (Μονάδες 10)

Λύση:

α) i) Φέρνουμε τις $\mathrm{BE, BZ, \Gamma Z}$. Η $\mathrm{O\Delta}$ είναι απόστημα στη χορδή AE, οπότε η OB διχοτομεί το $\overset{\frown}{\mathrm{AE}}$, άρα $AB=BE$.

Το $\mathrm{ABZ\Gamma}$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, άρα $\mathrm{AB}=\mathrm{\Gamma Z}$.

ii) Είναι $\mathrm{EZ}//\mathrm{B\Gamma}$ αφού είναι χορδές που ορίζουν ίσα κυρτά τόξα. Επίσης είναι $\mathrm{EZ}<\mathrm{B\Gamma}$ (διάμετρος του κύκλου), άρα το $\mathrm{BEZ\Gamma}$ είναι τραπέζιο, ισοσκελές.



β) Είναι $\mathrm{BA\Gamma}=90^{\circ}$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο.

Έστω $\mathrm{A\Gamma B}=30^{\circ}$, οπότε $\mathrm{AB}=\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}=R$, άρα και $\mathrm{\Gamma Z}=R$.

Αφού $\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{\mathrm{\Gamma Z}}=60^{\circ}\Rightarrow\overset{\frown}{\mathrm{EZ}}=60^{\circ}$, οπότε $\mathrm{AEZ}=30^{\circ}$ δηλαδή και $\mathrm{EZ}=\frac{\mathrm{AZ}}{2}=R$.

Οπότε Περίμετρος $\mathrm{BEZ\Gamma}$ = $BE+EZ+Z\Gamma+\Gamma\mathrm{B}=5R$.

ΘΕΜΑ 3765

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB\parallel\Gamma\Delta$) με $\mathrm{A}=\hat{\Delta}=90^{0}$, $\Delta\Gamma=2AB$ και $\mathrm{B}=3\hat{\Gamma}$. Φέρνουμε $\mathrm{BE}\perp\Delta\Gamma$ που τέμνει τη διαγώνιο $A\Gamma$ στο M. Φέρνουμε την AE που τέμνει τη διαγώνιο $B\Delta$ στο N. Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{\Gamma}=45^{0}$. (Μονάδες 6)

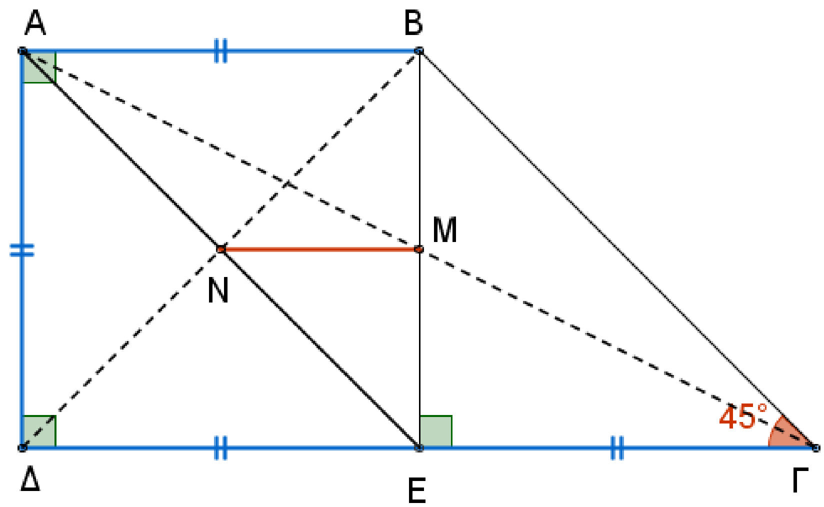
β) Το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)

γ) $\mathrm{MN}=\frac{1}{4}\Gamma\Delta$. (Μονάδες 7)

δ) $\mathrm{AE}\perp\mathrm{B}\Delta$. (Μονάδες 6)

Λύση:

α) $\mathrm{AB}\parallel\Gamma\Delta \Leftrightarrow \mathrm{B}+\hat{\Gamma}=180^0 \overset{B=3\hat{\Gamma}}{\Leftrightarrow} 4\hat{\Gamma}=180^0 \Leftrightarrow \hat{\Gamma}=45^0$.



β) Το τετράπλευρο $ABE\Delta$ είναι ορθογώνιο (έχει τρεις γωνίες ορθές), κι επειδή $\Delta\Gamma \parallel= 2AB$, θα είναι $AB=\Delta E=E\Gamma$, οπότε το $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Τα σημεία $\mathrm{M,N}$ ως σημεία τομής των διαγωνίων του παραλληλογράμμου $AB\Gamma E$ και του ορθογωνίου $ABE\Delta$ αντίστοιχα, θα είναι μέσα των πλευρών $A\Gamma, AE$ του τριγώνου $AE\Gamma$. Άρα: $\mathrm{MN}=\frac{1}{2}\mathrm{E\Gamma}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\Delta\Gamma\right) \Leftrightarrow \mathrm{MN}=\frac{1}{4}\Gamma\Delta$.

δ) Επειδή $\hat{\Gamma}=45^0$ το τρίγωνο $BE\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε $BE=E\Gamma=E\Delta$. Άρα το ορθογώνιο $ABE\Delta$ είναι τετράγωνο, που σημαίνει ότι οι διαγώνιοι του τέμνονται κάθετα, δηλαδή $\mathrm{AE}\perp\mathrm{B}\Delta$.

ΘΕΜΑ 3771

Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου AB και δύο χορδές του $A\Gamma$ και $B\Delta$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο E. Φέρουμε $\mathrm{EZ}\perp\mathrm{AB}$. Να αποδείξετε ότι:

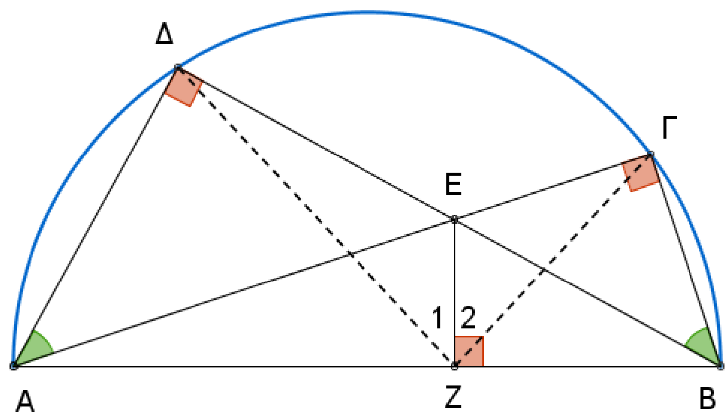
α) Οι γωνίες $\Delta A\Gamma$ και $\Delta B\Gamma$ είναι ίσες. (Μονάδες 7)

β) Τα τετράπλευρα $A\Delta EZ$ και $EZB\Gamma$ είναι εγγράψιμα. (Μονάδες 9)

γ) Η EZ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta Z\Gamma$. (Μονάδες 9)

Λύση:

α) Οι γωνίες $\Delta A\Gamma$ και $\Delta B\Gamma$ είναι ίσες, επειδή είναι εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο $\Delta\Gamma$.



β) Είναι $A\hat{\Delta}B = A\hat{\Gamma}B = 90^0$ (ως εγγεγραμμένες σε ημικύκλιο). Επομένως τα τετράπλευρα $A\Delta EZ$ και $EZB\Gamma$ είναι εγγράψιμα, επειδή έχουν τις απέναντι γωνίες τους ορθές.

γ) Από τα εγγράψιμα τετράπλευρα $A\Delta EZ$ και $EZB\Gamma$, έχουμε $\Delta AE = Z_1$ και $\Gamma BE = Z_2$.

Αλλά, $\Delta AE = \Gamma BE \Leftrightarrow Z_1 = Z_2$, οπότε η EZ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta Z\Gamma$.

ΘΕΜΑ 3775

Δίνεται παραλληλόγραμμο με O το κέντρο του. Από την κορυφή Δ φέρουμε το τμήμα ΔK κάθετο στην $A\Gamma$ και στην προέκτασή του προς το K θεωρούμε σημείο E, ώστε $KE = \Delta K$. Να αποδείξετε ότι:

α) $EO = \dfrac{B\Delta}{2}$. (Μονάδες 8)

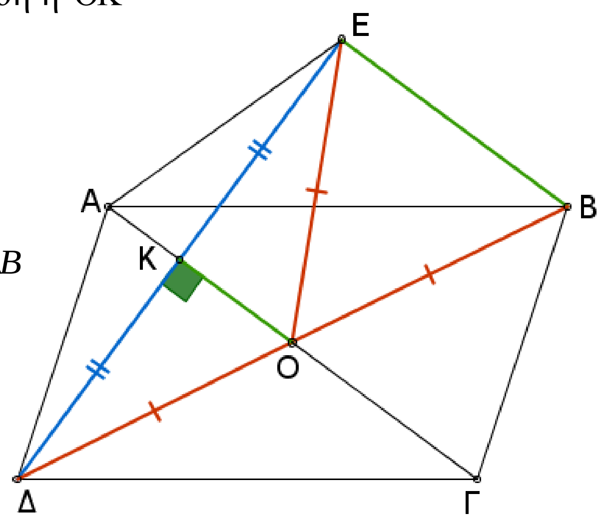
β) Η γωνία ΔEB είναι ορθή. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο $AEB\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)

Λύση:

α) Το τρίγωνο $OE\Delta$ είναι ισοσκελές, επειδή η OK είναι μεσοκάθετος του ΔE.

Άρα: $\mathrm{EO} = \Delta\mathrm{O} = \frac{\mathrm{B}\Delta}{2}$.



β) Η EO είναι διάμεσος του τριγώνου $E\Delta B$ και είναι ίση με το μισό της $B\Delta$. Άρα η γωνία $\Delta\mathrm{EB}$ είναι ορθή.

γ) $\mathrm{KO}//\mathrm{EB}$ (είναι κάθετες στην ίδια ευθεία $E\Delta$) $A\Delta = B\Gamma$(απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου) και $A\Delta = AE$ (A είναι σημείο της μεσοκαθέτου του τμήματος ΔE).

Άρα, το τετράπλευρο $AEB\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο ή παραλληλόγραμμο.

Αν $\mathrm{A}\Delta \perp \mathrm{A}\Gamma$(δηλαδή τα σημεία Δ, K συμπίπτουν), τότε $AE \parallel B\Gamma$, οπότε το $AEB\Gamma$ θα είναι ορθογώνιο.

Πιστεύω πως έπρεπε να δοθεί στην εκφώνηση ότι η διαγώνιος $A\Gamma$ δεν είναι κάθετη στην πλευρά $A\Delta$ του παραλληλογράμμου. Δηλαδή το (γ) ερώτημα δεν ισχύει για οποιοδήποτε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ γι' αυτό έχω την εντύπωση ότι είναι προβληματικό.

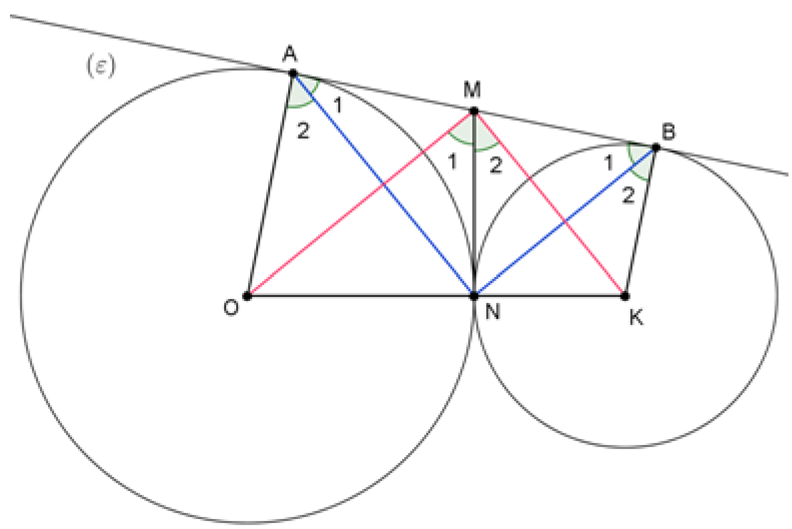
ΘΕΜΑ 3777

Δύο κύκλοι (O, ρ_1), (K, ρ_2) εφάπτονται εξωτερικά στο N. Μια ευθεία (ε)εφάπτεται στους δύο κύκλους στα σημεία A, Bαντίστοιχα. Η κοινή εφαπτομένη των κύκλων στο N τέμνει την (ε) στο M. Να αποδείξετε ότι:

α) Το M είναι μέσον του AB. (Μονάδες 7) β) $OMK = 90^0$.   (Μονάδες 9)

γ) $ANB = 90^0$.   (Μονάδες 9)

Λύση:



α) Τα εφαπτόμενα τμήματα από το M στους κύκλους είναι ίσα , άρα $MA = MN, MB = MN$, οπότε $MA = MB$ άρα το M είναι το μέσον του AB.

β) Οι MO, MK ως διχοτόμοι των εφεξής παραπληρωματικών γωνιών AMN, BMN , είναι μεταξύ τους κάθετες και το ζητούμενο έπεται .

γ) Από το (β) και τα ισοσκελή τρίγωνα MAN, MNB, έχουμε ότι

$$ANB = ANM + MNB = A_1 + B_1 = 90^0.$$

Σχόλιο

Άλλος τρόπος λύσης μπορεί να προκύψει αν δούμε ότι οι γωνίες A_1, B_1 είναι χορδής και εφαπτομένης και ότι τα τετράπλευρα $AMNO, MNKB$ είναι εγγράψιμα , κτλ.

ΘΕΜΑ 3781

Έστω κύκλος (O,ρ) και E το μέσον του τόξου του $\mathrm{B\Gamma}$. Μια ευθεία (ε) εφάπτεται στο κύκλο στο E. Οι προεκτάσεις των $\mathrm{OB},\mathrm{O\Gamma}$ τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία Z και H αντίστοιχα . Να αποδείξετε ότι :

α) $\mathrm{B\Gamma}//\mathrm{ZH}$.

β) $\mathrm{OZ}=\mathrm{OH}$.

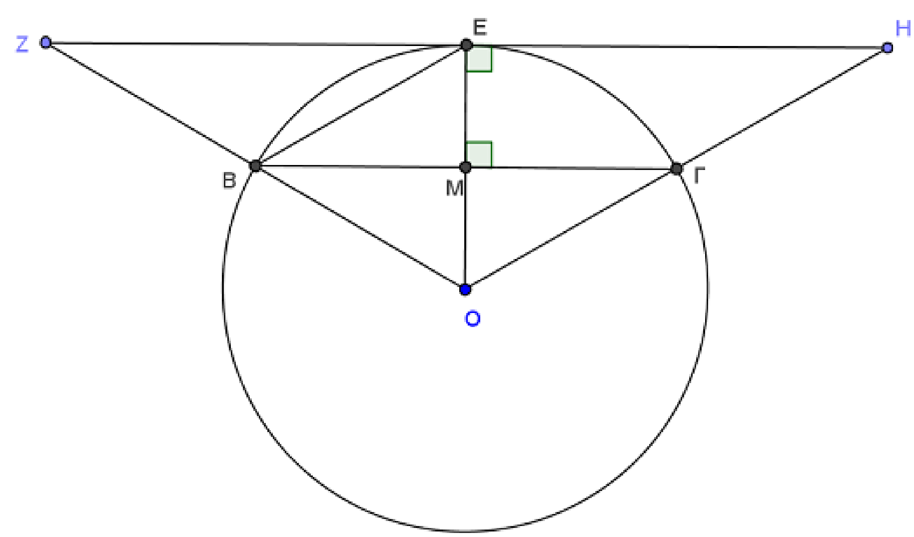
γ) Αν B μέσον της OZ.

i. να αποδείξετε ότι $\mathrm{BEZ}=\dfrac{\mathrm{ZOH}}{4}$

ii. να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ZOH

Λύση:

α) Αφού το E είναι το μέσον του τόξου του $\mathrm{B\Gamma}$, τότε η ακτίνα OE είναι και απόστημα της χορδής $\mathrm{B\Gamma}$ δηλαδή $\mathrm{OE}\perp\mathrm{B\Gamma}$



Έτσι $\mathrm{B\Gamma}//\mathrm{ZH}$ ως κάθετες στην OE

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα OEZ και OEH είναι ίσα επειδή έχουν:

OE κοινή πλευρά και

$\mathrm{BOE}=\mathrm{\Gamma OE}$ ως επίκεντρες που βαίνουν στα ίσα τόξα BE και $\mathrm{E\Gamma}$ άρα $\mathrm{OZ}=\mathrm{OH}$

γ) Αν B μέσον της OZ τότε:

i. Επειδή $OZ=OH$ το τρίγωνο OZH είναι ισοσκελές οπότε $Z=H\,(1)$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο OEZ η EB είναι διάμεσος στην υποτείνουσα, δηλαδή $EB=\frac{OZ}{2}=BZ$.

Έτσι το τρίγωνο BEZ είναι ισοσκελές με $BEZ=Z\,(2)$ και OE ύψος και διχοτόμος .

Όμως η BEZ είναι γωνία χορδής (BE) και εφαπτομένης (ZE), οπότε

$$BEZ=\frac{\tau o\xi BE}{2}\Rightarrow BEZ=\frac{ZOE}{2}\Rightarrow BEZ=\frac{\frac{ZOH}{2}}{2}\Rightarrow BEZ=\frac{ZOH}{4}\,(3)$$

ii. $(2)\overset{(3)}{\Rightarrow}Z=\frac{ZOH}{4}\,(4)$

Από το ισοσκελές τρίγωνο BEZ είναι:

$$Z+H+ZOH=180^\circ\overset{(1),(3)}{\Rightarrow}2Z+ZOH=180^\circ\overset{(4)}{\Rightarrow}\frac{3}{2}ZOH=180^\circ\Rightarrow ZOH=120^\circ$$

$$(1),(4)\overset{ZOH=120^\circ}{\Rightarrow}Z=H=\frac{120^\circ}{4}=30^\circ.$$

ΘΕΜΑ 3784

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $A\Delta=B\Gamma$. Αν E,Λ,Z,K,N,M είναι τα μέσα των AB, $B\Gamma,\Gamma\Delta,\Delta A,\Delta B$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $EMZN$ ρόμβος.

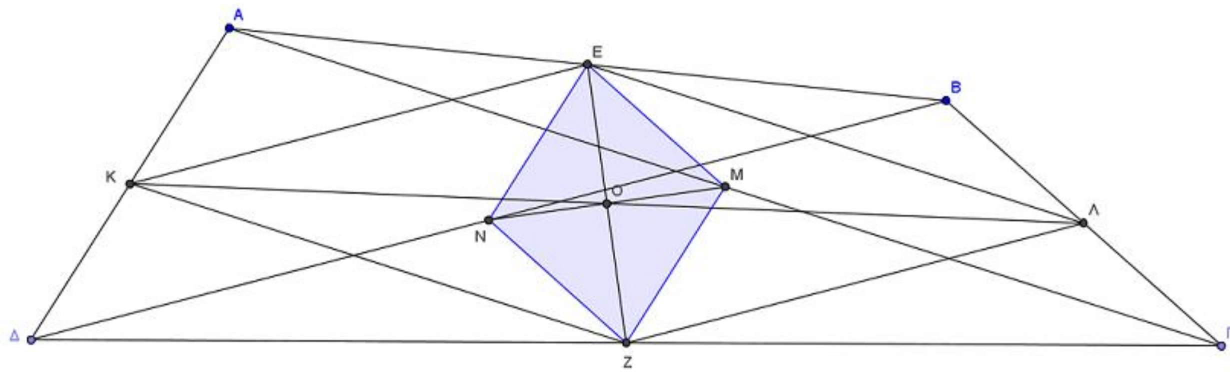
β) Η EZ είναι μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος MN.

γ) $KE=Z\Lambda$.

δ) Τα ευθύγραμμα τμήματα $K\Lambda, MN, EZ$ διέρχονται από ίδιο σημείο.

Λύση:

α) Είναι $EN//\frac{A\Delta}{2}\,(1)$,



αφού το EN ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου $AB\Delta$.

$MZ//=\frac{A\Delta}{2}\,(2)$, αφού το MZ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου $A\Gamma\Delta$.

$EM=\frac{B\Gamma}{2}\overset{B\Gamma=A\Delta}{\Rightarrow}EM=\frac{A\Delta}{2}\,(3)$.

Από $(1),(2),(3)$ συμπεραίνουμε ότι το $EMZN$ ρόμβος.

β) Από τον ρόμβο είναι: $EN=EM$ και $ZN=ZM$,

δηλαδή η EZ είναι μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος MN αφού τα E,Z ισαπέχουν από τα άκρα του MN.

γ) Είναι $KE//=\frac{B\Delta}{2}$ και $Z\Lambda//=\frac{B\Delta}{2}$ γιατί τα $KE,Z\Lambda$ ενώνουν τα μέσα δύο πλευρών των τριγώνων $A\Delta B$ και $B\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Έτσι $KE=Z\Lambda$.

δ) Από τις παραπάνω σχέσεις συμπεραίνουμε ότι το $KE\Lambda Z$ είναι παραλληλόγραμμο. Οι διαγώνιοι του $K\Lambda$ και EZ διέρχονται από το μέσο O της EZ.

Όμως το μέσο Ο της ΕΖ είναι και κέντρο του ρόμβου, οπότε και η ΜΝ διέρχεται από το Ο.

ΘΕΜΑ 3994

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = ΑΓ$ και $Δ, Ε$ τα μέσα των πλευρών $ΑΒ, ΑΓ$ αντίστοιχα. Στην προέκταση της $ΔΕ$ (προς το $Ε$) θεωρούμε σημείο $Λ$ ώστε $ΕΛ = ΑΕ$ και στην προέκταση της $ΕΔ$ (προς το $Δ$) θεωρούμε σημείο $Κ$ τέτοιο ώστε $ΔΚ = ΑΔ$. Να αποδείξετε ότι:

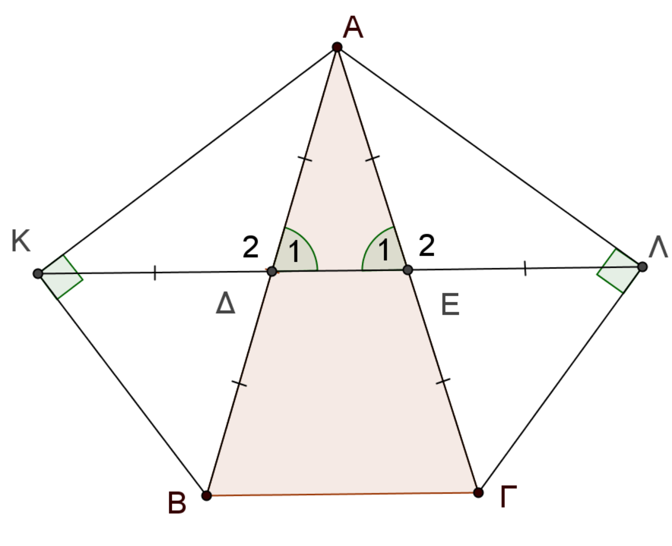
α) $ΔΚ = ΛΕ$.

β) Τα τρίγωνα $ΑΚΒ$ και $ΑΛΓ$ είναι ορθογώνια.

γ) Τα τρίγωνα $ΑΚΒ$ και $ΑΛΓ$ είναι ίσα.

Λύση:

α) Τα τμήματα $ΑΔ, ΑΕ$, $ΒΔ, ΕΓ$ είναι ίσα ως μισά των ίσων τμημάτων $ΑΒ, ΑΓ$



Είναι: $ΕΛ = ΑΕ$, $ΔΚ = ΑΔ$ αλλά $ΑΕ = ΑΔ$ επομένως $ΚΔ = ΛΕ$.

β) Στο τρίγωνο $ΑΚΒ$ η διάμεσος $ΚΔ$ ισούται με το μισό της πλευράς που αντιστοιχεί ($ΚΔ = \frac{ΑΒ}{2}$), οπότε το τρίγωνο $ΑΚΒ$ είναι ορθογώνιο με $Β\hat{Κ}Α = 90^0$.

Ομοίως στο τρίγωνο $ΑΛΓ$ η διάμεσος $ΛΕ$ ισούται με το μισό της πλευράς που αντιστοιχεί ($ΛΕ = \frac{ΑΓ}{2}$), οπότε το τρίγωνο $ΑΛΓ$ είναι ορθογώνιο με $Γ\hat{Λ}Α = 90^0$.

γ) Το τρίγωνο $ΑΔΕ$ είναι ισοσκελές ($ΑΔ = ΑΕ$) , επομένως $\hat{Δ}_1 = \hat{Ε}_1$.

Συγκρίνω πρώτα τα τρίγωνα $ΑΚΔ$ και $ΑΕΛ$

Έχουν:

$$ΑΔ = ΑΕ \ (\textit{μισά ίσων τμημάτων})$$
$$ΚΔ = ΛΕ \ (\textit{προηγούμενο ερώτημα})$$
$$γωνΔ_2 = γωνΕ_2 \ (\textit{παραπληρωματικές των ίσων γωνιών } Δ_1, Ε_1$$

Άρα τα τρίγωνα $ΑΚΔ$ και $ΑΕΛ$ είναι ίσα (Π-Γ-Π), επομένως θα είναι και $ΚΑ = ΑΛ$.

Συγκρίνω τώρα τα τρίγωνα $ΑΚΒ$ και $ΑΛΓ$

- Είναι ορθογώνια
- Έχουν $ΑΒ = ΑΓ$
- και $ΚΑ = ΑΛ$

Άρα τα τρίγωνα $ΑΚΒ$ και $ΑΛΓ$ είναι ίσα.

ΘΕΜΑ 4559

Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες $(ε)$ και $(ζ)$ και μία Τρίτη που τις τέμνει στα σημεία $Α, Β$ αντίστοιχα. Θεωρούμε τις διχοτόμους των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών που σχηματίζονται, οι οποίες τέμνονται σε σημείο $Δ$. Αν $Μ$ είναι το μέσον του $ΑΒ$, να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία $Β\hat{Δ}Α$ είναι ορθή.

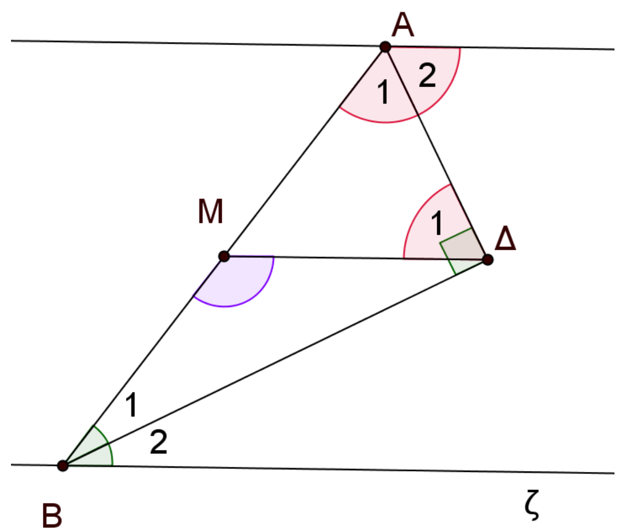
β) $Β\hat{Μ}Δ = 2Μ\hat{Δ}Α$.

γ) $ΜΔ // (ε)$.

Λύση:

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

α) Είναι $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ *και* $\hat{B}_1=\hat{B}_2$ (ΑΔ , ΒΔ διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}$,$\hat{B}$ αντίστοιχα)



Οι γωνίες $\hat{A}$,$\hat{B}$ είναι εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων (ε) , (ζ) που τέμνονται από την ΑΒ, επομένως :

$\hat{A}+\hat{B}=180^0$

$2\cdot\hat{A}_1+2\cdot\hat{B}_1=180^0$.

$\hat{A}_1+\hat{B}_1=90^0$

Στο τρίγωνο ΑΔΒ είναι $\hat{A}_1+\hat{B}_1=90^0$,

επομένως $A\hat{\Delta}B=90^0$.

β) Στο ορθογώνιο , πλέον τρίγωνο ΑΔΒ

, η ΔΜ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα , επομένως $\Delta M=\dfrac{AB}{2}=AM$, άρα

$\hat{A}_1=\hat{\Delta}_1$.

Η γωνία $B\hat{M}\Delta$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΜΑΔ, επομένως

$B\hat{M}\Delta=\hat{A}_1+\hat{\Delta}_1=2\hat{\Delta}_1=2M\hat{\Delta}A$.

γ) είναι $\hat{A}_1=\hat{\Delta}_1$ και $\hat{A}_1=\hat{A}_2$, οπότε $\hat{\Delta}_1=\hat{A}_2$. Όμως οι γωνίες $\hat{\Delta}_1$, $\hat{A}_2$ είναι εντός εναλλάξ των ευθειών ΜΔ και (ε) που τέμνονται από την ΑΔ.

Άρα οι ευθείες ΜΔ και (ε) είναι παράλληλες.

ΘΕΜΑ 4781

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με ΑΚ διχοτόμο της γωνίας Α. Στην προέκταση της ΑΚ θεωρούμε σημείο Δ ώστε ΑΚ=ΚΔ . Η παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ τέμνει τις ΑΓ και ΒΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $ΑΕΔ$ είναι ισοσκελές.

β) Η $ΕΚ$ είναι μεσοκάθετος της $ΑΔ$.

γ) Τα τρίγωνα $ΑΚΒ$ και $ΚΔΖ$ είναι ίσα.

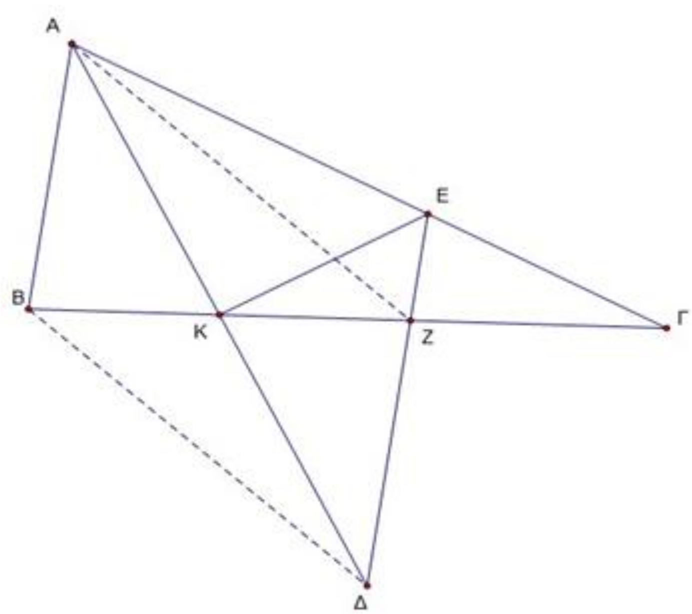
δ) Το τετράπλευρο $ΑΖΔΒ$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση:

α) Είναι $ΕΔΑ = ΒΑΔ = \frac{Α}{2}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $ΔΕ$ και $ΑΒ$ που τέμνονται από την $ΑΔ$.

Όμως και $ΕΑΔ = \frac{Α}{2}$ οπότε

$ΕΔΑ = ΕΑΔ$ δηλαδή το τρίγωνο $ΑΕΔ$ είναι ισοσκελές αφού έχει δύο ίσες γωνίες.



β) Η $ΕΚ$ είναι διάμεσος στη βάση $ΑΔ$ του ισοσκελούς τριγώνου $ΑΕΔ$ οπότε είναι μεσοκάθετος της.

γ) Τα τρίγωνα $ΑΚΒ$ και $ΚΔΖ$ είναι ίσα από $Γ-Π-Γ$ αφού έχουν:

$ΑΚ = ΚΔ$ από την υπόθεση

$ΕΔΑ = ΒΑΔ = \frac{Α}{2}$ και $ΑΚΒ = ΔΚΖ$ ως κατακορυφήν.

δ) Από την παραπάνω ισότητα συμπεραίνουμε ότι $ΒΚ = ΚΖ$.

Όμως είναι και $ΑΚ = ΚΔ$

Άρα το $AZ\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοι του διχοτομούνται.

ΘΕΜΑ 4783

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Στην προέκταση του ύψους του AK, θεωρούμε σημείο Δ ώστε $AK = K\Delta$. Έστω Λ, M, N τα μέσα των πλευρών $AB, A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

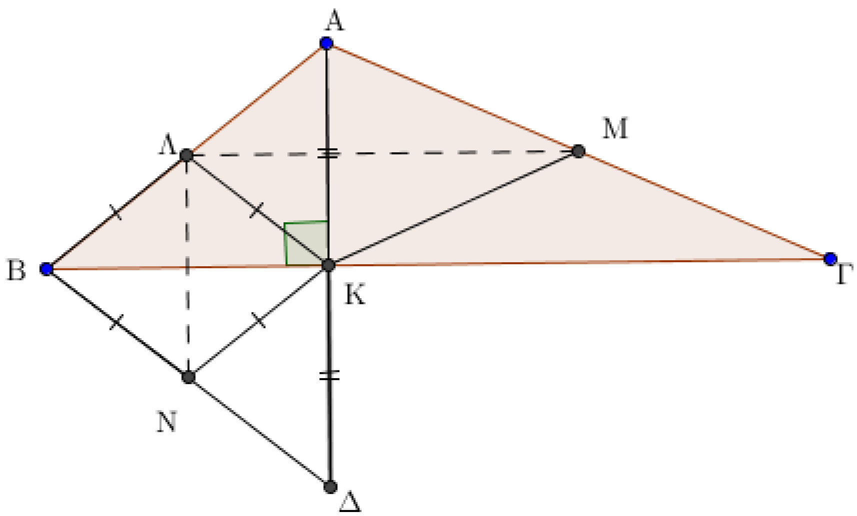
β) Το τετράπλευρο $B\Lambda KN$ είναι ρόμβος . (Μονάδες 9)

γ) $\Lambda M \perp \Lambda N$. (Μονάδες 9)

Λύση:

α) Γνωρίζουμε ότι $AK = K\Delta$ και $B\Gamma \perp A\Delta$, άρα το σημείο B ανήκει στην μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος $A\Delta$, συνεπώς ισαπέχει από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος και το σχηματιζόμενο τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές.

β) Τα σημεία Λ, K ενώνουν τα μέσα των πλευρών $AB, A\Delta$ άρα: $\Lambda K = \frac{B\Delta}{2} = BN$



Τα σημεία N, K ενώνουν τα μέσα των πλευρών $\Delta B, A\Delta$ άρα: $NK = \frac{BA}{2} = B\Lambda$

Γνωρίζουμε από το προηγούμενο ερώτημα ότι $BA = B\Delta \Rightarrow \frac{BA}{2} = \frac{B\Delta}{2} \Rightarrow B\Lambda = BN$

Άρα το τετράπλευρο $\mathrm{B\Lambda KN}$ έχει τέσσερις πλευρές ίσες άρα πρόκειται για ρόμβο.

γ) Τα σημεία Λ, N ενώνουν τα μέσα των πλευρών $\mathrm{AB}, \mathrm{B\Delta}$ άρα: $\mathrm{\Lambda N}//\mathrm{A\Delta}$

Τα σημεία Λ, M ενώνουν τα μέσα των πλευρών $\mathrm{AB}, \mathrm{A\Gamma}$ άρα: $\mathrm{\Lambda M}//\mathrm{B\Gamma}$

Γνωρίζουμε ότι $\mathrm{A\Delta} \perp \mathrm{B\Gamma}$, άρα λαμβάνοντας τα παραπάνω έχουμε: $\mathrm{\Lambda N} \perp \mathrm{\Lambda M}$.

ΘΕΜΑ 4786

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Οι μεσοκάθετοι μ_1, μ_2 των πλευρών $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα τέμνονται στο μέσο M της $B\Gamma$.

α)Να αποδειχθεί ότι:

i)Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\angle A = 90^\circ$.

ii)Το τετράπλευρο $A\Lambda KM$ είναι παραλληλόγραμμο

(σημεία K, Λ δεν αναφέρονται πουθενά στην εκφώνηση-στο σχήμα ωστόσο που δίνεται φαίνονται σαν τα σημεία τομής των μ_1, μ_2 με τις $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα).

iii) $\Lambda\Theta = \dfrac{B\Gamma}{4}$ όπου Θ το σημείο τομής των $AM, K\Lambda$.

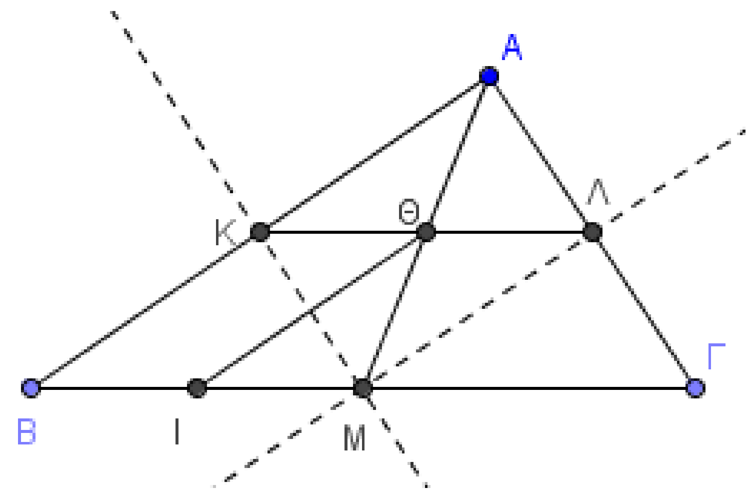
β) Αν I σημείο της $B\Gamma$ τέτοιο ώστε $BI = \dfrac{B\Gamma}{4}$ να αποδειχθεί ότι το τετράπλευρο $K\Theta IB$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση:

α) i) Η AM είναι διάμεσος. Βλέπουμε ότι $AM = BM$ αφού το M ανήκει στη διάμεσο της AB.Επομένως η διάμεσος είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία βαίνει. Έτσι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την $B\Gamma$ άρα $\angle A = 90^\circ$.

ii) Αφού η μ_1 είναι μεσοκάθετος της AB θα είναι κάθετη σ' αυτήν. Αφού το τρίγωνο είναι ορθογώνιο $A\Gamma \perp AB$ άρα $MK \parallel A\Gamma$. Ομοίως $M\Lambda \parallel AB$ επομένως οι απέναντι πλευρές του τετραπλεύρου $AKM\Lambda$ είναι ίσες ανά δύο κι έτσι αυτό είναι παραλληλόγραμμο.

iii) Οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται άρα $\Lambda\Theta = \frac{K\Lambda}{2}$. Όμως τα τρίγωνα $\triangle ABM$, $A\Gamma M$ είναι ισοσκελή αφού η κορυφή τους M ανήκει στη μεσοκάθετο της απέναντι πλευράς τους. Η κάθε μεσοκάθετος διχοτομεί το αντίστοιχο τμήμα της άρα K, Λ είναι τα μέσα των $AB, A\Gamma$. Έτσι $K\Lambda = \frac{B\Gamma}{2}$ και τελικά $\Lambda\Theta = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$.



β)Είδαμε παραπάνω ότι $K\Lambda \parallel B\Gamma$ κι αφού το I ανήκει στην $B\Gamma$ και το Θ στην $K\Lambda$ θα είναι $K\Theta \parallel BI$. Ακόμη $K\Theta = \Lambda\Theta = \frac{B\Gamma}{4} = BI$ άρα το $K\Theta IB$ έχει δύο απέναντι πλευρές παράλληλες και ίσες συνεπώς είναι παραλληλόγραμμο.

ΘΕΜΑ 4788

Δίνεται τραπέζιο $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ με $\mathrm{AB}//\Gamma\Delta$, $\Delta\Gamma = 4\mathrm{AB}$ και $\mathrm{B\Gamma} = 2\mathrm{AB}$. Θεωρούμε σημείο Z της $\Gamma\Delta$, ώστε $\Delta\mathrm{Z} = \mathrm{AB}$.

Αν η γωνία Γ είναι 60° και BE το ύψος του τραπεζίου, να αποδείξετε ότι:

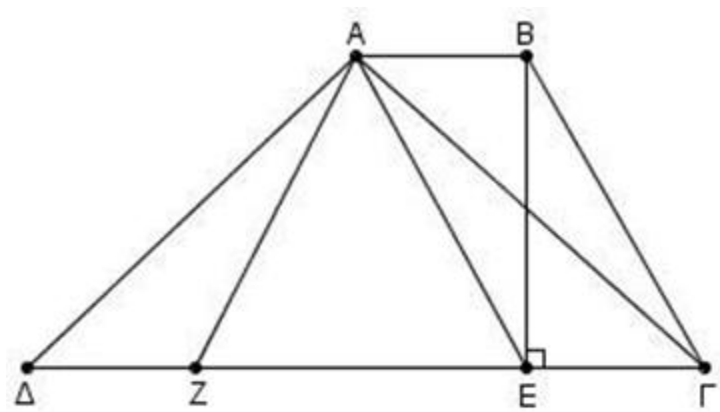
α) Το τετράπλευρο $\mathrm{AB\Gamma E}$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Το τρίγωνο ZAE είναι ισόπλευρο.

γ) Τα τρίγωνα ΔAZ και ΓAE είναι ίσα.

Λύση:

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $BE\Gamma$ είναι $\hat{\Gamma}=60^\circ$ οπότε $\Gamma BE=30^\circ$, έτσι $\Gamma E=\frac{B\Gamma}{2}\Rightarrow \Gamma E=AB$. Όμως $\Gamma E//AB$ έτσι το $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.



β) Από το $AB\Gamma E$ είναι $AE=B\Gamma=2AB$.

Είναι $ZE=\Gamma\Delta-\Delta Z-E\Gamma \Leftrightarrow$

$ZE=4AB-AB-AB \Leftrightarrow ZE=2AB$.

$AEZ=\hat{\Gamma}=60^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά.

Έτσι το τρίγωνο ZAE είναι ισοσκελές αφού $AE=ZE$ και επειδή $AEZ=60^\circ$ θα είναι ισόπλευρο.

γ) Τα τρίγωνα ΔAZ και ΓAE είναι ίσα από $\Pi-\Gamma-\Pi$ αφού έχουν:

$\Delta Z=E\Gamma=AB$, $AZ=AE$ από το ισόπλευρο τρίγωνο ZAE και

$\Delta ZA=AE\Gamma=120^\circ$ ως παραπληρωματικές των γωνιών Z,E του ισοπλεύρου τριγώνου.

ΘΕΜΑ 4790

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB//\Gamma\Delta$ και $A\Delta=B\Gamma=AB$. Φέρουμε τμήματα AE και BZ κάθετα στις διαγώνιες $B\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

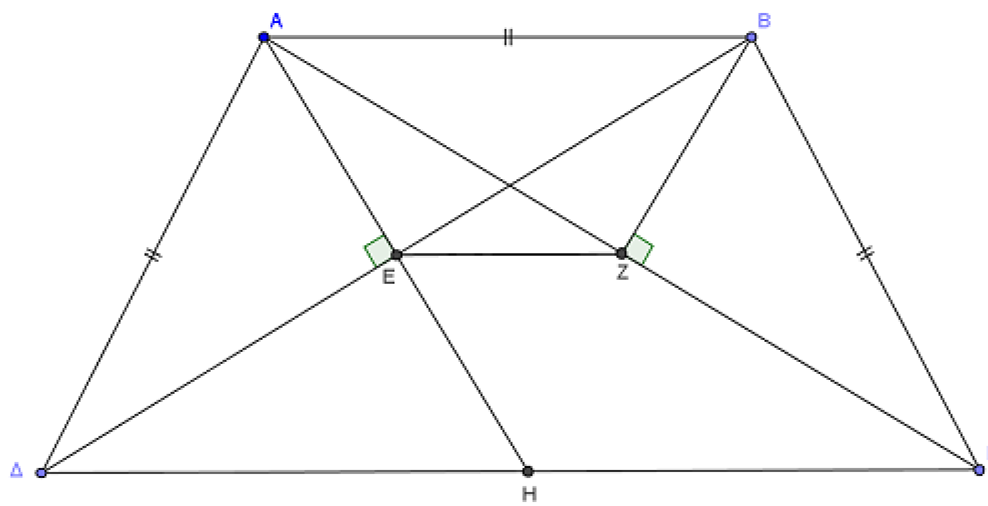
α) Τα σημεία Z και E είναι μέσα των διαγωνίων $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα.

β) $AE = BZ$.

γ) Το τετράπλευρο $AEZB$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

δ) Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ.

Λύση:



α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AB\Delta$ είναι ισοσκελή αφού $A\Delta = B\Gamma = AB$ και τα τμήματα BZ και AE είναι ύψη στις βάσεις τους, άρα θα είναι και διάμεσοι των τριγώνων, οπότε τα Z και E είναι μέσα των διαγωνίων $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα $AE\Delta$ και $BZ\Gamma$ είναι ίσα επειδή έχουν:

$A\Delta = B\Gamma$ από την υπόθεση και $\Delta E = \Gamma Z$ ως μισά των ίσων διαγωνίων $A\Gamma$ και $B\Delta$ ($AB\Gamma\Delta$ ισοσκελές τραπέζιο)

γ) $EZ // AB$ αφού το EZ ενώνει τα μέσα των διαγωνίων του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$.

$AE = BZ$ από την ισότητα των παραπάνω τριγώνων

Οι BZ , AE δεν είναι παράλληλες ως κάθετες στις τεμνόμενες $A\Gamma$ και $B\Delta$

Άρα το $AEZB$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

δ) Αν Η είναι το σημείο τομής της ΑΕ με τη ΔΓ τότε στο τρίγωνο ΑΗΓ είναι Ζ μέσο της ΑΓ και ΖΕ//ΑΒ//ΓΗ , δηλαδή το Ε είναι μέσο της ΑΗ.

Στο τρίγωνο ΑΔΗ το ΔΕ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε αυτό είναι ισοσκελές, έτσι το ΔΕ ή η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ.

ΘΕΜΑ 4791

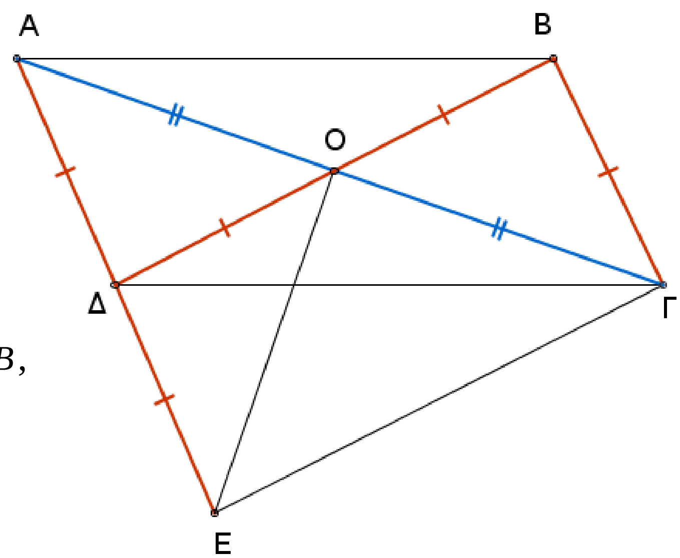
Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ τέτοιο ώστε αν φέρουμε την κάθετη στην $ΑΓ$ στο κέντρο του $Ο$, αυτή τέμνει την $ΑΔ$ σε σημείο $Ε$ τέτοιο ώστε $ΔΕ = ΑΔ$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $ΑΕΓ$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Το τετράπλευρο $ΒΓΕΔ$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

γ) Το τρίγωνο $ΒΟΓ$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

Λύση:



α) Η ΕΟ είναι μεσοκάθετος της $ΑΓ$, άρα το τρίγωνο $ΑΕΓ$ είναι ισοσκελές.

β) $ΒΓ = ΑΔ = ΔΕ$, οπότε $ΒΓ \parallel= ΔΕ$, δηλαδή το τετράπλευρο $ΒΓΕΔ$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΟ η $ΟΔ$ είναι διάμεσος, άρα $ΟΔ = ΔΑ = ΔΕ$. Αλλά $ΔΟ = ΟΒ$, οπότε $ΒΟ = ΒΓ$.

ΘΕΜΑ 4792

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Αν M, K, Λ είναι τα μέσα των πλευρών $B\Gamma, AB, A\Delta$ αντίστοιχα, τότε:

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $BA\Delta$ (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι:

i) Το τετράπλευρο $K\Lambda\Gamma M$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με μεγάλη βάση

διπλάσια από τη μικρή. (Μονάδες 8)

ii) Το τρίγωνο $KM\Lambda$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 10)

Λύση:

α) Οι γωνίες του ισοπλεύρου τριγώνου είναι 60^o η καθεμία. Η γωνία $\Gamma = 60^0$ είναι εξωτερική στο ισοσκελές τρίγωνο $A\Gamma\Delta$, οπότε θα είναι $A\hat{\Delta}\Gamma = \Delta A\Gamma = 30^0$.

Έχουμε λοιπόν, $A = 90^0, B = 60^0, \Delta = 30^0$.

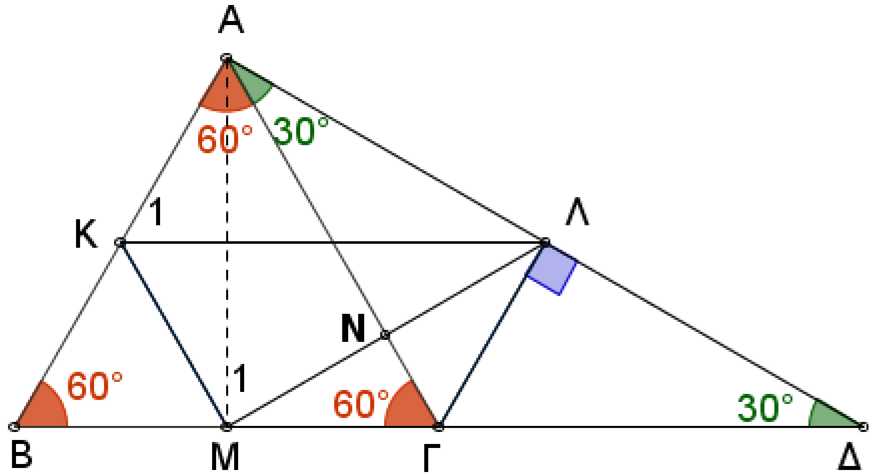
β. i) $K\Lambda \parallel M\Gamma$ (ενώνει τα μέσα των πλευρών $AB, A\Delta$ του τριγώνου $AB\Delta$).

$\mathrm{KM} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{2}$ ((ενώνει τα μέσα των πλευρών $AB, B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$).

Η $\Gamma\Lambda$ είναι κάθετη στην $A\Delta$, ως διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου $A\Gamma\Delta$, κι επειδή $\hat{\Gamma} = 30^0 \Leftrightarrow \Gamma\Lambda = \frac{\Gamma\Delta}{2} = \frac{A\Gamma}{2}$.

Άρα $KM = \Gamma\Lambda$, οπότε το τετράπλευρο $K\Lambda\Gamma M$ είναι ισοσκελές τραπέζιο (δεν μπορεί να είναι παραλληλόγραμμο, γιατί όπως θα δείξουμε είναι $K\Lambda = 2M\Gamma$).

Πράγματι: $K\Lambda = \frac{B\Delta}{2} = \frac{2B\Gamma}{2} = B\Gamma = 2M\Gamma$.



ii) $K_1 = 60^0$ (εντός εκτός και επί τα αυτά με τη γωνία B)

$AM = \frac{A\Delta}{2}$ (απέναντι από γωνία 30^0 σε ορθογώνιο τρίγωνο).

$M\Lambda = \frac{A\Delta}{2}$ (διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου).

Άρα το τρίγωνο $AM\Lambda$ είναι ισόπλευρο, οπότε $M_1 = 60^0$.

Αφού $M_1 = K_1$, το τετράπλευρο $AKM\Lambda$ είναι εγγράψιμο κι επειδή $A = 90^0$,

θα είναι και $KM\Lambda = 90^0$.

Σημείωση: Το σημείο N που δινόταν στο σχήμα δεν χρησιμοποιήθηκε.

ΘΕΜΑ 4793

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και ο περιγεγραμμένος του κύκλος (O,ρ) ώστε η διαγώνιος του ΔB να είναι διάμετρος του κύκλου. Η γωνία $\hat{B}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{\Delta}$ και οι πλευρές ΑΒ και $B\Gamma$ είναι ίσες. Φέρουμε κάθετη στη $B\Delta$ στο O, η οποία τέμνει τις πλευρές $A\Delta$ και $\Gamma\Delta$ στα E και Z αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$. (Μον 6)

β) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔAB και $\Delta\Gamma B$. (Μον 6)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma O$ είναι ρόμβος. (Μον 7)

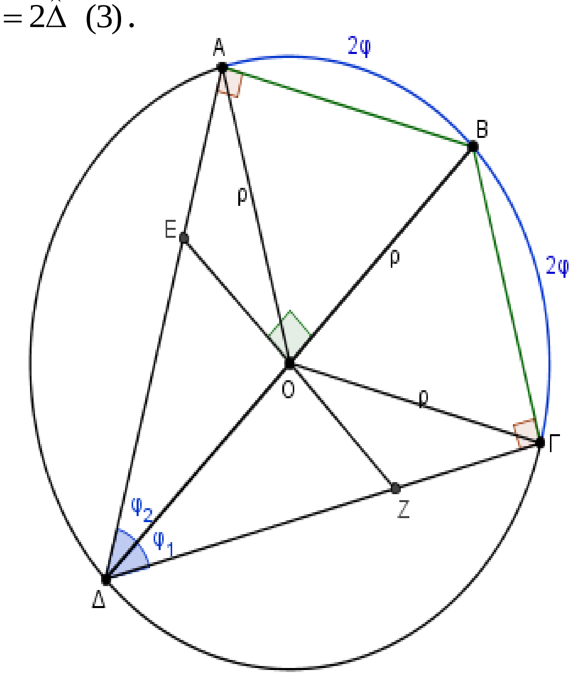
γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΟΕ είναι εγγράψιμο σε κύκλο. (Μον 4)

Λύση:

α) Αφού η ΔB είναι διάμετρος τότε $\Delta\overset{\frown}{A}B, \Delta\overset{\frown}{\Gamma}B$ είναι ημικύκλια. Άρα $\hat{A} = 90^o = \hat{\Gamma}$ (1)

ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στα προηγούμενα ημικύκλια.

Αλλά $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}=360^o$ (2) και από υπόθεση $\hat{B}=2\hat{\Delta}$ (3).



$(2) \overset{(1),(3)}{\Leftrightarrow} 3\hat{\Delta}=180^o \Leftrightarrow \hat{\Delta}=60^o (4)$. Έτσι λόγω $(3), \hat{B}=120^o (5)$.

β) Όμως οι χορδές $AB=B\Gamma$ από υπόθεση. Άρα $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{B\Gamma}=2\varphi$. Τότε $\hat{\phi}_1=\hat{\phi}_2=\phi$ ως εγγεγραμμένες σε ίσα τόξα.

Αλλά $\hat{\Delta}=\hat{\phi}_1+\hat{\phi}_2$. Λόγω $(4), \phi=30^o$.

Τα τρίγωνα ΔAB και $\Delta\Gamma B$ είναι ορθογώνια $\hat{A}=90^o=\hat{\Gamma}$, $AB=B\Gamma$, $\hat{\phi}_1=\hat{\phi}_2$. Από κριτήριο είναι ίσα.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta AB, AO$ είναι διάμεσος (υπόθεση: ΔB διάμετρος) και $\hat{\varphi}_2 = 30^o$. Άρα $AB = AO = OB = \dfrac{\Delta B}{2} = \rho$. Όμοια στο τρίγωνο $\Delta\Gamma B$, $O\Gamma = B\Gamma = OB = \rho$.

Άρα το τετράπλευρο $AB\Gamma O$ είναι ρόμβος, αφού έχει τις πλευρές του ίσες.

δ) Το τετράπλευρο ABOE είναι εγγράψιμο σε κύκλο, αφού οι απέναντι γωνίες του, $\hat{A} + E\hat{O}B = 90^o + 90^o = 180^o$, παραπληρωματικές ($EZ \perp \Delta B$ από υπόθεση).

ΘΕΜΑ 4795

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Με βάση την AB κατασκευάζουμε ισοσκελές τρίγωνο $A\Delta B$ με γωνία $\hat{\Delta} = 120^0$. Θεωρούμε τα μέσα Z και H των πλευρών $A\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι η $\Delta\Gamma$ είναι μεσοκάθετος του AB. Μονάδες 8)

β) Αν η $\Delta\Gamma$ τέμνει την AB στο Θ, να αποδείξετε ότι η γωνία $\mathrm{Z}\hat{\Theta}\mathrm{M}$ είναι ορθή. (Μονάδες 9)

γ) Αν η ZK είναι κάθετη στην AB από το σημείο Z, να αποδείξετε ότι $\mathrm{ZK} = \dfrac{\mathrm{A\Delta}}{4}$

(Μονάδες 8)

Λύση:

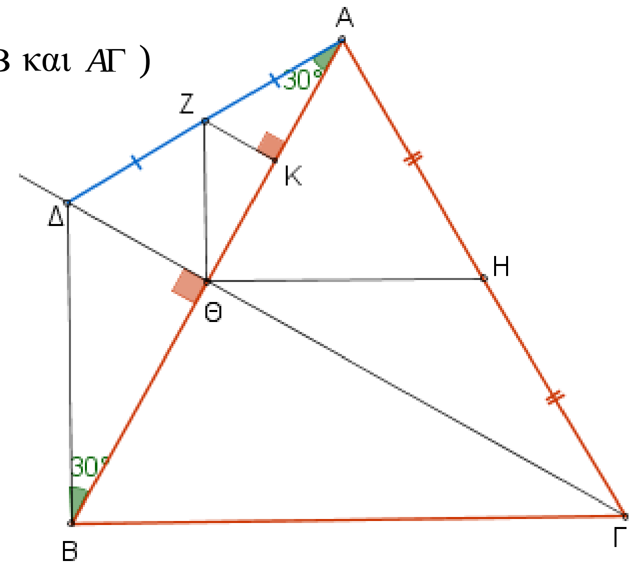
α) Επειδή το τρίγωνο $A\Delta B$ είναι ισοσκελές, το $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο και έχουν κοινή βάση την AB, η $\Delta\Gamma$ είναι μεσοκάθετος του AB.

β) Από το ισοσκελές $A\Delta B$ έχουμε:

$$\mathrm{BA\Delta} = \mathrm{AB\Delta} \overset{\mathrm{A\hat{\Delta}B}=120^0}{=} 30^0.$$ Άρα $\Delta B\Gamma = 90^0$

Είναι ακόμα $Z\Theta \parallel \Delta B$ (ενώνει τα μέσα Z και Θ των πλευρών $A\Delta$ και AB)

$\Theta H \parallel B\Gamma$ (ενώνει τα μέσα Θ και H των πλευρών ΑΒ και $A\Gamma$)



Άρα $Z\hat{\Theta}H = 90^0$ (έχει πλευρές παράλληλες με τη γωνία $\Delta B\Gamma = 90^0$)

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΖΚΑ, είναι

$ZAK = 30^0 \Leftrightarrow ZK = \frac{AZ}{2} \Leftrightarrow ZK = \frac{A\Delta}{4}$.

ΘΕΜΑ 4796

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) και O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Η $A\Gamma$ είναι κάθετη στην $A\Delta$ και η $B\Delta$ είναι κάθετη στη $B\Gamma$. Θεωρούμε τα μέσα M, E, Z των $\Gamma\Delta, B\Delta, A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $ME = MZ$ (Μονάδες 6)

β) Η ΜΖ είναι κάθετη στην $A\Gamma$ (Μονάδες 6)

γ) Τα τρίγωνα $M\Delta E$ και $MZ\Gamma$ είναι ίσα (Μονάδες 7)

δ) Η ΟΜ είναι μεσοκάθετος του ΕΖ (Μονάδες 6)

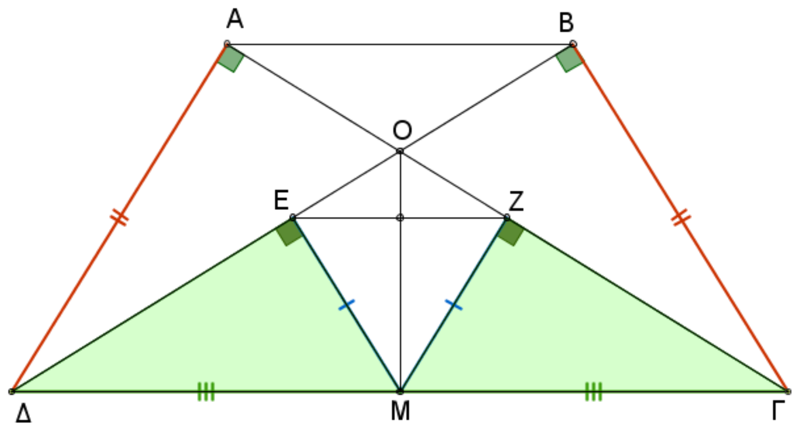
Λύση:

α) Επειδή M, E, Z είναι μέσα των $\Gamma\Delta, B\Delta, A\Gamma$ αντίστοιχα, θα είναι $ME = \frac{B\Gamma}{2}$ και

$MZ = \frac{A\Delta}{2}$.Αλλά λόγω του ισοσκελούς τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$, είναι $B\Gamma = A\Delta$. Οπότε:

$ME = MZ$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444



β) $MZ \parallel A\Delta$ κι επειδή $\mathrm{A\Delta} \perp \mathrm{A\Gamma} \Leftrightarrow \mathrm{MZ} \perp \mathrm{A\Gamma}$

γ) Ομοίως είναι $\mathrm{ME} \perp \mathrm{B\Delta}$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $M\Delta E$ και $MZ\Gamma$, έχουν $ME = MZ$ και $\Delta M = M\Gamma$, οπότε είναι ίσα.

δ) Η OM είναι μεσοκάθετος του $\Delta\Gamma$.

Αλλά, $EZ \parallel \Delta\Gamma$ (ενώνει τα μέσα των διαγωνίων του τραπεζίου). Άρα η OM είναι κάθετη στην EZ. Επειδή όμως το τρίγωνο MEZ είναι ισοσκελές θα είναι μεσοκάθετος.

Σημείωση

Το σχήμα που έχουν δώσει είναι απαράδεκτο. Δείχνει (οξείες ή αμβλείες) γωνίες που υποτίθεται ότι είναι ορθές.

ΘΕΜΑ 4797

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Δ, Ε και Μ των ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Στην προέκταση του ΜΔ (προς το Δ) θεωρούμε τμήμα ΔΖ=ΔΜ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΒΜΔ είναι ίσα.

β) Το τετράπλευρο ΖΑΓΜ είναι παραλληλόγραμμο

γ) Τα τμήματα ΖΕ και ΑΔ τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται

δ) Η ΒΖ είναι κάθετη στη ΖΑ.

Λύση:

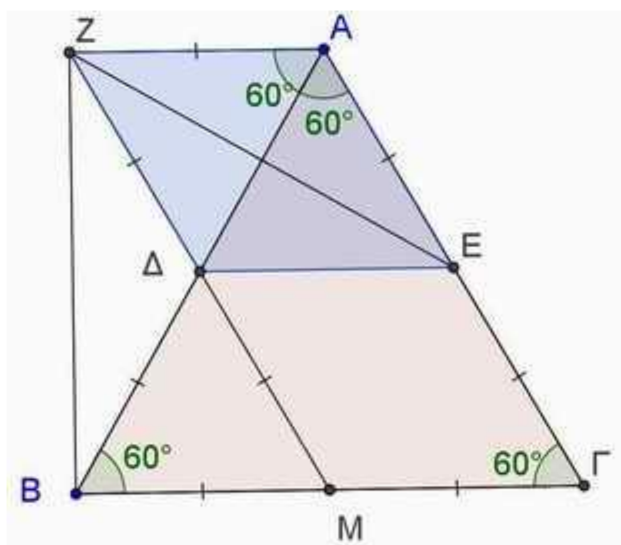
α) Τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΒΜΔ έχουν:

$A\Delta = \Delta B$ (Δ μέσο ΑΒ), $\Delta M = \Delta Z$ (υπόθεση), $Z\Delta A = B\Delta M$ ((κατακορυφήν)

επομένως είναι ίσα (Π-Γ-Π).

β) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΖΔ και ΒΜΔ έχουμε: $BM = ZA$ και $ZA\Delta = \Delta BM = 60^0$. Οι γωνίες $ZAE, A\Gamma B$ είναι παραπληρωματικές και εντός και επί τα αυτά των ευθειών ZA και $M\Gamma$ που τέμνονται από την $A\Gamma$

Άρα: $ZA // M\Gamma (1)$



Επίσης είναι $BM = M\Gamma$ και επομένως $ZA = M\Gamma (2)$

Από τις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι το $ZA\Gamma M$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Αφού το $ZA\Gamma M$ είναι παραλληλόγραμμο θα είναι : $Z\Delta // AE$ και $Z\Delta = AE$ (μισά των ίσων τμημάτων $ZM, A\Gamma$)

Άρα το $ZAE\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο κι επειδή έχει δύο συνεχόμενες πλευρές ίσες $(ZA = AE)$ το $ZAE\Delta$ θα είναι ρόμβος , οπότε οι διαγώνιοί του $ZE, A\Delta$ θα τέμνονται κάθετα και θα διχοτομούνται.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

δ) Στο τρίγωνο ZAB η διάμεσος $Z\Delta=\dfrac{AB}{2}$ επομένως $BZA=90^0$.

ΘΕΜΑ 4798

Δίνεται τρίγωνο με $AB<A\Gamma$. Φέρνουμε τμήμα $B\Delta$ κάθετο στην AB και με $B\Delta=A\Gamma$ και τμήμα ΓE κάθετο στην $A\Gamma$ με $\Gamma E=AB$.

Θεωρούμε τα μέσα Z,Θ των $A\Delta, AE$, αντίστοιχα καθώς και τη διχοτόμο $A\delta$ της γωνίας ΔAE.

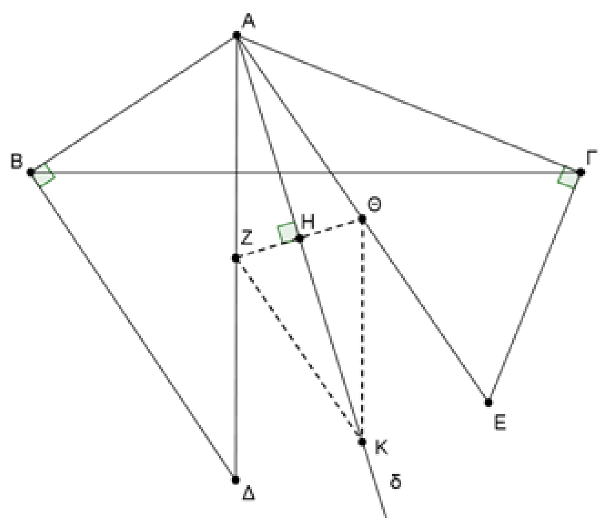
α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta=AE$. (Μονάδες 9)

β) Αν K τυχαίο σημείο της διχοτόμου $A\delta$, να αποδείξετε ότι το K ισαπέχει από τα μέσα Z και Θ. (Μονάδες 9)

γ) Αν το K είναι σημείο της διχοτόμου $A\delta$ τέτοιο ώστε $KZ=AZ$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AZK\Theta$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 7)

Λύση:

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Delta, A\Gamma E$ έχουν δύο ζεύγη πλευρών ίσες μία προς μία, οπότε είναι ίσα. Έπεται ότι $A\Delta=AE$.



β) Τα τρίγωνα $AZK, A\Theta K$ είναι ίσα αφού έχουν την AK κοινή, $AZ=A\Theta$ ως μισά ίσων τμημάτων, $ZAH=\Theta AH$, έπεται ότι $ZK=K\Theta$.

γ) Αφού $AZ=ZK$, το Z ανήκει στη μεσοκάθετο ZH του AK.

Από την ισότητα των τριγώνων $AZK, A\Theta K$, έπεται ότι $A\Theta=\Theta K$, οπότε το Θ ανήκει στη μεσοκάθετο ZH.

Άρα το τετράπλευρο $AZK\Theta$ έχει όλες τις πλευρές ίσες και επομένως είναι ρόμβος .

ΘΕΜΑ 4801

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A}=120^o$. Φέρουμε ημιευθεία Ax κάθετη στην $A\Gamma$ στο A, η οποία τέμνει τη $B\Gamma$ στο Δ. Έστω Λ το μέσο του AB και K το μέσο του $\Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $A\Delta B$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) $\Delta\Gamma = 2\Delta B$. (Μονάδες 8)

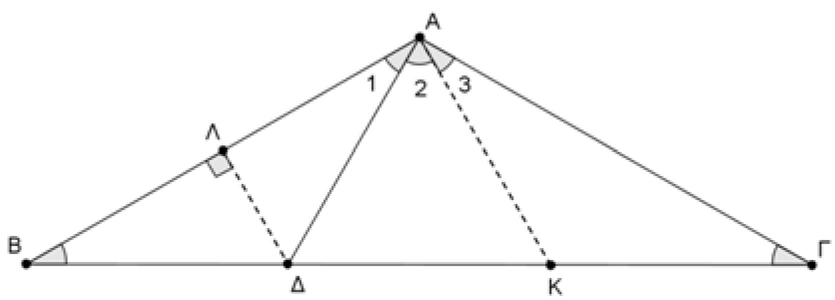
γ) $\Lambda\Delta // AK$. (Μονάδες 5)

δ) $AK = 2\Lambda\Delta$. (Μονάδες 4)

Λύση:

α) Επειδή η γωνία $\Delta A\Gamma = 90^0$, έπεται ότι $A_1 = 120^0 - 90^0 = 30^0$.

Επίσης , αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές έχουμε ότι $B = \dfrac{180^0 - 120^0}{2} = 30^0$.



Επομένως $A_1 = B = 30^0$, που σημαίνει ότι το τρίγωνο $A\Delta B$ είναι ισοσκελές .

β) Από το (α) έχουμε ότι $\Delta B = \Delta A$.

Από το $\Delta A\Gamma$ επειδή $\Gamma = 30^0$, έχουμε ότι : $A\Delta = \dfrac{\Delta\Gamma}{2} \Leftrightarrow \Delta\Gamma = 2A\Delta$.

Τελικά : $\Delta\Gamma = 2\Delta B$.

γ) Το τρίγωνο $A\Delta B$ είναι ισοσκελές και το Λ είναι μέσον .

Επομένως το $\Lambda\Delta$ αφού είναι διάμεσος ,θα είναι και ύψος , οπότε $\Lambda\Delta \perp AB$ (1).

Ακόμα στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta A\Gamma$ είναι $\Gamma = 30^0$, οπότε :
$A\Delta\Gamma = 180 - 30^0 - 90^0 = 60^0$, άρα το τρίγωνο $\Delta A\Gamma$ είναι ισόπλευρο , οπότε $A_2 = 60^0$ και τελικά $BAK = 30^0 + 60^0 = 90^0 \Rightarrow KA \perp AB$ (2).

Από $(1),(2)$ έχουμε ότι : $\Lambda\Delta // AK$.

δ) Στο τρίγωνο BAK το Λ είναι μέσον και $\Lambda\Delta // AK$ άρα το Δ είναι μέσον και
$\Lambda\Delta = \frac{AK}{2} \Rightarrow AK = 2\Lambda\Delta$.

ΘΕΜΑ 4802

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$ και $B = 60^\circ$. Η διχοτόμος της γωνίας B τέμνει την $A\Gamma$ στο Z . Τα σημεία M και K είναι τα μέσα των BZ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Αν το τμήμα $\Gamma\Lambda$ είναι κάθετο στη διχοτόμο $B\delta$ να αποδείξετε:

α) Το τρίγωνο $BZ\Gamma$ είναι ισοσκελές.

β) Το τετράπλευρο $AMKZ$ είναι ρόμβος.

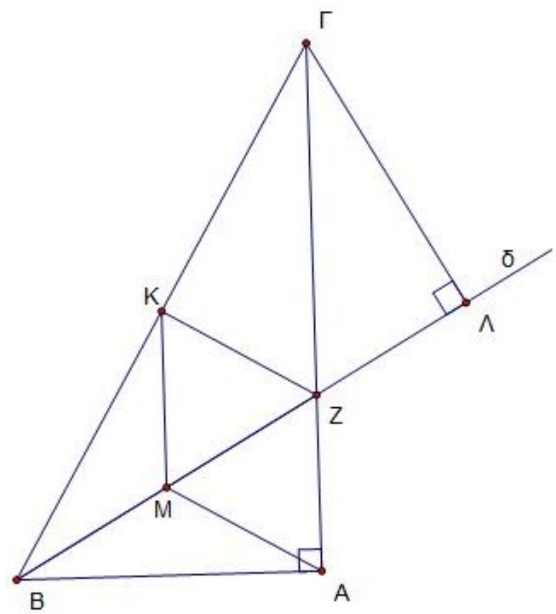
γ) $\Gamma Z = 2ZA$

δ) $B\Lambda = A\Gamma$

Λύση:

α) Στο ορθ. τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A = 90^\circ$ και $B = 60^\circ$ οπότε $\hat{\Gamma} = 30^\circ$

Αφού η $B\delta$ είναι διχοτόμος της B τότε $Z\mathrm{B}\Gamma = 30^\circ$ Έτσι $Z\mathrm{B}\Gamma = \hat{\Gamma} = 30^\circ$ δηλαδή το τρίγωνο $\mathrm{BZ}\Gamma$ είναι ισοσκελές.



β) Στο ορθ. τρίγωνο ABZ είναι $\mathrm{ZBA} = 30^\circ$ και AM διάμεσος στην υποτείνουσα BZ, έτσι $\mathrm{AM} = \frac{\mathrm{BZ}}{2} \Rightarrow \mathrm{AM} = \mathrm{AZ}\,(1)$.

Το MK ενώνει τα μέσα δυο πλευρών του τριγώνου $\Gamma\mathrm{BZ}$ έτσι $\mathrm{MK}//\Gamma\mathrm{Z}$ και $\mathrm{MK} = \frac{\Gamma\mathrm{Z}}{2} \overset{\Gamma\mathrm{Z}=\mathrm{BZ}}{\Rightarrow} \mathrm{MK} = \frac{\mathrm{BZ}}{2} = \mathrm{AM} = \mathrm{AZ}$.

Οπότε $\mathrm{MK}//=\mathrm{AZ}$ και $\mathrm{MK} = \mathrm{AZ}$.

Έτσι το AMKZ είναι ρόμβος αφού είναι παραλληλόγραμμο με δύο ίσες διαδοχικές πλευρές.

γ) Από το ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{BZ}\Gamma$ είναι $\mathrm{BZ} = \Gamma\mathrm{Z}\,(2)$. Από την (1) είναι $\frac{\mathrm{BZ}}{2} = \mathrm{AZ} \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{\Gamma\mathrm{Z}}{2} = \mathrm{AZ} \Rightarrow \Gamma\mathrm{Z} = 2\mathrm{AZ}$.

δ) Επειδή στο ορθ. τρίγωνο $\mathrm{AB}\Gamma$ είναι $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ τότε $\mathrm{AB} = \frac{\mathrm{B}\Gamma}{2}\,(3)$

Ομοίως, από ορθ. τρίγωνο $\Gamma\Lambda\mathrm{B}$ είναι $\mathrm{ZB}\Gamma = 30^\circ$ οπότε $\Gamma\Lambda = \frac{\mathrm{B}\Gamma}{2}\,(4)$. Τα ορθ. τρίγωνα $\mathrm{AB}\Gamma$ και $\Gamma\Lambda\mathrm{B}$ είναι ίσα αφού έχουν: $\mathrm{AB} = \Gamma\Lambda$ από τις σχέσεις $(3),(4)$ και $\hat{\Gamma} = \mathrm{ZB}\Gamma = 30^\circ$. Άρα και $\mathrm{B}\Lambda = \mathrm{A}\Gamma$.

ΘΕΜΑ 4803

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με διάμεσο AM τέτοια ώστε $AM = AB$. Φέρνουμε το ύψος AK και το προεκτείνουμε (προς το Κ) κατά τμήμα $K\Lambda = AK$. Προεκτείνουμε την AM (προς το Μ) κατά τμήμα $ME = AM$. Να αποδείξετε ότι α) $\Delta E \perp A\Delta$ και $\Delta E = 2KM$ (Μονάδες 7)

β) Το τετράπλευρο $ABE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)

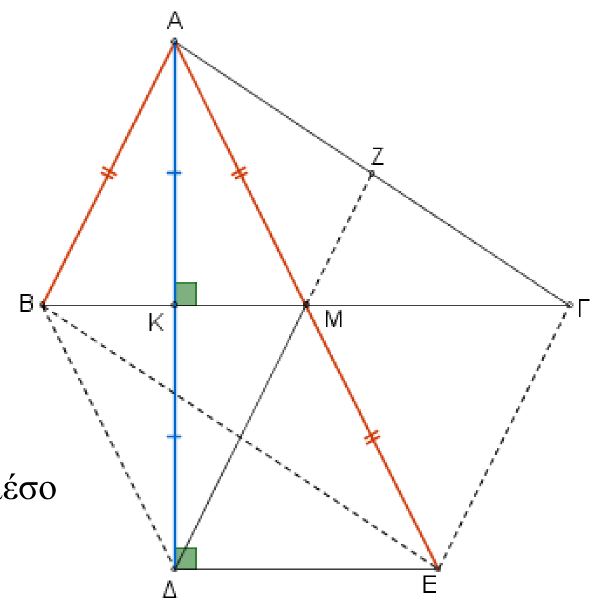
γ) Το τετράπλευρο $AB\Delta M$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 6)

δ) Η προέκταση της ΔM τέμνει το $A\Gamma$ στο μέσον του Z (Μονάδες 6)

Λύση:

α) $\Delta E \parallel KM$ (K, M είναι τα μέσα των $A\Delta, AE$ αντίστοιχα).

Άρα $\Delta E \perp A\Delta$ (αφού $A\Delta \perp KM$) και $\Delta E = 2KM$.



β) Το τετράπλευρο $ABE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο επειδή οι διαγώνιοι του διχοτομούνται.

γ) Στο ισοσκελές τρίγωνο ABM το AK είναι ύψος, άρα και διάμεσος. Οπότε οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου $AB\Delta M$ είναι κάθετες και διχοτομούνται, δηλαδή είναι ρόμβος.

δ) $\Delta Z \parallel AB$ και M είναι μέσο του $B\Gamma$, άρα Z είναι μέσο του $A\Gamma$.

ΘΕΜΑ 4806

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, και την ευθεία ε της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας A. Η κάθετη στην πλευρά AB στο B τέμνει την ε στο K και την ευθεία $A\Gamma$ στο Z.

Η κάθετη στην πλευρά $A\Gamma$ στο Γ τέμνει την ε στο Λ και την ευθεία AB στο E.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $AZ = AE$

ii. $AK = A\Lambda$

β) Ένας μαθητής κοιτώντας το σχήμα, διατύπωσε την άποψη ότι η $A\Theta$ είναι διχοτόμος της γωνίας A του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Θ το σημείο τομής των KH και $E\Lambda$.

Συμφωνείτε με την παραπάνω άποψη του μαθητή ή όχι; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

Λύση:

α) i. Θεωρώντας ότι $AB = A\Gamma$

(ΔΕΝ ΑΝΑΦΕΡΕΤΑΙ ΣΤΗΝ ΕΚΦΩΝΗΣΗ) τα ορθογώνια τρίγωνα ABZ και $A\Gamma E$ είναι ίσα αφού έχουν $AB = A\Gamma$ από την (δικιά μας) υπόθεση και A κοινή γωνία.

Άρα $AZ = AE$.

ii. Τα ορθογώνια τρίγωνα ABK και $A\Gamma\Lambda$ είναι ίσα αφού έχουν:

$AB = A\Gamma$ από την υπόθεση και $BAK = \Gamma A\Lambda$ ως μισά των ίσων εξωτερικών γωνιών της A. Άρα $AK = A\Lambda$.

β) Είναι $\Theta B\Gamma = 90^\circ - B$ και $\Theta\Gamma B = 90^\circ - \hat{\Gamma}$, έτσι $\Theta B\Gamma = \Theta\Gamma B$ αφού είναι $B = \hat{\Gamma}$.

Έτσι το τρίγωνο $\Theta B\Gamma$ είναι ισοσκελές δηλαδή $\Theta B = \Theta\Gamma$.

Όμως $AB = A\Gamma$. Τα σημεία A και Θ ισαπέχουν από τα άκρα του $B\Gamma$ οπότε η $A\Theta$ είναι η μεσοκάθετος του $B\Gamma$ δηλαδή και διχοτόμος της γωνίας A αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Δηλαδή ο μαθητής έχει δίκιο.

ΘΕΜΑ 4810

Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με O το σημείο τομής των διαγωνίων του και K το μέσο του $\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε το OK κατά τμήμα $KZ = KO$. Η BZ τέμνει τη διαγώνιο $A\Gamma$ στο Θ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα $O\Gamma$ και BZ διχοτομούνται. (Μονάδες 8)

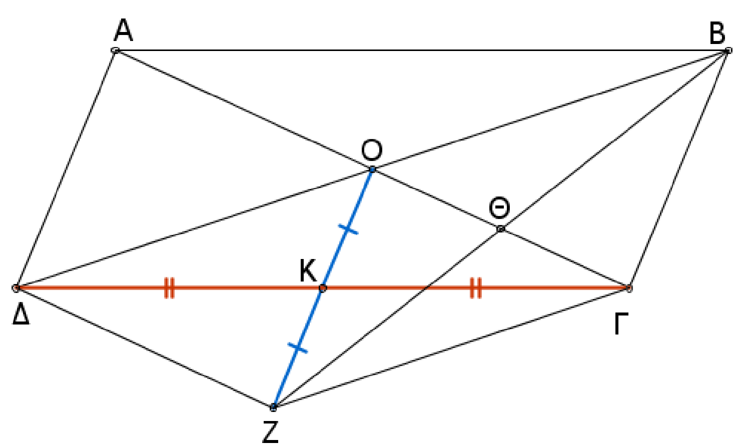
β) $AO = \Delta Z$. (Μονάδες 9)

γ) Τα τρίγωνα AOB και $\Delta Z\Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

Λύση:

α) Τα σημεία O, K είναι τα μέσα των $\Delta B, \Delta\Gamma$ αντίστοιχα. Άρα:

$\mathrm{OK} \parallel= \dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2} \Leftrightarrow \mathrm{OZ} \parallel= \mathrm{B\Gamma}$, δηλαδή το τετράπλευρο $OZ\Gamma B$



είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι $O\Gamma$ και BZ διχοτομούνται .

Β) Ομοίως είναι $\mathrm{OZ} \parallel= \mathrm{A\Delta}$, οπότε το τετράπλευρο $OA\Delta Z$ είναι παραλληλόγραμμο, δηλαδή $AO = \Delta Z$.

γ) $AO = \Delta Z, OB = Z\Gamma, AB = \Delta\Gamma$. Άρα τα τρίγωνα AOB και $\Delta Z\Gamma$ είναι ίσα.

Τι νόημα είχε το τελευταίο ερώτημα;

Απ' όσες ασκήσεις έχω λύσει μέχρι στιγμής, έχω παρατηρήσει, ότι -πλην ελαχίστων εξαιρέσεων- τα ερωτήματα είναι υπερβολικά απλουστευμένα, σε βαθμό που να αναρωτιέται κανείς, τι νόημα έχει η ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ. Καταργεί την κριτική σκέψη και απλώς καθοδηγεί τους μαθητές βήμα-βήμα στις απαντήσεις.

Κατά τη γνώμη μου, αυτό ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.

ΘΕΜΑ 4812

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ=ΑΓ$. Προεκτείνουμε το $ΒΓ$ (προς το $Γ$) κατά τμήμα $ΓΔ=ΒΓ$. Φέρουμε τις διαμέσους $ΑΕ, ΓΖ$ του τριγώνου $ΑΒΓ$ που τέμνονται στο $Θ$. Το $ΒΘ$ προεκτεινόμενο, τέμνει το $ΑΓ$ στο $Κ$ και το $ΑΔ$ στο $Η$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το $ΖΚΓΕ$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

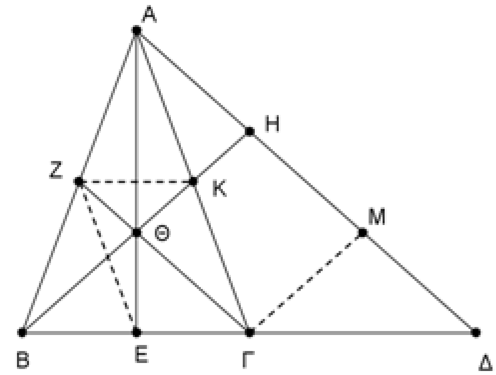
β) $ΑΗ=ΘΓ$. (Μονάδες 9)

γ) $ΑΗ=2ΖΘ$. (Μονάδες 7)

Λύση:

α) Οι $ΑΕ, ΓΖ$ είναι διάμεσοι του τριγώνου $ΑΒΓ$, επομένως το $Θ$ είναι το βαρύκεντρο , οπότε η $ΒΚ$ είναι η τρίτη διάμεσος . Τότε : $ΖΚ=\frac{ΒΓ}{2}=ΕΓ$ και $ΖΚ//ΕΓ$, οπότε το $ΖΚΓΕ$ είναι παραλληλόγραμμο .

β) Φέρνουμε τη $\Gamma M//BH$. Επειδή το Γ είναι μέσον της $B\Delta$, το M θα είναι μέσον της $H\Delta$, άρα $HM = M\Delta \quad (1)$. Τότε στο τρίγωνο $A\Gamma M$ είναι : K μέσον και $KH//\Gamma M$, οπότε το H είναι μέσον της AM ,οπότε $AH = HM \quad (2)$.



Τότε : $\Gamma\Theta = \frac{2}{3}\Gamma Z = \frac{2}{3}\frac{A\Delta}{2} = \frac{A\Delta}{3} = AH$

Από (1),(2) έχουμε ότι : $AH = HM = M\Delta$.

γ) Στο τρίγωνο είναι $AB\Gamma$ είναι $\Theta\Gamma = 2Z\Theta$ (αφού το Θ είναι βαρύκεντρο) ,οπότε από το (β) έχουμε: $AH = 2Z\Theta$.

ΘΕΜΑ 4814

Έστω κύκλος με κέντρο O και διάμετρο AB.Φέρνουμε χορδή $\Gamma\Delta || AB$ με K το μέσο της. Από το Δ φέρνουμε το τμήμα ΔE κάθετο στην $A\Gamma$.

Να αποδειχθεί ότι:

i)Το τετράπλευρο $K\Gamma OE$ είναι παραλληλόγραμμο.

ii) $\angle \Delta EK = \frac{\angle \Delta O\Gamma}{2}$.

iii) $KE < KB$.

Λύση:

i) Αφού $\Delta E \perp A\Gamma$ και $\Gamma\Delta || A\Gamma$ θα είναι $\Delta E \perp \Gamma\Delta$.

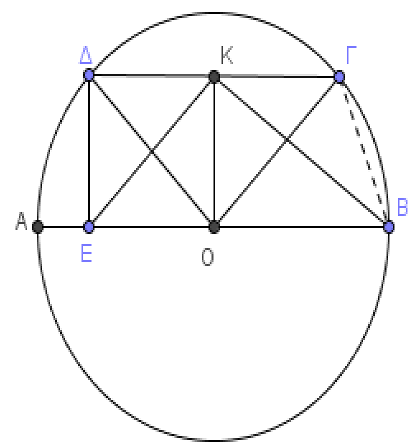
Επίσης, αφού το K είναι μέσο χορδής, το τμήμα OK είναι απόστημα άρα

$OK \perp \Gamma\Delta$.Τελικά το τετράπλευρο ΔEOK έχει τρεις γωνίες ορθές επομένως είναι

ορθογώνιο. Επομένως $EO = \Delta K \overset{\Delta K = \Gamma K}{\Leftrightarrow} EO = K\Gamma$.

Όμως $EO \parallel K\Gamma$ άρα το τετράπλευρο έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες, επομένως είναι παραλληλόγραμμο.

ii) Το τρίγωνο $\Delta O\Gamma$ είναι ισοσκελές κι αφού η OK είναι ύψος, θα είναι και διχοτόμος της γωνίας $\angle \Delta O\Gamma$.



Επομένως $\angle \Delta OK = \dfrac{\angle \Delta O\Gamma}{2}$.Ακόμη τα τρίγωνα $\triangle \Delta EK$ και ΔOK είναι ίσα αφού έχουν

$OK = \Delta E$ (από το ορθογώνιο), ΔK κοινή και είναι ορθογώνια. Επομένως

$\angle \Delta EK = \angle \Delta OK = \dfrac{\angle \Delta O\Gamma}{2}$.

iii) $KE = O\Gamma$ (από το παραλληλόγραμμο) άρα $KE = OB$. Στο τρίγωνο $\triangle OKB$ η KB είναι υποτείνουσα άρα $KB > OB \Leftrightarrow KE > KB$.

ΘΕΜΑ 4816

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^0$ και Δ, E και N τα μέσα των $AB, A\Gamma$ και ΔE αντίστοιχα. Στο τμήμα $B\Gamma$ θεωρούμε τα σημεία K και Λ ώστε $\Delta K = KB$ και $E\Lambda = \Lambda\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta K\Lambda = 2B$ και $E\hat{\Lambda}K = 2\hat{\Gamma}$ (Μονάδες 10)

β) Το τετράπλευρο $\Delta E\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο με $\Delta E = 2\Delta K$ (Μονάδες 8)

γ) $AN = \Delta K = \dfrac{B\Gamma}{4}$ (Μονάδες 7).

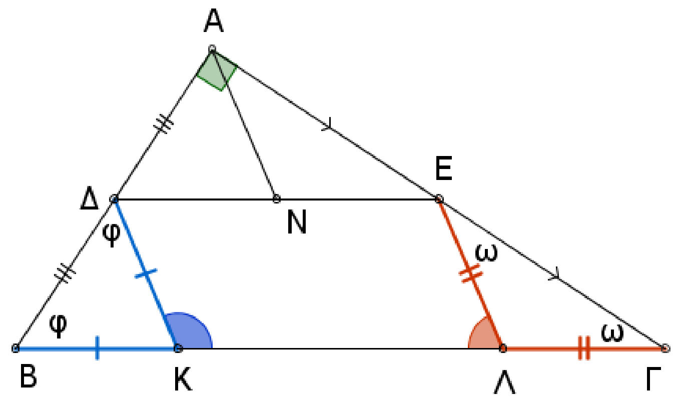
Λύση:

α) Είναι $B = B\hat{\Delta}K = \varphi, \hat{\Gamma} = \Lambda E\Gamma = \omega$.

$\Delta K\Lambda = 2\varphi, E\hat{\Lambda}K = 2\omega$ (ως εξωτερικές γωνίες στα τρίγωνα $KB\Delta, \Lambda\Gamma E$ αντίστοιχα).

Άρα: $\Delta K\Lambda = 2B$ και $E\hat{\Lambda}K = 2\hat{\Gamma}$.

β) $\Delta E \parallel B\Gamma$ (Δ, E, μέσα των $AB, A\Gamma$)



$$\Delta K\Lambda + E\hat{\Lambda}K = 2(B+\hat{\Gamma}) = 2(180^0 - A) \overset{A=90^0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \Delta K\Lambda + E\hat{\Lambda}K = 180^0 \Leftrightarrow \Delta K \parallel E\Lambda.$$

Οπότε το τετράπλευρο $\Delta E\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο.

$BK = K\Delta = \Lambda E = \Lambda\Gamma$.

$$\Delta E = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{BK + K\Lambda + \Lambda\Gamma}{2} = \frac{\Delta K + \Delta E + \Delta K}{2} \Leftrightarrow 2\Delta E = 2\Delta K + \Delta E \Leftrightarrow \Delta E = 2\Delta K.$$

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta E$ η AN είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα. Άρα:

$AN = \frac{\Delta E}{2} = \Delta K$. Αλλά $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$. Επομένως: $AN = \Delta K = \frac{B\Gamma}{4}$.

ΘΕΜΑ 4818

Έστω τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $AB > A\Gamma$. Έστω $A\Delta$ το ύψος του και M το μέσο AB. Η προέκταση της $M\Delta$ τέμνει την προέκταση της $A\Gamma$ στο E ώστε $\Gamma\Delta = \Gamma E$.

Να αποδειχθεί ότι:

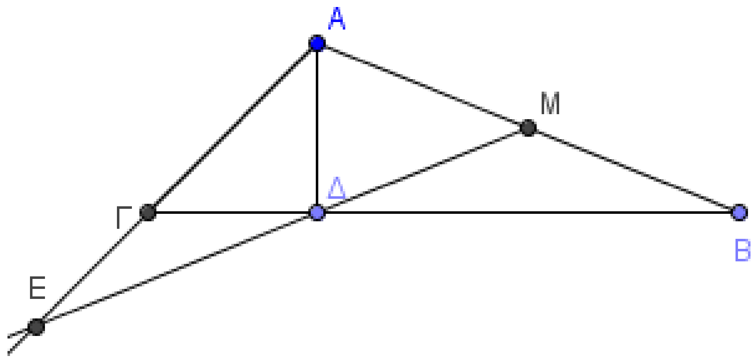
i) $\angle B = \angle E$.

ii) $\angle\Gamma = 2\angle B = \angle AM\Delta$.

iii) $\Gamma E < A\Gamma$.

Λύση:

i) Το τρίγωνο $\triangle \Gamma\Delta E$ είναι εξ υποθέσεως ισοσκελές επομένως $\angle E = \angle \Gamma\Delta E = \angle M\Delta B$ (1) όπου το δεύτερο σκέλος προκύπτει επειδή οι γωνίες είναι κατακορυφήν. Ακόμη, αφού το τρίγωνο $\triangle AB\Delta$ είναι ορθογώνιο και το M είναι μέσο της υποτείνουσας άρα $\Delta M = MB$ δηλαδή το τρίγωνο $B\Delta M$ είναι ισοσκελές.



Άρα $\angle M\Delta B = \angle B \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \angle B = \angle E$.

ii) Η γωνία $\angle AM\Delta$ είναι εξωτερική στο $\triangle B\Delta M$ άρα ισούται με $2\angle B$ αφού το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Η $\angle \Gamma$ είναι εξωτερική στο $\triangle \Gamma\Delta E$ άρα $\angle \Gamma = 2\angle E$ αφού το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Από την ισότητα του πρώτου ερωτήματος προκύπτει ότι $\angle \Gamma = 2\angle B$ απ' όπου παίρνουμε τη ζητούμενη ισότητα.

iii) $\Gamma E = \Gamma\Delta$.Στο τρίγωνο $\triangle A\Gamma\Delta$ η $A\Gamma$ είναι υποτείνουσα άρα $A\Gamma > \Gamma\Delta = \Gamma E$.

ΘΕΜΑ 4821

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$, $A\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας A και M το μέσον της AB . Η κάθετη από το M στην $A\Delta$ τέμνει το $A\Gamma$ στο E.

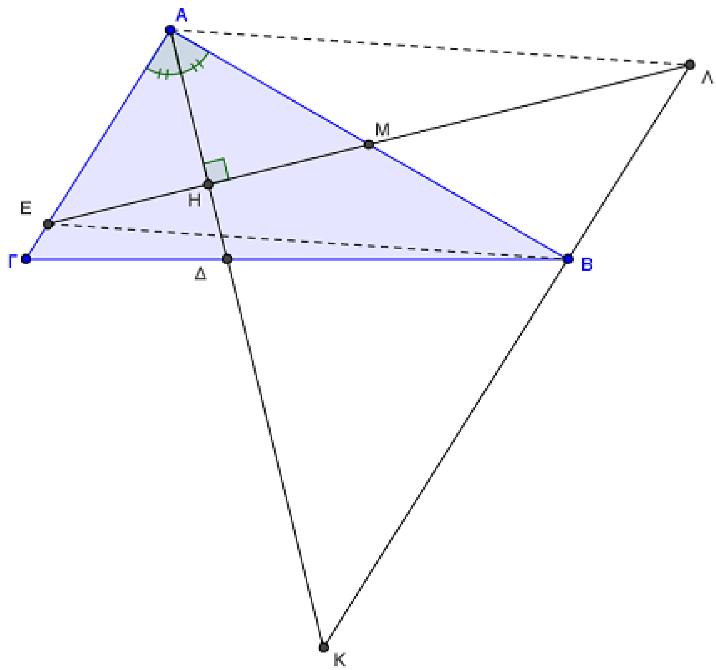
Η παράλληλη από το B στο $A\Gamma$ τέμνει την προέκταση της $A\Delta$ στο K και την προέκταση της EM στο Λ . Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $AEM, MB\Lambda$ και ABK είναι ισοσκελή.

β) Το τετράπλευρο $A\Lambda BE$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση:

α) Αν H το σημείο τομής των $\mathrm{A\Delta}$ και EM, τότε το τρίγωνο AEM είναι ισοσκελές αφού το AH είναι ύψος και διχοτόμος.



Έτσι $\mathrm{AE}=\mathrm{AM}=\mathrm{MB}\,(1)$ και

$\mathrm{MEA}=\mathrm{AME}\,(2)$

Είναι $\mathrm{M\Lambda B}=\mathrm{MEA}\,(3)$ ως εντός και εναλλάξ των παραλλήλων $\mathrm{K\Lambda},\mathrm{A\Lambda}$ που τέμνονται από την $\mathrm{\Lambda E}$ και $\mathrm{\Lambda MB}=\mathrm{AME}\,(4)$ ως κατακορυφήν.

Από $(3),(4)\overset{(2)}{\Rightarrow}\mathrm{M\Lambda B}=\mathrm{\Lambda MB}$ οπότε το τρίγωνο $\mathrm{MB\Lambda}$ είναι ισοσκελές.

Θα είναι και $\mathrm{\Lambda B}=\mathrm{MB}=\dfrac{\mathrm{AB}}{2}\,(5)$.

Επίσης είναι $\mathrm{\Lambda KA}=\mathrm{\Gamma AK}=\dfrac{\mathrm{A}}{2}$ ως εντός και εναλλάξ των παραλλήλων $\mathrm{K\Lambda},\mathrm{A\Lambda}$ που τέμνονται από την AK

Άρα $\mathrm{\Lambda KA}=\mathrm{KAB}=\dfrac{\mathrm{A}}{2}$ δηλαδή το τρίγωνο ABK είναι ισοσκελές.

β) Είναι $\mathrm{B\Lambda}//\mathrm{AE}$ από κατασκευή και

$(5)\Rightarrow \mathrm{B\Lambda}=\mathrm{MB}\Rightarrow \mathrm{B\Lambda}=\mathrm{MA}\overset{\tau\rho\iota\gamma\,\mathrm{AEM}}{\Rightarrow}\mathrm{B\Lambda}=\mathrm{AE}$

Άρα $\mathrm{B\Lambda}//=\mathrm{AE}$ δηλαδή το $\mathrm{A\Lambda BE}$ είναι παραλληλόγραμμο.

ΘΕΜΑ 4822

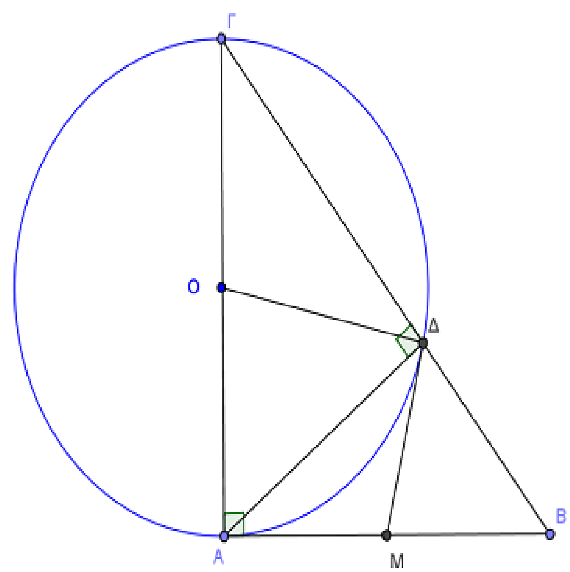
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΓAB $\left(A=90^\circ\right)$. Με διάμετρο την πλευρά του $A\Gamma$ φέρουμε κύκλο που τέμνει την υποτείνουσα $B\Gamma$ στο Δ. Από το Δ φέρουμε εφαπτόμενο τμήμα το οποίο τέμνει την AB στο M. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma A\Delta = B$

β) Το τρίγωνο ΔMB είναι ισοσκελές.

γ) Το M είναι το μέσο του AB.

Λύση:



α) Είναι $A\Delta\Gamma = 90^\circ$ ως εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο, έτσι $A\Delta \perp B\Gamma$.

Άρα $\Gamma A\Delta = B$ ως συμπληρωματικές της Γ από τα ορθογώνια τρίγωνα $\Gamma A\Delta$ και $AB\Gamma$ (ή ως οξείες με κάθετες πλευρές).

β) Είναι $A\Delta M = \hat{\Gamma}\,(1)$ γιατί η $A\Delta M$ είναι γωνία χορδής $(A\Delta)$ και εφαπτομένης (ΔM) και η $\hat{\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένη στη χορδή.
Άρα $M\Delta B = B$ ως συμπληρωματικές των ίσων γωνιών $M\Delta B$ και B οπότε το τρίγωνο ΔMB είναι ισοσκελές αφού έχει δύο ίσες γωνίες. Έτσι θα είναι $\Delta M = MB\,(2)$.

γ) $MA\Delta = \hat{\Gamma}\,(3)$ διότι η $MA\Delta$ είναι γωνία χορδής $(A\Delta)$ και εφαπτομένης (AM) και η $\hat{\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένη στη χορδή.

Από $(1),(3) \Rightarrow A\Delta M = MA\Delta$ δηλαδή το τρίγωνο $MA\Delta$ είναι ισοσκελές και θα είναι $MA = MB\,(4)$.

$(2),(4) \Rightarrow AM = \Delta M$ δηλαδή το M είναι το μέσο του AB.

ΘΕΜΑ 4832

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma\,(AB = A\Gamma)$ και $A\Delta$ διάμεσος. Στο τμήμα $A\Delta$ θεωρούμε τυχαίο σημείο K από το οποίο φέρνουμε τα τμήματα KZ και KE κάθετα στις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\overset{\Delta}{ABK} = \overset{\Delta}{A\Gamma K}$

ii. Το τρίγωνο ZKE είναι ισοσκελές.

iii. Το τετράπλευρο $ZE\Gamma B$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

β) Ένας μαθητής το (αι.) ερώτημα έδωσε την εξής απάντηση:

«Το τμήμα $A\Delta$ είναι διάμεσος στη βάση ισοσκελούς άρα ύψος και διχοτόμος

του τριγώνου $AB\Gamma$ και μεσοκάθετος του $B\Gamma$. Οπότε και το τρίγωνο $BK\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Τα τρίγωνα $ABK, A\Gamma K$ έχουν

1. $BK = K\Gamma$

2. $BAK = \Gamma AK$ επειδή AK διχοτόμος της A

3. $ABK = A\Gamma K$ ως διαφορές ίσων γωνιών ισοσκελών τριγώνων.

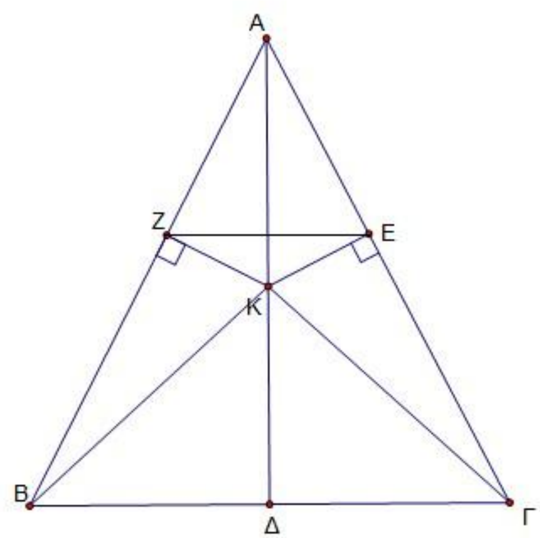
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα βάση του κριτηρίου Γωνία Πλευρά Γωνία.»

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

Ο καθηγητής είπε ότι η απάντηση του είναι ελλιπής. Να συμπληρώσετε την απάντηση του μαθητή ώστε να ικανοποιεί το κριτήριο Γωνία –Πλευρά- Γωνία διατηρώντας τις πλευρές BK και $K\Gamma$.

Λύση:

α) i. Η είναι διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ οπότε θα είναι διχοτόμος και ύψος.



Τα τρίγωνα $ABK, A\Gamma K$ είναι ίσα από $\Pi-\Gamma-\Pi$ αφού έχουν:

$AB=A\Gamma$ από υπόθεση, AK κοινή πλευρά και $BAK=\Gamma AK$ αφού η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της A

ii. Είναι $KZ=KE$ αφού το K είναι σημείο της διχοτόμου της A και θα ισαπέχει από τις πλευρές της. Άρα το τρίγωνο ZKE είναι ισοσκελές.

iii. Από την παραπάνω ισότητα είναι $AZ=AE\,(1)$ οπότε και $BZ=\Gamma E\,(2)$ ως διαφορές ίσων τμημάτων. Τα ισοσκελή τρίγωνα AZE (από την (1)) και $AB\Gamma$ έχουν την A κοινή γωνία κορυφής, έτσι και οι γωνίες των βάσεων τους θα είναι ίσες, δηλαδή $AZE=B \Rightarrow ZE//B\Gamma\,(3)$.

Από την $(1),(3)$ συμπεραίνουμε ότι το $ZE\Gamma B$ είναι ισοσκελές τραπέζιο αφού και οι $BZ, \Gamma E$ τέμνονται στο A.

β) Το επιπλέον στοιχείο που πρέπει να προσθέσουμε για να ικανοποιείται το κριτήριο $\Gamma-\Pi-\Gamma$ είναι: $AKB=AKE$ ως οι τρίτες γωνίες των τριγώνων $ABK, A\Gamma K$ αφού οι άλλες δύο είναι ανά δύο ίσες.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

ΘΕΜΑ 5895

Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma(\hat{A}=90^o)$ και $\Delta B\Gamma(\hat{\Delta}=90^o)$ (όπου A και Δ εκατέρωθεν της $B\Gamma$) και το μέσο M της $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

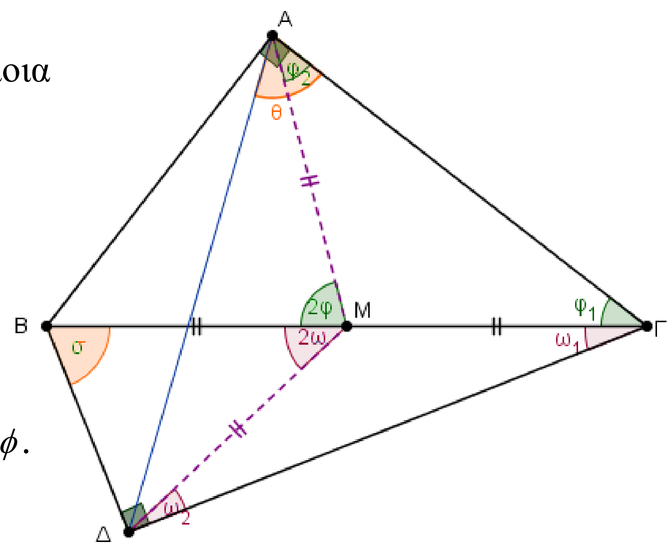
α) το τρίγωνο $AM\Delta$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

β) $A\hat{M}\Delta = 2\cdot A\hat{\Gamma}\Delta$ (Μονάδες 9)

γ) $\Gamma\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{A}\Delta$ (Μονάδες 7)

Λύση:

α)Το τρίγωνο $\Delta B\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ΔM διάμεσος του αφού M μέσο $B\Gamma$. Άρα $\Delta M = \dfrac{B\Gamma}{2}(1)$. Όμοια $AM = \dfrac{B\Gamma}{2}(2)$.



Από $(1),(2), \Delta M = AM$. Έτσι το τρίγωνο $AM\Delta$ είναι ισοσκελές.

β) Λόγω (1) και M μέσο της $B\Gamma$, $AM = M\Gamma$. Άρα τρίγωνο $AM\Gamma$ ισοσκελές. Έτσι $\hat{\phi}_1 = \hat{\phi}_2 = \phi$.

Τότε $A\hat{M}B = 2\phi$ ως εξωτερική του τριγώνου $AM\Gamma$. Όμοια $B\hat{M}\Delta = 2\omega$.

Επομένως $A\hat{M}\Delta = A\hat{M}B + B\hat{M}\Delta = 2\phi + 2\omega = 2(\hat{\phi}_1 + \hat{\omega}_1) = 2\cdot A\hat{\Gamma}\Delta$.

γ) Αφού οι απέναντι γωνίες $\hat{A} + \hat{\Delta} = 90^o + 90^o = 180^o$ (παραπληρωματικές), το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγράψιμο.

Άρα πλευρά $\Delta\Gamma$ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες, $\hat{\theta}=\hat{\sigma}$ δηλαδή το ζητούμενο.

ΘΕΜΑ 5898

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB<A\Gamma$ και η διχοτόμος του $A\Delta$. Στην πλευρά $A\Gamma$ θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $AE=AB$. Να αποδείξετε ότι :

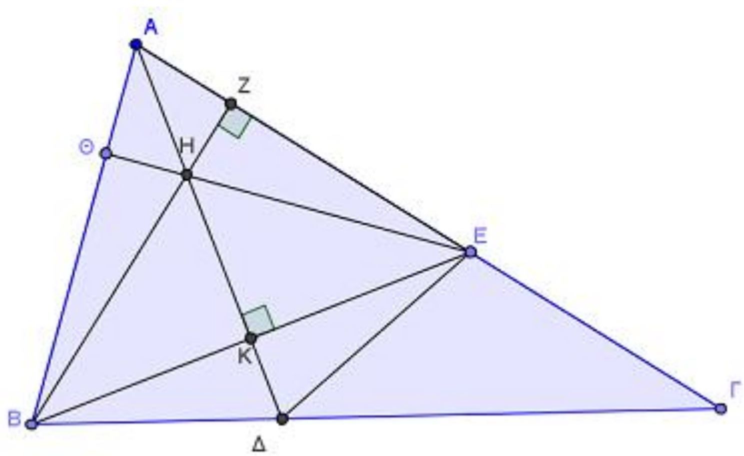
α) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta E$ είναι ίσα.

β) η ευθεία $A\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος BE.

γ) αν το ύψος από την κορυφή B του τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνει την $A\Delta$ στο H τότε η ευθεία EH είναι κάθετη στην AB.

Λύση:

α) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta E$ είναι ίσα από $\Pi-\Gamma-\Pi$ επειδή έχουν:



$A\Delta$ κοινή πλευρά,
$AE=AB$ από υπόθεση και
$BA\Delta=\Delta AE=\frac{A}{2}$.

Οπότε είναι και
$B\Delta=\Delta E\,(1)$

β) Αφού ισχύουν $AE=AB$ και $B\Delta=\Delta E$ η $A\Delta$ είναι μεσοκάθετος του BE επειδή τα σημεία A,Δ ισαπέχουν από τα άκρα του.

γ) Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές με $AE=AB$ και η διχοτόμος του $A\Delta$ είναι και ύψος, Το σημείο H είναι ορθόκεντρο του τριγώνου ABE αφού διέρχονται τα δύο ύψη του $ΑΔ$ και $ΒΖ$, έτσι και το $ΕΗ$ είναι ύψος δηλαδή η $ΕΗ$ είναι κάθετη στην $ΑΒ$.

ΘΕΜΑ 5900

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ\,(ΑΒ=ΑΓ)$ και $Μ$ το μέσο της $ΒΓ$. Φέρουμε $ΓΔ\perp ΒΓ$ με $ΓΔ=ΑΒ$ ($Α,Δ$ εκατέρωθεν της $ΒΓ$). Να αποδείξετε ότι:

α) $ΑΜ//ΓΔ$

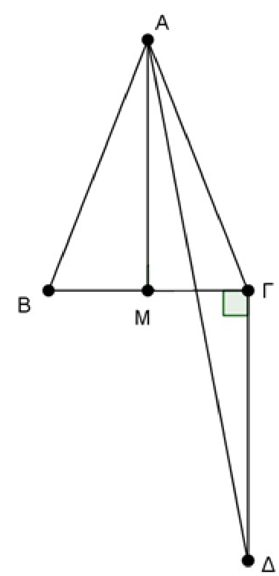
β) η $ΑΔ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $ΜΑΓ$.

γ) $ΔΑΓ=45^\circ-\frac{Β}{2}$

δ) $ΑΔ<2ΑΒ$

Λύση:

α) Αφού το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές η διάμεσος $ΑΜ$ είναι και μεσοκάθετος της $ΒΓ$, οπότε $ΑΜ//ΓΔ$ ως κάθετες στην $ΒΓ$.



β) Είναι $ΜΑΔ=ΓΔΑ\,(1)$ ως εντός και εναλλάξ των $ΑΜ//ΓΔ$ που τέμνονται από την $ΑΔ$.

$ΓΑΔ=ΓΔΑ\,(2)$ ως γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου $ΑΓΔ\,(ΑΓ=ΓΔ=ΑΒ)$

$(1),(2)\Rightarrow ΜΑΔ=ΓΑΔ$ δηλαδή η $ΑΔ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $ΜΑΓ$.

γ) Από το ισοσκελές τρίγωνο $ΑΓΔ$ έχουμε:

$\Delta A\Gamma + \Gamma\Delta A + A\Gamma\Delta = 180^\circ \Rightarrow 2\Delta A\Gamma + 90^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \overset{\hat{\Gamma}=B}{\Rightarrow}$ (επειδή $\Gamma\Delta A = \Delta A\Gamma$ και $A\Gamma\Delta = 90^\circ + \hat{\Gamma}$). $\Delta A\Gamma = 45^\circ - \dfrac{B}{2}$

δ) Από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι:

$A\Delta < A\Gamma + A\Delta \overset{A\Delta=A\Gamma=AB}{\Rightarrow} A\Delta < 2AB.$

ΘΕΜΑ 5904

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι θέσεις στο χάρτη πέντε χωριών A, B, Γ, Δ και E και οι δρόμοι που τα συνδέουν.

Το χωριό E ισαπέχει από τα χωριά B, Γ και επίσης από τα χωριά A και Δ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. η απόσταση των χωριών A και B είναι ίση με την απόσταση των χωριών Γ και Δ

ii. αν οι δρόμοι AB και $\Gamma\Delta$ έχουν δυνατότητα να προεκταθούν, να αποδείξετε ότι αποκλείεται να συναντηθούν.

iii. τα χωριά B και Γ ισαπέχουν από τον δρόμο $A\Delta$.

β) Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το σημείο του δρόμου $A\Gamma$ που ισαπέχει από τα χωριά A και Δ.

Λύση:

α) i. Το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούντα στο E, έτσι $AB = \Gamma\Delta$.

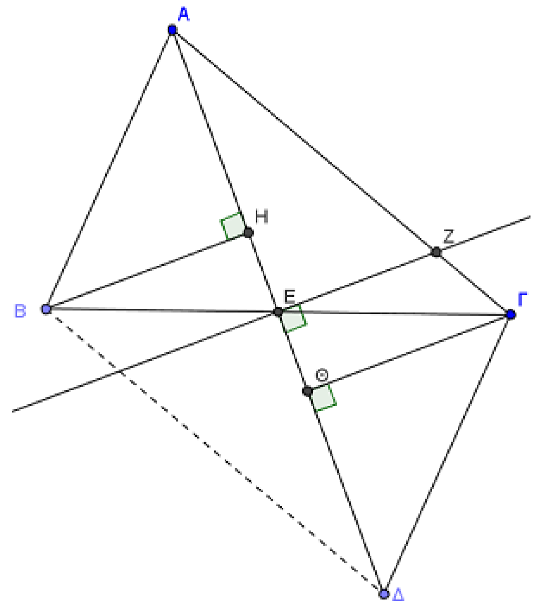
ii. Από το παραλληλόγραμμο $AB\Delta\Gamma$ είναι και $AB // \Gamma\Delta$, δηλαδή οι δρόμοι AB και $\Gamma\Delta$ αποκλείεται να συναντηθούν.

iii. Τα ορθογώνια τρίγωνα ABH και $\Gamma\Theta\Delta$ είναι ίσα αφού έχουν:

$AB = \Gamma\Delta$ από αι ερώτημα και $B\hat{A}\Delta = A\hat{\Delta}\Gamma$ ως εντός εναλλάξ των $AB // \Gamma\Delta$ που τέμνονται από τη $A\Delta$.

Έτσι και $BH = \Gamma\Theta$ δηλαδή τα χωριά B και Γ ισαπέχουν από τον δρόμο $A\Delta$.

β) Αφού το ζητούμενο σημείο ισαπέχει από τα A και Δ θα ανήκει στη μεσοκάθετο του $A\Delta$. Άρα είναι το σημείο τομής Z της μεσοκαθέτου του $A\Delta$ με την $A\Gamma$.



ΘΕΜΑ 5908

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > \Gamma\Delta$ και οι διχοτόμοι των γωνιών του (όπου P, E στην $\Delta\Gamma$ και Σ, T στην AB) τέμνονται στα σημεία K, Λ, M, N, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΔEBT είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

β) το τετράπλευρο $K\Lambda MN$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

γ) $\Lambda N // AB$. (Μονάδες 5)

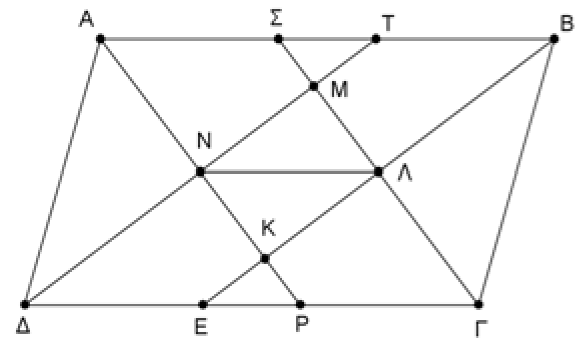
δ) $\Lambda N = AB - A\Delta$. (Μονάδες 5)

Λύση:

α) Από το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα $\Delta AT, BE\Gamma$ είναι ίσα,επομένως : $\Gamma E = AT$, οπότε: $AB - AT = \Delta\Gamma - E\Gamma \Leftrightarrow TB = \Delta E$. Επιπλέον είναι και $TB // \Delta E$, οπότε το τετράπλευρο ΔEBT είναι παραλληλόγραμμο .

β) Στο τρίγωνο ΔAN είναι $A_1 + \hat{\Delta}_1 = \frac{A+\hat{\Delta}}{2} = \frac{180^0}{2} = 90^0$ οπότε είναι και $N = 90^0$.

Ομοίως για άλλες δυο γωνίες , π,χ. M, K, οπότε το τετράπλευρο $K\Lambda MN$ είναι ορθογώνιο .



γ) Στο τρίγωνο ΔAT, το AN είναι ύψος και διχοτόμος . Επομένως είναι ισοσκελές και το N είναι μέσον της ΔT. Ομοίως το Λ είναι μέσον της EB.

Από το (α) έχουμε ότι $\Delta T // EB$ και $\Delta T = EB \Rightarrow \frac{\Delta T}{2} = \frac{EB}{2} \Rightarrow NT = \Lambda B$. Άρα το $TB\Lambda N$ είναι παρ/μο , οπότε $N\Lambda // BT \Rightarrow N\Lambda // AB$.

δ) $\Lambda N = TB = AB - AT = AB - A\Delta$, λόγω του ισοσκελούς ΔAT.

ΘΕΜΑ 5910

Δίνεται τρίγωνο με $AB\Gamma$, εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο O.Θεωρούμε το μέσο M του κυρτογώνιου τόξου $B\Gamma$ και το ύψος $A\Delta$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Η AM είναι διχοτόμος της γωνίας ΔAO . (Μονάδες 8)

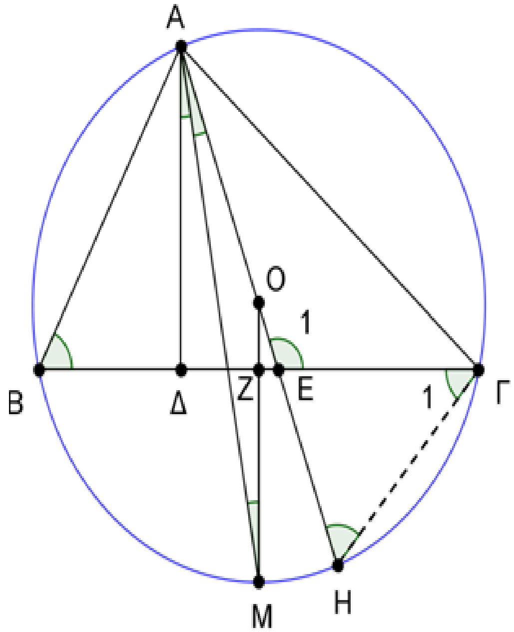
β) $OA\Gamma = \Delta AB$ (Μονάδες 9)

γ) $\Delta AO = B - \hat{\Gamma}$ (Μονάδες 8)

Λύση:

α) Το απόστημα OZ της χορδής $B\Gamma$ διέρχεται από το μέσον της χορδής και από το μέσον M του τόξου . Επομένως $OM // A\Delta$ ως κάθετες στην ίδια ευθεία .

Τότε όμως $A_1 = M_1$ και $A_1 = M_2$, αφού το AOM είναι ισοσκελές. Τελικά $A_1 = A_2$, οπότε η AM είναι διχοτόμος.



β) Είναι $A\Gamma H = 90^0$ αφού βαίνει σε ημικύκλιο, οπότε $OA\Gamma = 90^0 - H$

Επίσης από το τρίγωνο ΔAB είναι $\Delta AB = 90^0 - B$ (2).

Επειδή $B = H$, αφού βαίνουν στο ίδιο τόξο, έχουμε από (1),(2) ότι: $OA\Gamma = \Delta AB$

γ) Η γωνία E_1 είναι εξωτερική στα τρίγωνα $\Delta AE, E\Gamma H$, οπότε έχουμε ότι:

$E_1 = 90^0 + \Delta AO$ (3) και

$E_1 = H + \Gamma_1 = B + (90^o - \hat{\Gamma})$ (4).

Από $(3),(4) \Rightarrow 90^0 + \Delta AO = B + (90^o - \hat{\Gamma}) \Rightarrow \Delta AO = B - \hat{\Gamma}$.

ΘΕΜΑ 5911

Έστω ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > B\Gamma$ τέτοιο ώστε οι διαγώνιοι του να σχηματίζουν γωνία 60^0. Από το Δ φέρουμε ΔM κάθετη στην $A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

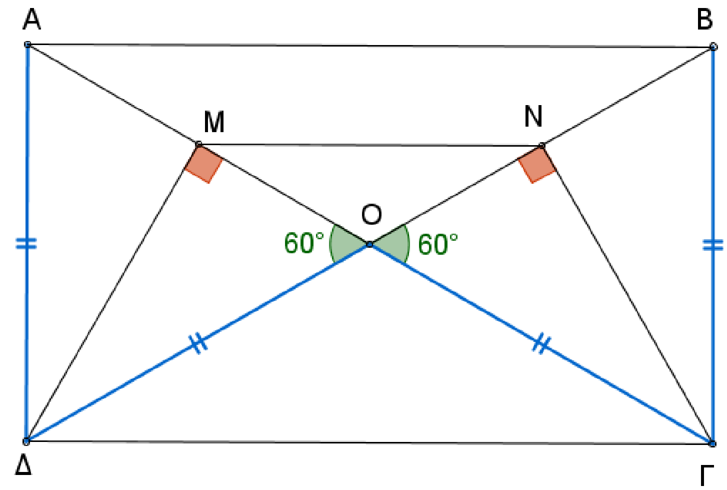
i) Το σημείο M είναι μέσο του AO, όπου O το κέντρο του ορθογωνίου.

(Μονάδες 8)

ii) $AM = \frac{1}{4} A\Gamma$ (Μονάδες 7) β) Αν από το Γ φέρουμε ΓΝ κάθετη στη $B\Delta$, να αποδείξετε ότι το $MN\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 10)

Λύση:

α.i.Οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται και είναι ίσες. Άρα $OA = O\Delta$. Το ισοσκελές τρίγωνο $AO\Delta$ έχει μία γωνία 60^0, οπότε είναι ισόπλευρο. Το ύψος λοιπόν, ΔM, θα είναι και διάμεσος, δηλαδή το M είναι μέσο του



α.ii. $\mathrm{AM} = \frac{1}{2}\mathrm{AO} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\mathrm{A\Gamma}\right) \Leftrightarrow$

$\mathrm{AM} = \frac{1}{4}\mathrm{A\Gamma}$.

β) Ομοίως το N είναι το μέσο του BO, άρα $MN \parallel AB \parallel \Delta\Gamma$ και $\mathrm{MN} = \frac{\Delta\Gamma}{2}$, οπότε το $MN\Gamma\Delta$ δεν μπορεί να είναι παραλληλόγραμμο, άρα είναι τραπέζιο.

Στα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta MO, \Gamma NO$ είναι $\mathrm{O\Delta} = \mathrm{O\Gamma}$ και $\mathrm{MO\Delta} = \mathrm{\Gamma ON} = 60^0$

Τα τρίγωνα είναι λοιπόν ίσα, $\Delta M = \Gamma N$, οπότε το $MN\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

ΘΕΜΑ 6878

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}\left(\mathrm{A} = 90^o\right)$ έχουμε ότι $\mathrm{B} = 30^o$. Φέρουμε το ύψος AH και τη διάμεσο AM του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$. Από την κορυφή B φέρνουμε κάθετη στη διάμεσο AM, η οποία την τέμνει στο σημείο E όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να αποδείξετε ότι:

α) $\mathrm{BE} = \frac{\mathrm{AB}}{2}$, (Μονάδες 7) β) $AH = BE$, (Μονάδες 7)

γ) το τετράπλευρο $AHEB$ είναι εγγράψιμο, (Μονάδες 6)

δ) $EH // AB$. (Μονάδες 5)

Λύση:

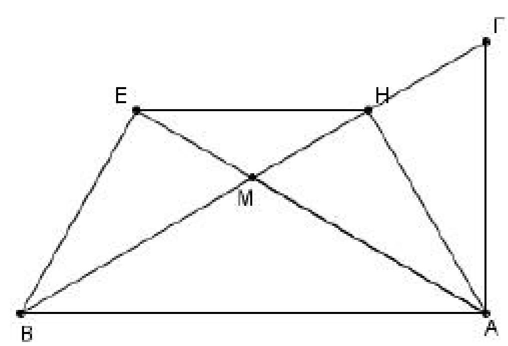
α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ γνωρίζουμε για τη διάμεσο AM ότι $AM = \frac{B\Gamma}{2}$, άρα το τρίγωνο BMA είναι ισοσκελές με $\angle MAB = B = 30^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο BEA η κάθετη πλευρά του EB βρίσκεται απέναντι από την γωνία $\angle MAB$ άρα: $EB = \frac{AB}{2}$.

β) Θα συγκρίνουμε τα τρίγωνα BEA, AHB.

Είναι ορθογώνια , έχουν κοινή υποτείνουσα AB και μια γωνία ίση $\angle EAB = \angle MAB = B = 30^o$,συνεπώς είναι ίσα άρα $AH = BE$

γ) Στο τετράπλευρο $AHEB$ η πλευρά AB φαίνεται υπό ίσες γωνίες $\angle BEA = \angle BHA = 90^o$ συνεπώς είναι εγγράψιμο.



δ) Θα συγκρίνουμε τα τρίγωνα BEH, AHE. Έχουν τρεις πλευρές ίσες, $AH = BE$, $BH = AE$ (τα τρίγωνα BEA, AHB είναι ίσα μεταξύ τους) και EH κοινή. Συνεπώς οι γωνίες HEM, EHM είναι ίσες μεταξύ τους συνάγεται ότι το τρίγωνο EMH είναι ισοσκελές. Έχουμε δείξει στο ερώτημα α) ότι το τρίγωνο BMA είναι ισοσκελές, άρα για τα δύο ισοσκελή τρίγωνα οι γωνίες των βάσεων τους είναι ίσες καθώς οι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις βάσεις τους EMH, BMA είναι ίσες ως κατακορυφήν. Άρα οι εντός εναλλάξ γωνίες HEA, EAB είναι ίσες συνεπώς $EH//AB$.

ΘΕΜΑ 7433

Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ και η διάμεσός του $ΑΔ$. Έστω $Ε, Ζ$ και $Η$ είναι τα μέσα των $ΒΔ, ΑΔ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα.

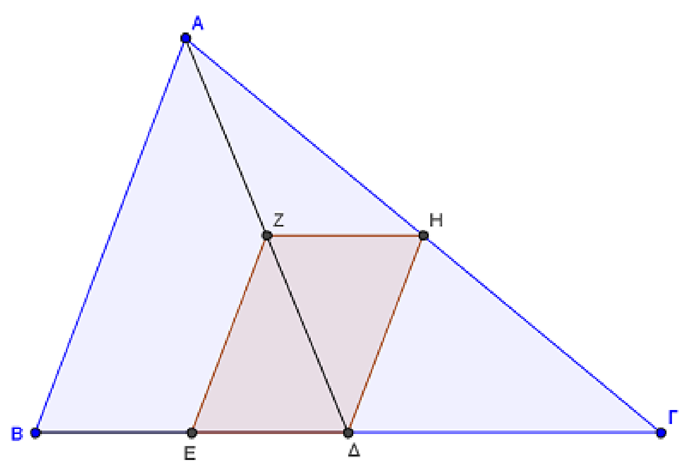
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΔΕΖΗ$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Να βρείτε τη σχέση των πλευρών $ΑΒ$ και $ΒΓ$ του τριγώνου $ΑΒΓ$, ώστε το παραλληλόγραμμο $ΔΕΖΗ$ να είναι ρόμβος.

γ) Στην περίπτωση που το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ορθογώνιο (η γωνία $Β$ ορθή), να βρείτε το είδος του παραλληλογράμμου $ΔΕΖΗ$.

Λύση:

α) Είναι $ΕΖ//=\frac{ΑΒ}{2}(1)$ διότι το $ΔΕ$ ενώνει τα μέσα των πλευρών $ΑΔ, ΒΕ$ του τριγώνου $ΑΒΔ$. $ΔΗ//=\frac{ΑΒ}{2}(2)$ διότι το $ΔΗ$ ενώνει τα μέσα των πλευρών $ΒΓ, ΑΓ$ του τριγώνου $ΑΒΓ$



Από $(1),(2) \Rightarrow ΕΖ//=ΔΗ$ οπότε το τετράπλευρο $ΔΕΖΗ$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Είναι $ΖΗ=\frac{ΔΓ}{2} \Rightarrow ΖΗ=\frac{ΒΓ}{4}(3)$ αφού $ΔΓ=\frac{ΒΓ}{2}$, γιατί ενώνει τα μέσα των πλευρών $ΑΔ, ΑΓ$ του τριγώνου $ΑΔΓ$.

Για να είναι το παραλληλόγραμμο ΔEZH ρόμβος πρέπει να έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, δηλαδή: $ZH = ZE \overset{(3),(1)}{\Rightarrow} \frac{B\Gamma}{4} = \frac{AB}{2} \Rightarrow B\Gamma = 2AB$

γ) Αν η γωνία B είναι ορθή τότε $ZE\Delta = B = 90^{\circ}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά,

οπότε το ΔEZH είναι ορθογώνιο επειδή είναι παραλληλόγραμμο με μια ορθή γωνία.