mathematica.gr

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ 2014

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α ΛΥΚΕΙΟΥ

4^{ο} ΘΕΜΑ

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

Έλυσαν οι

Δημήτρης Ιωάννου, Γιώργος Βισβίκης, Μπάμπης Στεργίου, Χρήστος Κάναβης, Γιώργης Καλαθάκης, Παναγιώτης Γκριμπαβιώτης, Περικλής Γιαννουλάτος Κώστας Ζυγούρης, Χρήστος Ντάβας, Γιώργος Ρίζος Ηλίας Καμπελής, Νίκος Φραγκάκης,Αντώνης Βρέντζος, Γιώργος Γαβριλόπουλος, lafkasd, Περικλής Παντούλας, Κώστας Μαλλιάκας, Γιώργος Λέκκας, Θεοδωρής Καραμεσάλης, Χρήστος Κανάβης

Επιμέλεια : Τσιφάκης Χρήστος

Αφιερωμένο σε όλους τους μαθητές της Α Λυκείου

Τεύχος 4ο

ΘΕΜΑ 4801

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A}=120^o$. Φέρουμε ημιευθεία Ax κάθετη στην $A\Gamma$ στο A, η οποία τέμνει τη $B\Gamma$ στο Δ. Έστω Λ το μέσο του AB και K το μέσο του $\Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $A\Delta B$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) $\Delta\Gamma = 2\Delta B$. (Μονάδες 8)

γ) $\Lambda\Delta // AK$. (Μονάδες 5)

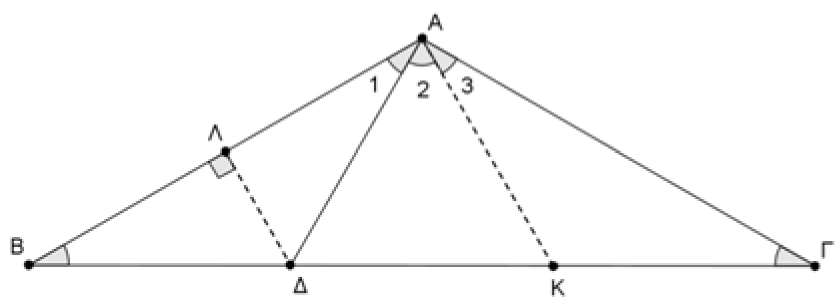
δ) $AK = 2\Lambda\Delta$. (Μονάδες 4)

Λύση:

α) Επειδή η γωνία $\Delta A\Gamma = 90^0$, έπεται ότι $A_1 = 120^0 - 90^0 = 30^0$.

Επίσης, αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές έχουμε ότι $B = \dfrac{180^0 - 120^0}{2} = 30^0$.

Επομένως $A_1 = B = 30^0$, που σημαίνει ότι το τρίγωνο $A\Delta B$ είναι ισοσκελές.



β) Από το (α) έχουμε ότι $\Delta B = \Delta A$.

Από το $\Delta A\Gamma$ επειδή $\Gamma = 30^0$, έχουμε ότι: $A\Delta = \dfrac{\Delta\Gamma}{2} \Leftrightarrow \Delta\Gamma = 2A\Delta$.

Τελικά: $\Delta\Gamma = 2\Delta B$.

γ) Το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές και το Λ είναι μέσον .

Επομένως το $\Lambda\Delta$ αφού είναι διάμεσος ,θα είναι και ύψος , οπότε $\Lambda\Delta \perp \text{ΑΒ}$ (1).

Ακόμα στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta\text{Α}\Gamma$ είναι $\Gamma = 30^0$, οπότε :
$\text{Α}\Delta\Gamma = 180 - 30^0 - 90^0 = 60^0$, άρα το τρίγωνο $\Delta\text{Α}\Gamma$ είναι ισόπλευρο , οπότε $\text{Α}_2 = 60^0$ και τελικά $\text{ΒΑΚ} = 30^0 + 60^0 = 90^0 \Rightarrow \text{ΚΑ} \perp \text{ΑΒ}$ (2).

Από $(1),(2)$ έχουμε ότι : $\Lambda\Delta // \text{ΑΚ}$.

δ) Στο τρίγωνο ΒΑΚ το Λ είναι μέσον και $\Lambda\Delta // \text{ΑΚ}$ άρα το Δ είναι μέσον και
$\Lambda\Delta = \dfrac{\text{ΑΚ}}{2} \Rightarrow \text{ΑΚ} = 2\Lambda\Delta$.

ΘΕΜΑ 4802

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $\text{ΑΒ}\Gamma$ με $\text{Α} = 90^\circ$ και $\text{Β} = 60^\circ$. Η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την $\text{Α}\Gamma$ στο Ζ. Τα σημεία Μ και Κ είναι τα μέσα των ΒΖ και $\text{Β}\Gamma$ αντίστοιχα. Αν το τμήμα $\Gamma\Lambda$ είναι κάθετο στη διχοτόμο $\text{Β}\delta$ να αποδείξετε:

α) Το τρίγωνο $\text{ΒΖ}\Gamma$ είναι ισοσκελές.

β) Το τετράπλευρο ΑΜΚΖ είναι ρόμβος.

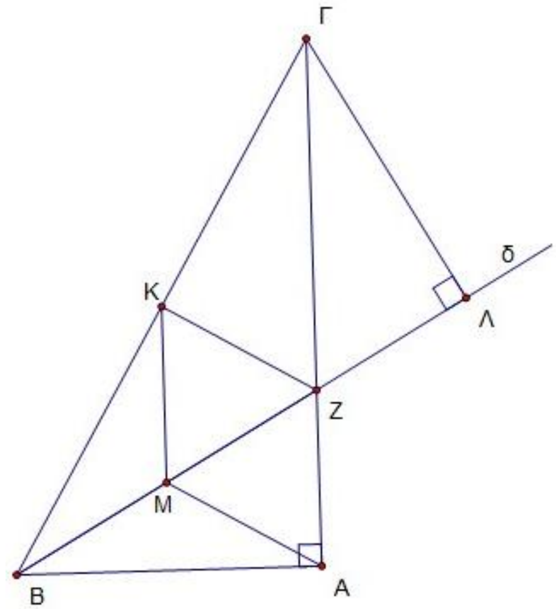
γ) $\Gamma\text{Ζ} = 2\text{ΖΑ}$.

δ) $\text{Β}\Lambda = \text{Α}\Gamma$.

Λύση:

α) Στο ορθ. τρίγωνο $\text{ΑΒ}\Gamma$ είναι $\text{Α} = 90^\circ$ και $\text{Β} = 60^\circ$ οπότε $\hat{\Gamma} = 30^\circ$.

Αφού η $B\delta$ είναι διχοτόμος της B τότε $Z\mathrm{B}\Gamma=30^\circ$ Έτσι $Z\mathrm{B}\Gamma=\hat{\Gamma}=30^\circ$ δηλαδή το τρίγωνο $\mathrm{BZ}\Gamma$ είναι ισοσκελές.



β) Στο ορθ. τρίγωνο ABZ είναι $\mathrm{ZBA}=30^\circ$ και AM διάμεσος στην υποτείνουσα BZ, έτσι $\mathrm{AM}=\frac{\mathrm{BZ}}{2}\Rightarrow \mathrm{AM}=\mathrm{AZ}\,(1)$.

Το MK ενώνει τα μέσα δυο πλευρών του τριγώνου $\Gamma\mathrm{BZ}$ έτσι $\mathrm{MK}//\Gamma\mathrm{Z}$ και $\mathrm{MK}=\frac{\Gamma\mathrm{Z}}{2}\overset{\Gamma\mathrm{Z}=\mathrm{BZ}}{\Rightarrow}\mathrm{MK}=\frac{\mathrm{BZ}}{2}=\mathrm{AM}=\mathrm{AZ}$.

Οπότε $\mathrm{MK}//=\mathrm{AZ}$ και $\mathrm{MK}=\mathrm{AZ}$.

Έτσι το AMKZ είναι ρόμβος αφού είναι παραλληλόγραμμο με δύο ίσες διαδοχικές πλευρές.

γ) Από το ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{BZ}\Gamma$ είναι $\mathrm{BZ}=\Gamma\mathrm{Z}\,(2)$. Από την (1) είναι

$$\frac{\mathrm{BZ}}{2}=\mathrm{AZ}\overset{(2)}{\Rightarrow}\frac{\Gamma\mathrm{Z}}{2}=\mathrm{AZ}\Rightarrow\Gamma\mathrm{Z}=2\mathrm{AZ}.$$

δ) Επειδή στο ορθ. τρίγωνο $\mathrm{AB}\Gamma$ είναι $\hat{\Gamma}=30^\circ$ τότε $\mathrm{AB}=\frac{\mathrm{B}\Gamma}{2}\,(3)$

Ομοίως, από ορθ. τρίγωνο $\Gamma\Lambda\mathrm{B}$ είναι $\mathrm{ZB}\Gamma=30^\circ$ οπότε $\Gamma\Lambda=\frac{\mathrm{B}\Gamma}{2}\,(4)$. Τα ορθ. τρίγωνα $\mathrm{AB}\Gamma$ και $\Gamma\Lambda\mathrm{B}$ είναι ίσα αφού έχουν: $\mathrm{AB}=\Gamma\Lambda$ από τις σχέσεις $(3),(4)$ και $\hat{\Gamma}=\mathrm{ZB}\Gamma=30^\circ$. Άρα και $\mathrm{B}\Lambda=\mathrm{A}\Gamma$.

ΘΕΜΑ 4803

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με διάμεσο AM τέτοια ώστε $AM=AB$. Φέρνουμε το ύψος AK και το προεκτείνουμε (προς το Κ) κατά τμήμα $K\Lambda=AK$. Προεκτείνουμε την AM (προς το Μ) κατά τμήμα $ME=AM$. Να αποδείξετε ότι α) $\mathrm{ΔΕ} \perp \mathrm{ΑΔ}$ και $ΔE = 2KM$. (Μονάδες 7)

β) Το τετράπλευρο $ABE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)

γ) Το τετράπλευρο $AB\Delta M$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 6)

δ) Η προέκταση της ΔM τέμνει το $A\Gamma$ στο μέσον του Z. (Μονάδες 6)

Λύση:

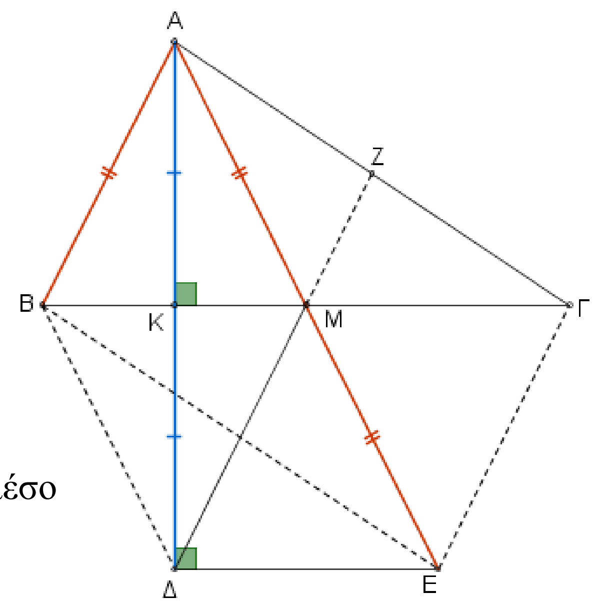
α) $\Delta E \parallel KM$ ($\mathrm{K,M}$ είναι τα μέσα των $A\Delta, AE$ αντίστοιχα).

Άρα $\mathrm{ΔΕ} \perp \mathrm{ΑΔ}$ (αφού $\mathrm{ΑΔ} \perp \mathrm{KM}$) και $\Delta E = 2KM$.

β) Το τετράπλευρο $ABE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο επειδή οι διαγώνιοι του διχοτομούνται.

γ) Στο ισοσκελές τρίγωνο ABM το AK είναι ύψος, άρα και διάμεσος. Οπότε οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου $AB\Delta M$ είναι κάθετες και διχοτομούνται, δηλαδή είναι ρόμβος.

δ) $\Delta Z \parallel AB$ και M είναι μέσο του $B\Gamma$, άρα Z είναι μέσο του $A\Gamma$.



ΘΕΜΑ 4804

Έστω κύκλος με κέντρο O και διάμετρο $K\Lambda = 2\rho$. Έστω A σημείο του κύκλου ώστε η ακτίνα OA να είναι κάθετη στην $K\Lambda$. Φέρουμε τις χορδές $AB = A\Gamma = \rho$

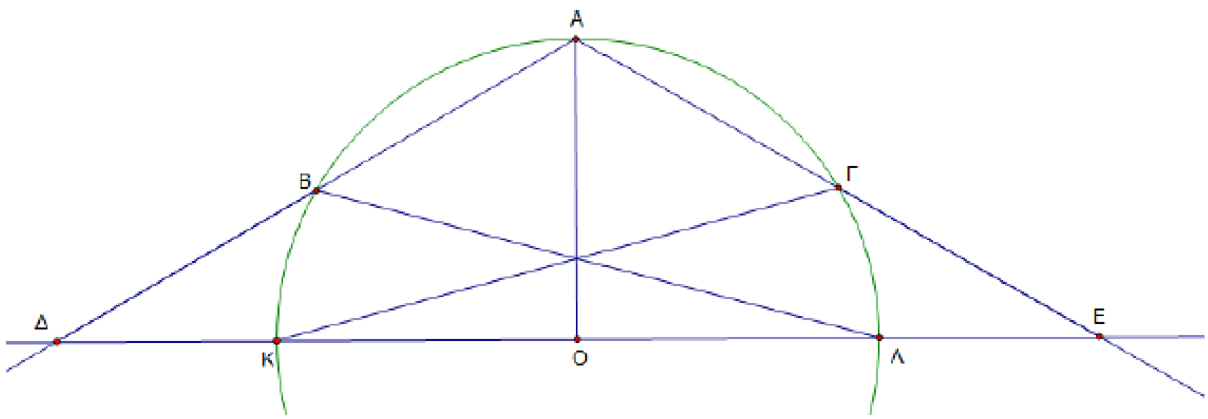
και έστω Δ, E τα σημεία τομής των προεκτάσεων των $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα με την ευθεία $K\Lambda$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία $BA\Gamma$ είναι 120^0. (Μονάδες 7)

β) Τα σημεία B και Γ είναι μέσα των $A\Delta$ και AE αντίστοιχα. (Μονάδες 9) γ) $K\Gamma = \Lambda B$. (Μονάδες 9)

Λύση:

α) Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΑΓ είναι ισόπλευρα, διότι οι πλευρές τους είναι ίσες με ρ. Επομένως καθεμιά από τις γωνίες $OAB, OA\Gamma$ είναι ίση με 60^0. Άρα η γωνία $BA\Gamma$ είναι ίση με 120^o.



β) Είναι $\hat{\Delta} = 30^o$ και $B\hat{O}\Delta = 30^o$. Άρα το τρίγωνο $BO\Delta$ είναι ισοσκελές, οπότε $B\Delta = BO = BA = \rho$. Επομένως , το B είναι μέσο του $A\Delta$. Όμοια το Γ είναι μέσο του ΑΕ.

γ) Είναι $B\Delta = E\Gamma = \rho$. Επιπλέον είναι $O\Delta = OE$ διότι στο ισοσκελές τρίγωνο $A\Delta E$ το ΟΑ είναι ύψος. Έτσι $OK = O\Lambda = \rho$, οπότε είναι $K\Delta = \Lambda E = \lambda$. Επομένως $\Delta\Lambda = EK = 2\rho + \lambda$. Άρα τα τρίγωνα $B\Delta\Lambda, \Gamma EK$ είναι ίσα, αφού επιπλέον είναι $\hat{\Delta} = \hat{E} = 30^o$. Άρα $B\Lambda = K\Gamma$.

ΘΕΜΑ 4806

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, και την ευθεία ε της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας Α. Η κάθετη στην πλευρά ΑΒ στο Β τέμνει την ε στο Κ και την ευθεία ΑΓ στο Ζ.

Η κάθετη στην πλευρά ΑΓ στο Γ τέμνει την ε στο Λ και την ευθεία ΑΒ στο Ε.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $AZ = AE$.

ii. $AK = A\Lambda$.

β) Ένας μαθητής κοιτώντας το σχήμα, διατύπωσε την άποψη ότι η $A\Theta$ είναι διχοτόμος της γωνίας A του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Θ το σημείο τομής των KH και $E\Lambda$.

Συμφωνείτε με την παραπάνω άποψη του μαθητή ή όχι; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

Λύση:

α) i. Θεωρώντας ότι $AB = A\Gamma$,

(ΔΕΝ ΑΝΑΦΕΡΕΤΑΙ ΣΤΗΝ ΕΚΦΩΝΗΣΗ) τα ορθογώνια τρίγωνα ABZ και $A\Gamma E$ είναι ίσα αφού έχουν $AB = A\Gamma$ από την (δικιά μας) υπόθεση και A κοινή γωνία.

Άρα $AZ = AE$.

ii. Τα ορθογώνια τρίγωνα ABK και $A\Gamma\Lambda$ είναι ίσα αφού έχουν:

$AB = A\Gamma$ από την υπόθεση και $BAK = \Gamma A\Lambda$ ως μισά των ίσων εξωτερικών γωνιών της A. Άρα $AK = A\Lambda$.

β) Είναι $\Theta B\Gamma = 90^\circ - B$ και $\Theta\Gamma B = 90^\circ - \hat{\Gamma}$, έτσι $\Theta B\Gamma = \Theta\Gamma B$ αφού είναι $B = \hat{\Gamma}$.

Έτσι το τρίγωνο $\Theta B\Gamma$ είναι ισοσκελές δηλαδή $\Theta B = \Theta\Gamma$.

Όμως $AB = A\Gamma$. Τα σημεία A και Θ ισαπέχουν από τα άκρα του $B\Gamma$ οπότε η $A\Theta$ είναι η μεσοκάθετος του $B\Gamma$ δηλαδή και διχοτόμος της γωνίας A αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Δηλαδή ο μαθητής έχει δίκιο.

ΘΕΜΑ 4810

Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με O το σημείο τομής των διαγωνίων του και K το μέσο του $\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε το OK κατά τμήμα $KZ = KO$. Η BZ τέμνει τη διαγώνιο $A\Gamma$ στο Θ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα $O\Gamma$ και BZ διχοτομούνται. (Μονάδες 8)

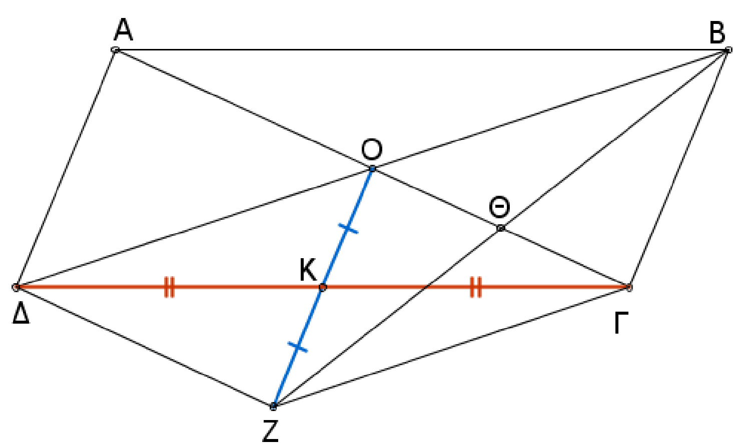
β) $AO = \Delta Z$. (Μονάδες 9)

γ) Τα τρίγωνα AOB και $\Delta Z\Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

Λύση:

α) Τα σημεία $\mathrm{O,K}$ είναι τα μέσα των $\Delta B, \Delta\Gamma$ αντίστοιχα. Άρα:

$\mathrm{OK} \parallel= \dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2} \Leftrightarrow \mathrm{OZ} \parallel= \mathrm{B\Gamma}$, δηλαδή το τετράπλευρο $OZ\Gamma B$



είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι $O\Gamma$ και BZ διχοτομούνται .

Β) Ομοίως είναι $\mathrm{OZ} \parallel= \mathrm{A\Delta}$, οπότε το τετράπλευρο $OA\Delta Z$ είναι παραλληλόγραμμο, δηλαδή $AO = \Delta Z$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

γ) $AO = \Delta Z, OB = Z\Gamma, AB = \Delta\Gamma$. Άρα τα τρίγωνα ΑΟΒ και $\Delta Z\Gamma$ είναι ίσα.

Τι νόημα είχε το τελευταίο ερώτημα;

Απ' όσες ασκήσεις έχω λύσει μέχρι στιγμής, έχω παρατηρήσει, ότι -πλην ελαχίστων εξαιρέσεων- τα ερωτήματα είναι υπερβολικά απλουστευμένα, σε βαθμό που να αναρωτιέται κανείς, τι νόημα έχει η ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ. Καταργεί την κριτική σκέψη και απλώς καθοδηγεί τους μαθητές βήμα-βήμα στις απαντήσεις.

Κατά τη γνώμη μου, αυτό ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.

ΘΕΜΑ 4812

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$. Προεκτείνουμε το ΒΓ (προς το Γ) κατά τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Φέρουμε τις διαμέσους ΑΕ, ΓΖ του τριγώνου ΑΒΓ που τέμνονται στο Θ. Το ΒΘ προεκτεινόμενο, τέμνει το ΑΓ στο Κ και το ΑΔ στο Η.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το ΖΚΓΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

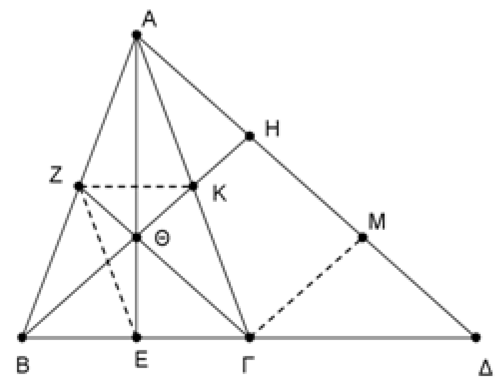
β) $AH = \Theta\Gamma$. (Μονάδες 9)

γ) $AH = 2Z\Theta$. (Μονάδες 7)

Λύση:

α) Οι ΑΕ, ΓΖ είναι διάμεσοι του τριγώνου ΑΒΓ, επομένως το Θ είναι το βαρύκεντρο , οπότε η ΒΚ είναι η τρίτη διάμεσος . Τότε : $ZK = \frac{B\Gamma}{2} = E\Gamma$ και $ZK // E\Gamma$, οπότε το ΖΚΓΕ είναι παραλληλόγραμμο .

β) Φέρνουμε τη $ΓΜ//ΒΗ$. Επειδή το $Γ$ είναι μέσον της $ΒΔ$, το $Μ$ θα είναι μέσον της $ΗΔ$, άρα $ΗΜ = ΜΔ \quad (1)$. Τότε στο τρίγωνο $ΑΓΜ$ είναι :



$Κ$ μέσον και $ΚΗ//ΓΜ$, οπότε το $Η$ είναι μέσον της $ΑΜ$, οπότε $ΑΗ = ΗΜ \quad (2)$.

Τότε : $ΓΘ = \frac{2}{3}ΓΖ = \frac{2}{3}\frac{ΑΔ}{2} = \frac{ΑΔ}{3} = ΑΗ$

Από (1),(2) έχουμε ότι : $ΑΗ = ΗΜ = ΜΔ$.

γ) Στο τρίγωνο είναι $ΑΒΓ$ είναι $ΘΓ = 2ΖΘ$ (αφού το $Θ$ είναι βαρύκεντρο) ,οπότε από το (β) έχουμε: $ΑΗ = 2ΖΘ$.

ΘΕΜΑ 4814

Έστω κύκλος με κέντρο O και διάμετρο AB.Φέρνουμε χορδή $ΓΔ \parallel AB$ με K το μέσο της. Από το $Δ$ φέρνουμε το τμήμα $ΔE$ κάθετο στην $AΓ$.

Να αποδειχθεί ότι:

i)Το τετράπλευρο $KΓOE$ είναι παραλληλόγραμμο.

ii) $\angle ΔEK = \frac{\angle ΔOΓ}{2}$.

iii) $KE < KB$.

Λύση:

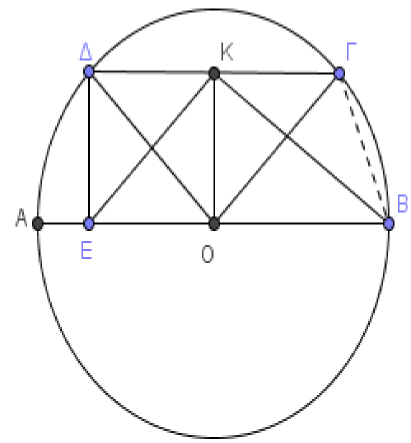
i) Αφού $ΔE \perp AΓ$ και $ΓΔ \parallel AΓ$ θα είναι $ΔE \perp ΓΔ$.

Επίσης, αφού το K είναι μέσο χορδής, το τμήμα OK είναι απόστημα άρα

$OK \perp \Gamma\Delta$.Τελικά το τετράπλευρο ΔEOK έχει τρεις γωνίες ορθές επομένως είναι ορθογώνιο. Επομένως $EO = \Delta K \overset{\Delta K = \Gamma K}{\Leftrightarrow} EO = K\Gamma$.

Όμως $EO \parallel K\Gamma$ άρα το τετράπλευρο έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες, επομένως είναι παραλληλόγραμμο.

ii) Το τρίγωνο $\Delta O\Gamma$ είναι ισοσκελές κι αφού η OK είναι ύψος, θα είναι και διχοτόμος της γωνίας $\angle \Delta O\Gamma$.



Επομένως $\angle \Delta OK = \dfrac{\angle \Delta O\Gamma}{2}$.Ακόμη τα τρίγωνα ${}_{\triangle}\Delta EK$ και ΔOK είναι ίσα αφού έχουν

$OK = \Delta E$ (από το ορθογώνιο), ΔK κοινή και είναι ορθογώνια. Επομένως $\angle \Delta EK = \angle \Delta OK = \dfrac{\angle \Delta O\Gamma}{2}$.

iii) $KE = O\Gamma$ (από το παραλληλόγραμμο) άρα $KE = OB$. Στο τρίγωνο ${}_{\triangle}OKB$ η KB είναι υποτείνουσα άρα $KB > OB \Leftrightarrow KE > KB$.

ΘΕΜΑ 4816

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^0$ και Δ, E και N τα μέσα των $AB, A\Gamma$ και ΔE αντίστοιχα. Στο τμήμα $B\Gamma$ θεωρούμε τα σημεία K και Λ ώστε $\Delta K = KB$ και $E\Lambda = \Lambda\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta K\Lambda = 2B$ και $E\hat{\Lambda}K = 2\hat{\Gamma}$. (Μονάδες 10)

β) Το τετράπλευρο $\Delta E\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο με $\Delta E = 2\Delta K$. (Μονάδες 8)

γ) $AN = \Delta K = \dfrac{B\Gamma}{4}$. (Μονάδες 7)

Λύση:

α) Είναι $B = B\hat{\Delta}K = \varphi, \hat{\Gamma} = \Lambda E\Gamma = \omega$.

$\Delta K\Lambda = 2\varphi, E\hat{\Lambda}K = 2\omega$ (ως εξωτερικές γωνίες στα τρίγωνα $KB\Delta, \Lambda\Gamma E$ αντίστοιχα).

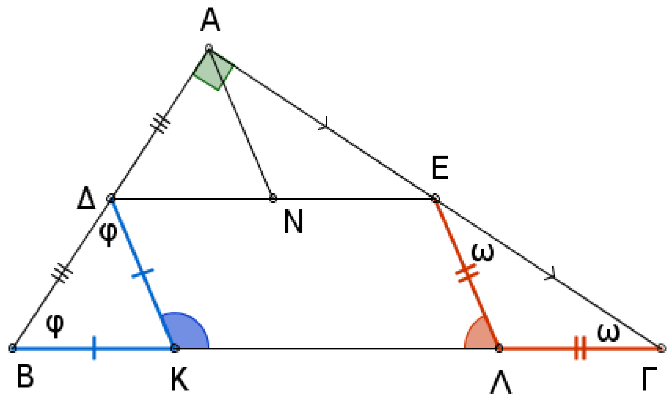
Άρα: $\Delta K\Lambda = 2B$ και $E\hat{\Lambda}K = 2\hat{\Gamma}$.

β) $\Delta E \parallel B\Gamma$ (Δ, E, μέσα των $AB, A\Gamma$)

$\Delta K\Lambda + E\hat{\Lambda}K = 2(B+\hat{\Gamma}) = 2(180^0 - A) \overset{A=90^0}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \Delta K\Lambda + E\hat{\Lambda}K = 180^0 \Leftrightarrow \Delta K \parallel E\Lambda$.

Οπότε το τετράπλευρο $\Delta E\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο.



$BK = K\Delta = \Lambda E = \Lambda\Gamma$.

$\Delta E = \dfrac{B\Gamma}{2} = \dfrac{BK + K\Lambda + \Lambda\Gamma}{2} = \dfrac{\Delta K + \Delta E + \Delta K}{2} \Leftrightarrow 2\Delta E = 2\Delta K + \Delta E \Leftrightarrow \Delta E = 2\Delta K$.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta E$ η AN είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα. Άρα:

$AN = \dfrac{\Delta E}{2} = \Delta K$. Αλλά $\Delta E = \dfrac{B\Gamma}{2}$. Επομένως: $AN = \Delta K = \dfrac{B\Gamma}{4}$.

ΘΕΜΑ 4818

Έστω τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $AB > A\Gamma$. Έστω $A\Delta$ το ύψος του και M το μέσο AB. Η προέκταση της $M\Delta$ τέμνει την προέκταση της $A\Gamma$ στο E ώστε $\Gamma\Delta = \Gamma E$.

Να αποδειχθεί ότι:

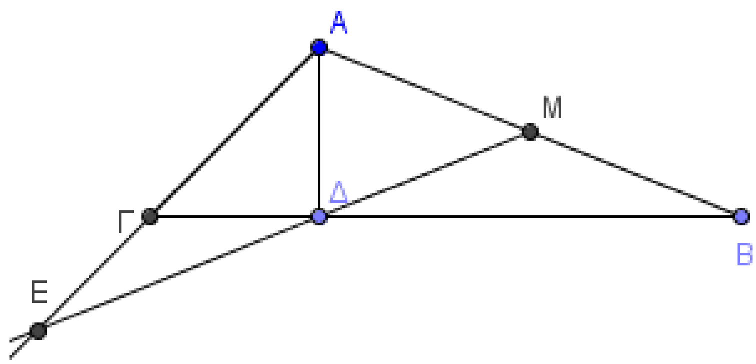
i) $\angle B = \angle E$.

ii) $\angle\Gamma = 2\angle B = \angle AM\Delta$.

iii) $\Gamma E < A\Gamma$.

Λύση:

i) Το τρίγωνο $_\triangle \Gamma\Delta E$ είναι εξ υποθέσεως ισοσκελές επομένως $\angle E = \angle \Gamma\Delta E = \angle M\Delta B$ (1) όπου το δεύτερο σκέλος προκύπτει επειδή οι γωνίες είναι κατακορυφήν. Ακόμη, αφού το τρίγωνο $_\triangle AB\Delta$ είναι ορθογώνιο και το M είναι μέσο της υποτείνουσας άρα $\Delta M = MB$ δηλαδή το τρίγωνο $B\Delta M$ είναι ισοσκελές.



Άρα $\angle M\Delta B = \angle B \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \angle B = \angle E$.

ii) Η γωνία $\angle AM\Delta$ είναι εξωτερική στο $_\triangle B\Delta M$ άρα ισούται με $2\angle B$ αφού το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Η $\angle \Gamma$ είναι εξωτερική στο $_\triangle \Gamma\Delta E$ άρα $\angle \Gamma = 2\angle E$ αφού το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Από την ισότητα του πρώτου ερωτήματος προκύπτει ότι $\angle \Gamma = 2\angle B$ απ' όπου παίρνουμε τη ζητούμενη ισότητα.

iii) $\Gamma E = \Gamma\Delta$.Στο τρίγωνο $_\triangle A\Gamma\Delta$ η $A\Gamma$ είναι υποτείνουσα άρα $A\Gamma > \Gamma\Delta = \Gamma E$.

ΘΕΜΑ 4821

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$, $A\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας A και Mτο μέσον της AB. Η κάθετη από το M στην $A\Delta$τέμνει το $A\Gamma$στο E.

Η παράλληλη από το B στο $A\Gamma$τέμνει την προέκταση της $A\Delta$ στο Kκαι την προέκταση της EM στο Λ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $AEM, MB\Lambda$ και ABK είναι ισοσκελή.

β) Το τετράπλευρο $A\Lambda BE$ είναι παραλληλόγραμμο.

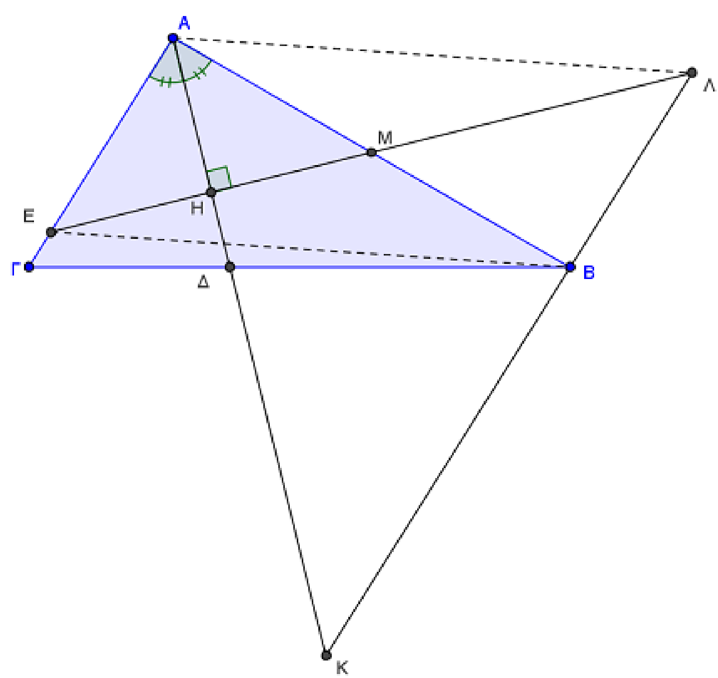
Λύση:

α) Αν H το σημείο τομής των $A\Delta$ και EM, τότε το τρίγωνο AEM είναι ισοσκελές αφού το AH είναι ύψος και διχοτόμος.

Έτσι $AE = AM = MB\,(1)$ και $MEA = AME\,(2)$

Είναι $M\Lambda B = MEA\,(3)$ ως εντός και εναλλάξ των παραλλήλων $K\Lambda, A\Lambda$ που τέμνονται από την ΛE και $\Lambda MB = AME\,(4)$ ως κατακορυφήν.

Από $(3),(4) \overset{(2)}{\Rightarrow} M\Lambda B = \Lambda MB$ οπότε το τρίγωνο $MB\Lambda$ είναι ισοσκελές.



Θα είναι και $\Lambda B = MB = \dfrac{AB}{2}\,(5)$.

Επίσης είναι $\Lambda KA = \Gamma AK = \dfrac{A}{2}$ ως εντός και εναλλάξ των παραλλήλων $K\Lambda, A\Lambda$ που τέμνονται από την AK.

Άρα $\Lambda KA = KAB = \dfrac{A}{2}$ δηλαδή το τρίγωνο ABK είναι ισοσκελές.

β) Είναι $B\Lambda // AE$ από κατασκευή και

$(5) \Rightarrow B\Lambda = MB \Rightarrow B\Lambda = MA \overset{\tau\rho\iota\gamma AEM}{\Rightarrow} B\Lambda = AE$.

Άρα $B\Lambda // = AE$ δηλαδή το $A\Lambda BE$ είναι παραλληλόγραμμο.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

ΘΕΜΑ 4822

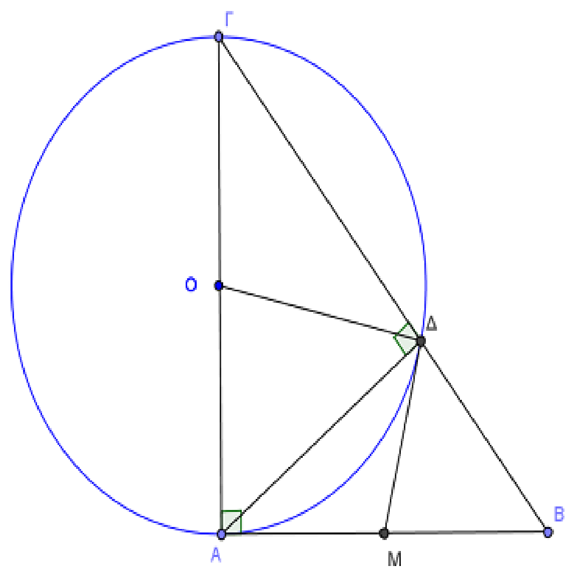
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΓAB $\left(A = 90^\circ\right)$. Με διάμετρο την πλευρά του $A\Gamma$ φέρουμε κύκλο που τέμνει την υποτείνουσα $B\Gamma$ στο Δ. Από το Δ φέρουμε εφαπτόμενο τμήμα το οποίο τέμνει την AB στο M. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma A\Delta = B$.

β) Το τρίγωνο ΔMB είναι ισοσκελές.

γ) Το M είναι το μέσο του AB.

Λύση:



α) Είναι $A\Delta\Gamma = 90^\circ$ ως εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο, έτσι $A\Delta \perp B\Gamma$.

Άρα $\Gamma A\Delta = B$ ως συμπληρωματικές της Γ από τα ορθογώνια τρίγωνα $\Gamma A\Delta$ και $AB\Gamma$ (ή ως οξείες με κάθετες πλευρές).

β) Είναι $A\Delta M = \hat{\Gamma}\,(1)$ γιατί η $A\Delta M$ είναι γωνία χορδής $(A\Delta)$ και εφαπτομένης (ΔM) και η $\hat{\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένη στη χορδή.
Άρα $M\Delta B = B$ ως συμπληρωματικές των ίσων γωνιών $M\Delta B$ και B οπότε το τρίγωνο ΔMB είναι ισοσκελές αφού έχει δύο ίσες γωνίες. Έτσι θα είναι $\Delta M = MB\,(2)$.

γ) $MA\Delta = \hat{\Gamma}\,(3)$ διότι η $MA\Delta$ είναι γωνία χορδής $(A\Delta)$ και εφαπτομένης (AM) και η $\hat{\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένη στη χορδή.

Από $(1),(3) \Rightarrow \mathrm{A\Delta M}=\mathrm{MA\Delta}$ δηλαδή το τρίγωνο $\mathrm{MA\Delta}$ είναι ισοσκελές και θα είναι $\mathrm{MA}=\mathrm{MB}\,(4)$.

$(2),(4) \Rightarrow \mathrm{AM}=\Delta\mathrm{M}$ δηλαδή το M είναι το μέσο του AB.

ΘΕΜΑ 4832

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}\,(\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma})$ και $\mathrm{A\Delta}$ διάμεσος. Στο τμήμα $\mathrm{A\Delta}$ θεωρούμε τυχαίο σημείο K από το οποίο φέρνουμε τα τμήματα KZ και KE κάθετα στις AB και $\mathrm{A\Gamma}$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\overset{\Delta}{\mathrm{ABK}}=\overset{\Delta}{\mathrm{A\Gamma K}}$

ii. Το τρίγωνο ZKE είναι ισοσκελές.

iii. Το τετράπλευρο $\mathrm{ZE\Gamma B}$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

β) Ένας μαθητής το (αi.) ερώτημα έδωσε την εξής απάντηση:

«Το τμήμα $\mathrm{A\Delta}$ είναι διάμεσος στη βάση ισοσκελούς άρα ύψος και διχοτόμος

του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$ και μεσοκάθετος του $\mathrm{B\Gamma}$. Οπότε και το τρίγωνο $\mathrm{BK\Gamma}$ είναι ισοσκελές.

Τα τρίγωνα $\mathrm{ABK},\mathrm{A\Gamma K}$ έχουν

1. $\mathrm{BK}=\mathrm{K\Gamma}$.

2. $\mathrm{BAK}=\mathrm{\Gamma AK}$ επειδή AK διχοτόμος της A.

3. $\mathrm{ABK}=\mathrm{A\Gamma K}$ ως διαφορές ίσων γωνιών ισοσκελών τριγώνων.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα βάση του κριτηρίου Γωνία – Πλευρά – Γωνία.»

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

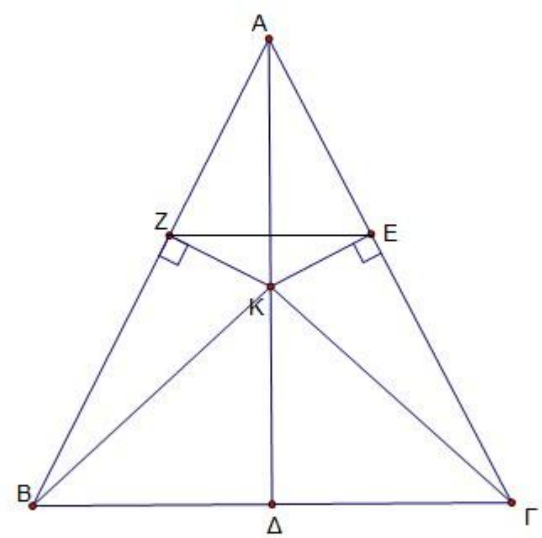
Ο καθηγητής είπε ότι η απάντηση του είναι ελλιπής. Να συμπληρώσετε την απάντηση του μαθητή ώστε να ικανοποιεί το κριτήριο Γωνία –Πλευρά – Γωνία διατηρώντας τις πλευρές $ΒΚ$ και $ΚΓ$.

Λύση:

α) i. Η είναι διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου $ΑΒΓ$ οπότε θα είναι διχοτόμος και ύψος.

Τα τρίγωνα $ΑΒΚ, ΑΓΚ$ είναι ίσα από $Π-Γ-Π$ αφού έχουν:

$ΑΒ = ΑΓ$ από υπόθεση, $ΑΚ$ κοινή πλευρά και $ΒΑΚ = ΓΑΚ$ αφού η $ΑΔ$ είναι διχοτόμος της $Α$.



ii. Είναι $ΚΖ = ΚΕ$ αφού το $Κ$ είναι σημείο της διχοτόμου της $Α$ και θα ισαπέχει από τις πλευρές της. Άρα το τρίγωνο $ΖΚΕ$ είναι ισοσκελές.

iii. Από την παραπάνω ισότητα είναι $ΑΖ = ΑΕ\,(1)$ οπότε και $ΒΖ = ΓΕ\,(2)$ ως διαφορές ίσων τμημάτων. Τα ισοσκελή τρίγωνα $ΑΖΕ$ (από την (1)) και $ΑΒΓ$ έχουν την $Α$ κοινή γωνία κορυφής, έτσι και οι γωνίες των βάσεων τους θα είναι ίσες, δηλαδή $ΑΖΕ = Β \Rightarrow ΖΕ // ΒΓ\,(3)$.

Από την $(1),(3)$ συμπεραίνουμε ότι το $ΖΕΓΒ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο αφού και οι $ΒΖ, ΓΕ$ τέμνονται στο $Α$.

β) Το επιπλέον στοιχείο που πρέπει να προσθέσουμε για να ικανοποιείται το κριτήριο $Γ-Π-Γ$ είναι: $ΑΚΒ = ΑΚΕ$ ως οι τρίτες γωνίες των τριγώνων $ΑΒΚ, ΑΓΚ$ αφού οι άλλες δύο είναι ανά δύο ίσες.

ΘΕΜΑ 5886

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και το ύψος του AH. Αν Δ, E και Z είναι τα μέσα των AB, $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι :

α) το τετράπλευρο ΔEZH είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)

β) οι γωνίες $H\hat{\Delta}Z$ και $H\hat{E}Z$ είναι ίσες . (Μονάδες 8)

γ) οι γωνίες $E\hat{\Delta}Z$ και $E\hat{H}Z$ είναι ίσες. (Μονάδες 9)

Λύση:

α) Τα Δ, E είναι μέσα των AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Από θεώρημα, $\Delta E \,||\!= \frac{B\Gamma}{2}$.

Άρα $\Delta E \,||\, HZ$. Συνεπώς ΔEZH τραπέζιο.

Αρκεί να δείξω ότι $ZE = H\Delta$. Πράγματι, $H\Delta$ διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου ABH, άρα $H\Delta = \frac{AB}{2}$

και όμοια με πριν $ZE = \frac{AB}{2}$. Επομένως ΔEZH

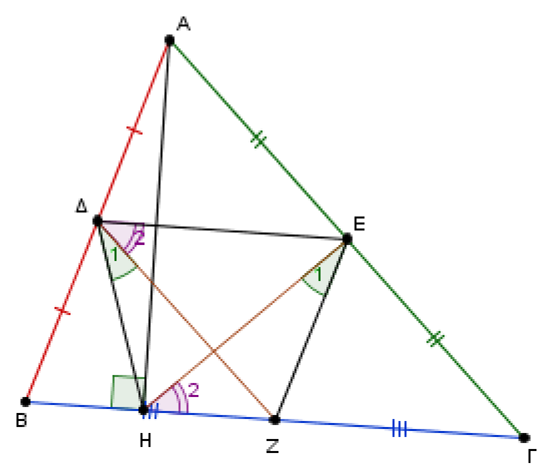
ισοσκελές τραπέζιο.

β), γ) Λόγω του ισοσκελούς τραπεζίου,

οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες,

$\Delta HZ = HZE$.

Αφού $\Delta E \,||\, HZ$, $\Delta EZ + EZH = 180^0$ ως εντός και επί τα αυτά (...).



Επομένως οι απέναντι γωνίες του τραπεζίου είναι παραπληρωματικές, συνεπώς το τραπέζιο είναι εγγράψιμο. Κάθε πλευρά φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες (θεώρημα). Έτσι, $\hat{E}_1 = \hat{\Delta}_1$ και $\hat{H}_1 = \hat{\Delta}_2$.

ΘΕΜΑ 5895

Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma(\hat{A}=90^o)$ και $\Delta B\Gamma(\hat{\Delta}=90^o)$ (όπου A και Δ εκατέρωθεν της $B\Gamma$) και το μέσο M της $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

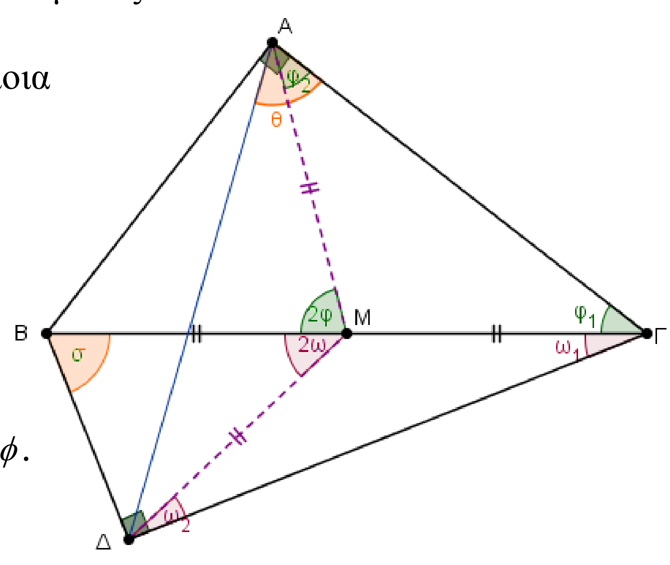
α) το τρίγωνο $AM\Delta$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

β) $A\hat{M}\Delta = 2\cdot A\hat{\Gamma}\Delta$. (Μονάδες 9)

γ) $\Gamma\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{A}\Delta$. (Μονάδες 7)

Λύση:

α)Το τρίγωνο $\Delta B\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ΔM διάμεσος του αφού M μέσο $B\Gamma$. Άρα $\Delta M = \frac{B\Gamma}{2}(1)$. Όμοια $AM = \frac{B\Gamma}{2}(2)$.



Από $(1),(2), \Delta M = AM$. Έτσι το τρίγωνο $AM\Delta$ είναι ισοσκελές.

β) Λόγω (1) και M μέσο της $B\Gamma$, $AM = M\Gamma$. Άρα τρίγωνο $AM\Gamma$ ισοσκελές. Έτσι $\hat{\phi}_1 = \hat{\phi}_2 = \phi$.

Τότε $A\hat{M}B = 2\phi$ ως εξωτερική του τριγώνου $AM\Gamma$. Όμοια $B\hat{M}\Delta = 2\omega$.

Επομένως $A\hat{M}\Delta = A\hat{M}B + B\hat{M}\Delta = 2\phi + 2\omega = 2(\hat{\phi}_1 + \hat{\omega}_1) = 2\cdot A\hat{\Gamma}\Delta$.

γ) Αφού οι απέναντι γωνίες $\hat{A}+\hat{\Delta}=90^o+90^o=180^o$ (παραπληρωματικές), το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγράψιμο.

Άρα πλευρά $\Delta\Gamma$ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες, $\hat{\theta}=\hat{\sigma}$ δηλαδή το ζητούμενο.

ΘΕΜΑ 5898

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB<A\Gamma$ και η διχοτόμος του $A\Delta$. Στην πλευρά $A\Gamma$ θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $AE=AB$. Να αποδείξετε ότι :

α) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta E$ είναι ίσα.

β) η ευθεία $A\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος BE.

γ) αν το ύψος από την κορυφή B του τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνει την $A\Delta$ στο H τότε η ευθεία EH είναι κάθετη στην AB.

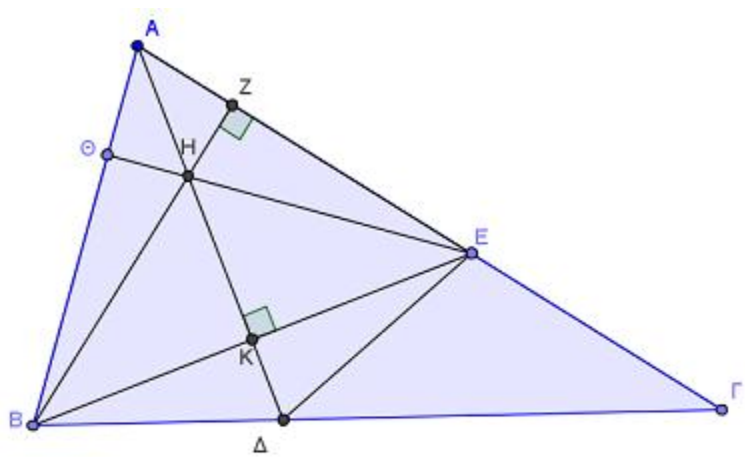
Λύση:

α) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta E$ είναι ίσα από $\Pi-\Gamma-\Pi$ επειδή έχουν:

$A\Delta$ κοινή πλευρά, $AE=AB$ από υπόθεση και

$B\hat{A}\Delta=\Delta\hat{A}E=\frac{\hat{A}}{2}$.

Οπότε είναι και $B\Delta=\Delta E\ (1)$



β) Αφού ισχύουν $AE=AB$ και $B\Delta=\Delta E$ η $A\Delta$ είναι μεσοκάθετος του BE επειδή τα σημεία A,Δ ισαπέχουν από τα άκρα του.

γ) Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές με $AE=AB$ και η διχοτόμος του $A\Delta$ είναι και ύψος, Το σημείο H είναι ορθόκεντρο του τριγώνου ABE αφού διέρχονται τα δύο ύψη του $A\Delta$ και BZ, έτσι και το EH είναι ύψος δηλαδή η EH είναι κάθετη στην AB.

ΘΕΜΑ 5900

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma\,(AB = A\Gamma)$ και M το μέσο της $B\Gamma$. Φέρουμε $\Gamma\Delta \perp B\Gamma$ με $\Gamma\Delta = AB$ (A, Δ εκατέρωθεν της $B\Gamma$). Να αποδείξετε ότι:

α) $AM // \Gamma\Delta$.

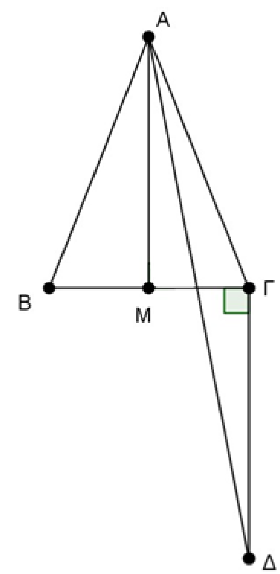
β) η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $MA\Gamma$.

γ) $\Delta A\Gamma = 45^\circ - \dfrac{B}{2}$.

δ) $A\Delta < 2AB$.

Λύση:

α) Αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές η διάμεσος AM είναι και μεσοκάθετος της $B\Gamma$, οπότε $AM // \Gamma\Delta$ ως κάθετες στην $B\Gamma$.



β) Είναι $MA\Delta = \Gamma\Delta A\,(1)$ ως εντός και εναλλάξ των $AM // \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $A\Delta$.

$\Gamma A\Delta = \Gamma\Delta A\,(2)$ ως γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου $A\Gamma\Delta\,(A\Gamma = \Gamma\Delta = AB)$

$(1),(2) \Rightarrow MA\Delta = \Gamma A\Delta$ δηλαδή η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $MA\Gamma$.

γ) Από το ισοσκελές τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ έχουμε:

$\Delta A\Gamma + \Gamma\Delta A + A\Gamma\Delta = 180^\circ \Rightarrow 2\Delta A\Gamma + 90^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \overset{\hat{\Gamma}=B}{\Rightarrow}$ (επειδή

$\Gamma\Delta A = \Delta A\Gamma$ και $A\Gamma\Delta = 90^\circ + \hat{\Gamma}$). $\Delta A\Gamma = 45^\circ - \frac{B}{2}$.

δ) Από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι:

$$A\Delta < A\Gamma + A\Delta \overset{A\Delta = A\Gamma = AB}{\Rightarrow} A\Delta < 2AB.$$

ΘΕΜΑ 5902

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Από το B φέρουμε κάθετη στην διχοτόμο AM της γωνίας $\hat{A}$, η οποία τέμνει την AM στο H και την $A\Gamma$ στο Δ. Στην προέκταση της AH θεωρούμε σημείο Z τέτοιο ώστε $AH = HZ$ και έστω Θ το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο $ABZ\Delta$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)

β) το τετράπλευρο $HBZ\Theta$ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 9)

γ) η διάμεσος του τραπεζίου $HBZ\Theta$ είναι ίση με $\frac{AB + A\Gamma}{4}$. (Μονάδες 7)

Λύση:

α) Στο τρίγωνο $AB\Delta$ το AH είναι διχοτόμος και ύψος (υπόθεση). Επομένως

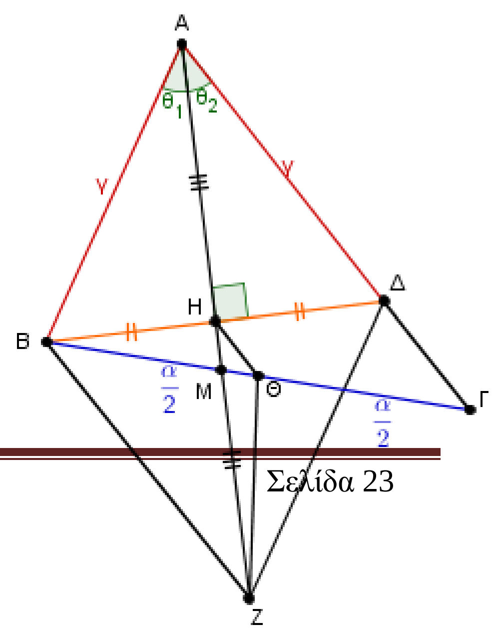
το τρίγωνο $AB\Delta$ ισοσκελές, με $AB = A\Delta = \gamma$.

Επειδή AH ύψος προς τη βάση του $B\Delta$, AH

είναι και διάμεσος. Έτσι H μέσο $B\Delta$, δηλ. $BH = H\Delta$.

Από υπόθεση $AH = HZ$. Άρα AZ, $B\Delta$ διχοτομούνται

και είναι και κάθετα. Συνεπώς $ABZ\Delta$ ρόμβος.



Έτσι $BZ = A\Delta = \gamma$ και $BZ // A\Delta$ (1).

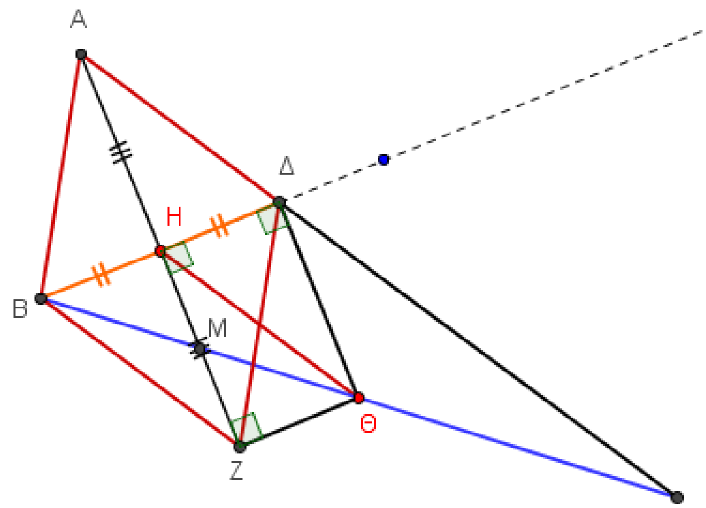
β) Στο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$, τα H, Θ είναι μέσα των $B\Delta$, $B\Gamma$ αντίστοιχα. Άρα από θεώρημα, $H\Theta // = \frac{\Delta\Gamma}{2}$ (2). Λόγω των (1) και (2), $H\Theta // BZ$.

Αν η HB τέμνει την $Z\Theta$ τότε το $HBZ\Theta$ είναι τραπέζιο.

γ) Από θεώρημα η διάμεσος του, $\delta = \frac{BZ + H\Theta}{2} = \frac{A\Delta + \frac{\Delta\Gamma}{2}}{2} = \frac{2A\Delta + \Delta\Gamma}{4} = \frac{AB + A\Gamma}{4}$.

Παρατήρηση

Αν η $BH \parallel \Theta Z$ τότε $HBZ\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο και δεν έχει νόημα το γ) ερώτημα. Δες Σχήμα 2 που ακολουθεί



Σχήμα 2

ΘΕΜΑ 5904

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι θέσεις στο χάρτη πέντε χωριών A, B, Γ, Δ και E και οι δρόμοι που τα συνδέουν.

Το χωριό E ισαπέχει από τα χωριά B, Γ και επίσης από τα χωριά A και Δ.

α) Να αποδείξετε ότι:

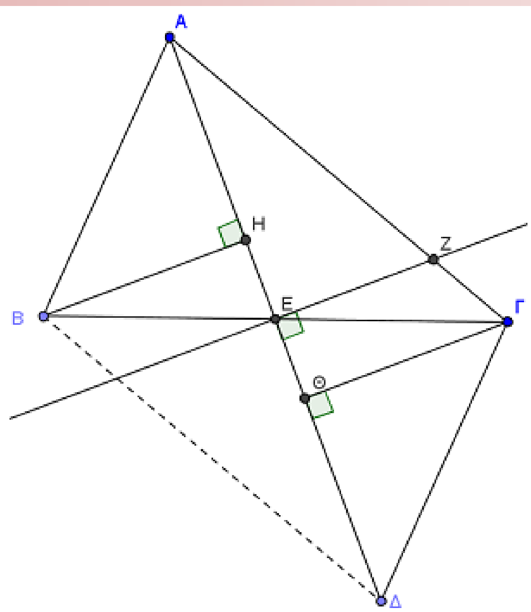
i. η απόσταση των χωριών A και B είναι ίση με την απόσταση των χωριών Γ και Δ

ii. αν οι δρόμοι AB και $\Gamma\Delta$ έχουν δυνατότητα να προεκταθούν, να αποδείξετε ότι αποκλείεται να συναντηθούν.

iii. τα χωριά B και Γ ισαπέχουν από τον δρόμο $A\Delta$.

β) Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το σημείο του δρόμου $A\Gamma$ που ισαπέχει από τα χωριά A και Δ.

Λύση:



α) i. Το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούντα στο E, έτσι $AB = \Gamma\Delta$.

ii. Από το παραλληλόγραμμο $AB\Delta\Gamma$ είναι και $AB // \Gamma\Delta$, δηλαδή οι δρόμοι AB και $\Gamma\Delta$ αποκλείεται να συναντηθούν.

iii. Τα ορθογώνια τρίγωνα ABH και $\Gamma\Theta\Delta$ είναι ίσα αφού έχουν:

$AB = \Gamma\Delta$ από αi ερώτημα και $B\hat{A}\Delta = A\hat{\Delta}\Gamma$ ως εντός εναλλάξ των $AB // \Gamma\Delta$ που τέμνονται από τη $A\Delta$.

Έτσι και $BH = \Gamma\Theta$ δηλαδή τα χωριά B και Γ ισαπέχουν από τον δρόμο $A\Delta$.

β) Αφού το ζητούμενο σημείο ισαπέχει από τα Α και Δ θα ανήκει στη μεσοκάθετο του $\text{Α}\Delta$. Άρα είναι το σημείο τομής Ζ της μεσοκαθέτου του $\text{Α}\Delta$ με την $\text{Α}\Gamma$.

ΘΕΜΑ 5908

Δίνεται παραλληλόγραμμο $\text{ΑΒ}\Gamma\Delta$ με $\text{ΑΒ} > \Gamma\Delta$ και οι διχοτόμοι των γωνιών του (όπου $\text{Ρ},\text{Ε}$ στην $\Delta\Gamma$ και $\Sigma,\text{Τ}$ στην ΑΒ) τέμνονται στα σημεία $\text{Κ},\Lambda,\text{Μ},\text{Ν}$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο $\Delta\text{ΕΒΤ}$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

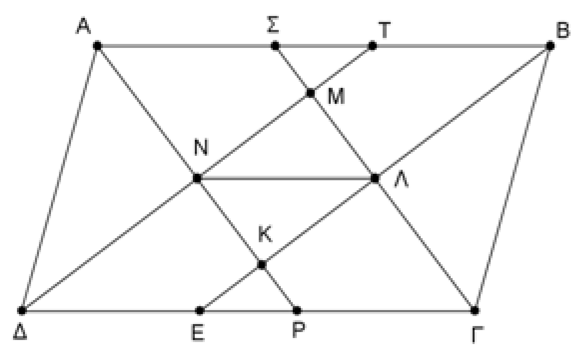
β) το τετράπλευρο $\text{Κ}\Lambda\text{ΜΝ}$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

γ) $\Lambda\text{Ν}//\text{ΑΒ}$. (Μονάδες 5)

δ) $\Lambda\text{Ν} = \text{ΑΒ} - \text{Α}\Delta$. (Μονάδες 5)

Λύση:

α) Από το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα $\Delta\text{ΑΤ},\text{ΒΕ}\Gamma$ είναι ίσα,επομένως : $\Gamma\text{Ε} = \text{ΑΤ}$, οπότε: $\text{ΑΒ} - \text{ΑΤ} = \Delta\Gamma - \text{Ε}\Gamma \Leftrightarrow \text{ΤΒ} = \Delta\text{Ε}$. Επιπλέον είναι και $\text{ΤΒ}//\Delta\text{Ε}$, οπότε το τετράπλευρο $\Delta\text{ΕΒΤ}$ είναι παραλληλόγραμμο .



β) Στο τρίγωνο $\Delta\text{ΑΝ}$ είναι $\text{Α}_1 + \hat{\Delta}_1 = \dfrac{\text{Α} + \hat{\Delta}}{2} = \dfrac{180^0}{2} = 90^0$ οπότε είναι και $\text{Ν} = 90^0$. Ομοίως για άλλες δυο γωνίες , π,χ. $\text{Μ},\text{Κ}$, οπότε το τετράπλευρο $\text{Κ}\Lambda\text{ΜΝ}$ είναι ορθογώνιο .

γ) Στο τρίγωνο $\Delta\text{ΑΤ}$, το ΑΝ είναι ύψος και διχοτόμος . Επομένως είναι ισοσκελές και το Ν είναι μέσον της $\Delta\text{Τ}$. Ομοίως το Λ είναι μέσον της ΕΒ.

Από το (α) έχουμε ότι $\Delta T // EB$ και $\Delta T = EB \Rightarrow \frac{\Delta T}{2} = \frac{EB}{2} \Rightarrow NT = \Lambda B$. Άρα το $TB\Lambda N$ είναι παρ/μο , οπότε $N\Lambda // BT \Rightarrow N\Lambda // AB$.

δ) $\Lambda N = TB = AB - AT = AB - A\Delta$, λόγω του ισοσκελούς ΔAT .

ΘΕΜΑ 5910

Δίνεται τρίγωνο με $AB\Gamma$, εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο O.Θεωρούμε το μέσο M του κυρτογώνιου τόξου $B\Gamma$ και το ύψος $A\Delta$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

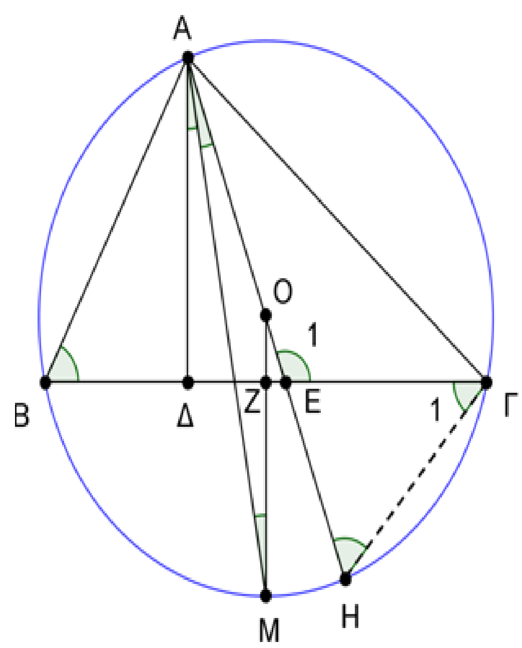
Να αποδείξετε ότι:

α) Η AM είναι διχοτόμος της γωνίας ΔAO . (Μονάδες 8)

β) $OA\Gamma = \Delta AB$. (Μονάδες 9)

γ) $\Delta AO = B - \hat{\Gamma}$. (Μονάδες 8)

Λύση:



α) Το απόστημα OZ της χορδής $B\Gamma$ διέρχεται από το μέσον της χορδής και από το μέσον M του τόξου . Επομένως $OM // A\Delta$ ως κάθετες στην ίδια ευθεία .

Τότε όμως $A_1 = M_1$ και $A_1 = M_2$, αφού το AOM είναι ισοσκελές . Τελικά $A_1 = A_2$, οπότε η AM είναι διχοτόμος .

β) Είναι $A\Gamma H = 90^0$ αφού βαίνει σε ημικύκλιο , οπότε $OA\Gamma = 90^0 - H$.

Επίσης από το τρίγωνο ΔAB είναι

$\Delta AB = 90^0 - B \ (2)$.

Επειδή $B = H$, αφού βαίνουν στο ίδιο τόξο , έχουμε από $(1),(2)$ ότι : $OA\Gamma = \Delta AB$.

γ) Η γωνία E_1 είναι εξωτερική στα τρίγωνα $\Delta AE, E\Gamma H$, οπότε έχουμε ότι:

$E_1 = 90^0 + \Delta AO \ (3)$ και $E_1 = H + \Gamma_1 = B + (90^o - \hat{\Gamma}) \ (4)$.

Από $(3),(4) \Rightarrow 90^0 + \Delta AO = B + (90^o - \hat{\Gamma}) \Rightarrow \Delta AO = B - \hat{\Gamma}$.

ΘΕΜΑ 5911

Έστω ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > B\Gamma$ τέτοιο ώστε οι διαγώνιοι του να σχηματίζουν γωνία 60^0 . Από το Δ φέρουμε ΔM κάθετη στην $A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) Το σημείο M είναι μέσο του AO, όπου O το κέντρο του ορθογωνίου.

(Μονάδες 8)

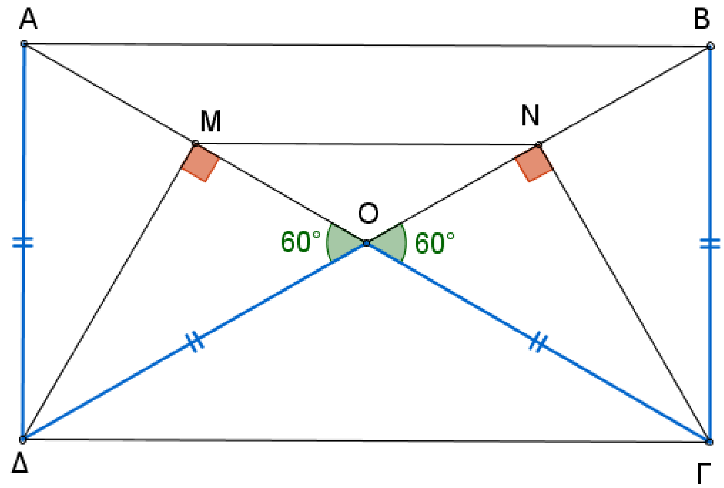
ii) $AM = \frac{1}{4}A\Gamma$ (Μονάδες 7)

β) Αν από το Γ φέρουμε ΓN κάθετη στη $B\Delta$, να αποδείξετε ότι το $MN\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 10)

Λύση:

α.i.Οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται και είναι ίσες. Άρα $OA = O\Delta$. Το ισοσκελές τρίγωνο $AO\Delta$ έχει μία γωνία 60^0, οπότε είναι ισόπλευρο. Το ύψος λοιπόν, ΔM, θα είναι και διάμεσος, δηλαδή το M είναι μέσο του α.ii. $AM = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}A\Gamma\right) \Leftrightarrow$

$AM = \frac{1}{4}A\Gamma$.



β) Ομοίως το N είναι το μέσο του BO, άρα $MN \parallel AB \parallel \Delta\Gamma$ και $MN = \frac{\Delta\Gamma}{2}$, οπότε το $MN\Gamma\Delta$ δεν μπορεί να είναι παραλληλόγραμμο, άρα είναι τραπέζιο.

Στα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta MO, \Gamma NO$ είναι $O\Delta = O\Gamma$ και $MO\Delta = \Gamma ON = 60^0$

Τα τρίγωνα είναι λοιπόν ίσα, $\Delta M = \Gamma N$, οπότε το $MN\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

ΘΕΜΑ 6875

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^0$) φέρουμε τη διχοτόμο του $A\Delta$. Έστω ΔK και ΔP οι προβολές του Δ στις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Η κάθετη της $B\Gamma$ στο σημείο Δ τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο E και την προέκταση της πλευράς AB (προς το B) στο σημείο Z.

α) Να αποδείξετε ότι:

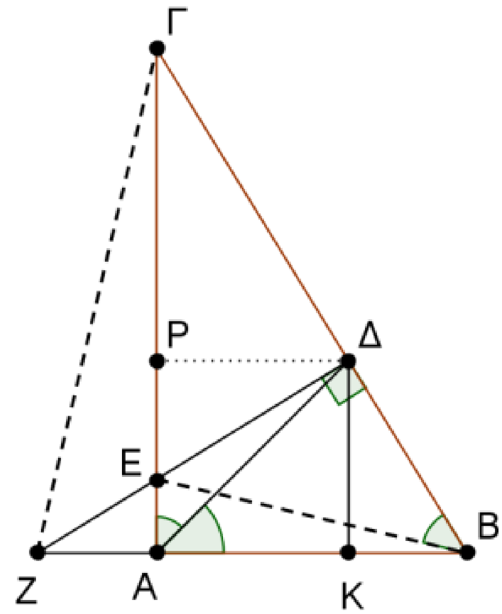
i. $B = \Delta E\Gamma$. (Μονάδες 8)

ii. $\Delta E = \Delta B$. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta\Gamma Z$. (Μονάδες 9)

Λύση:

α) Το τετράπλευρο $ΒΑΕΔ$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο αφού $Α+\hat{Δ}=180^0$ οπότε $Β=ΔΕΓ$, ως εξωτερική γωνία .



β) Πάλι από το εγγράψιμο τετράπλευρο $ΒΑΕΔ$ έχουμε $ΕΒΔ=ΕΑΔ=45^0$ και $ΒΕΔ=ΒΑΔ=45^0$, αφού μια πλευρά φαίνεται από τις απέναντι κορυφές κάτω από ίσες γωνίες . Επομένως $ΒΕΔ=ΔΒΕ=45^0$, οπότε το τρίγωνο $ΒΔΕ$ είναι ισοσκελές και κατά συνέπεια : $ΔΕ=ΔΒ$

γ) Το τετράπλευρο $ΔΑΖΓ$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο αφού $ΖΑΓ+ΖΔΓ=90^0$,

οπότε η πλευρά $ΖΓ$ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές κάτω από ίσες γωνίες .

Επομένως $ΔΓΖ=ΔΑΒ=45^0$ ως εξωτερική γωνία που ισούται με την απέναντι εσωτερική στο $ΔΑΖΓ$.

Σχόλιο :

Το σημείο $Ρ$ δεν υπήρχε λόγος να είναι εκεί. Ο ρόλος του είναι να μπερδεύει το σχήμα .

Αν δεν είναι τυπογραφικό και λειτουργεί σαν υπόδειξη , είναι μια κακή υπόδειξη .

ΘΕΜΑ 6878

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ\left(Α=90^o\right)$ έχουμε ότι $Β=30^o$. Φέρουμε το ύψος $ΑΗ$ και τη διάμεσο $ΑΜ$ του τριγώνου $ΑΒΓ$. Από την κορυφή $Β$ φέρνουμε κάθετη στη διάμεσο AM, η οποία την τέμνει στο σημείο E όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να αποδείξετε ότι:

α) $BE = \frac{AB}{2}$, (Μονάδες 7)

β) $AH = BE$, (Μονάδες 7)

γ) το τετράπλευρο $AHEB$ είναι εγγράψιμο, (Μονάδες 6)

δ) $EH // AB$. (Μονάδες 5)

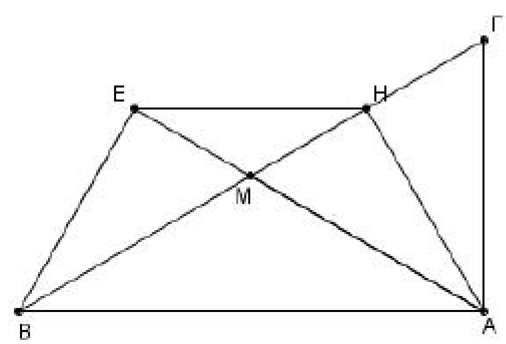
Λύση:

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ γνωρίζουμε για τη διάμεσο AM ότι $AM = \frac{B\Gamma}{2}$, άρα το τρίγωνο BMA είναι ισοσκελές με $\angle MAB = B = 30^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο BEA η κάθετη πλευρά του EB βρίσκεται απέναντι από την γωνία $\angle MAB$ άρα: $EB = \frac{AB}{2}$.

β) Θα συγκρίνουμε τα τρίγωνα BEA, AHB.

Είναι ορθογώνια , έχουν κοινή υποτείνουσα AB και μια γωνία ίση $\angle EAB = \angle MAB = B = 30^o$,συνεπώς είναι ίσα άρα $AH = BE$



γ) Στο τετράπλευρο $AHEB$ η πλευρά AB φαίνεται υπό ίσες γωνίες $\angle BEA = \angle BHA = 90^o$ συνεπώς είναι εγγράψιμο.

δ) Θα συγκρίνουμε τα τρίγωνα BEH, AHE. Έχουν τρεις πλευρές ίσες, $AH = BE$, $BH = AE$ (τα τρίγωνα BEA, AHB είναι ίσα μεταξύ τους) και EH κοινή. Συνεπώς οι γωνίες $\mathrm{HEM}, \mathrm{EHM}$ είναι ίσες μεταξύ τους συνάγεται ότι το τρίγωνο EMH είναι ισοσκελές. Έχουμε δείξει στο ερώτημα α) ότι το τρίγωνο BMA είναι ισοσκελές, άρα για τα δύο ισοσκελή τρίγωνα οι γωνίες των βάσεων τους είναι ίσες καθώς οι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις βάσεις τους $\mathrm{EMH}, \mathrm{BMA}$ είναι ίσες ως κατακορυφήν. Άρα οι εντός εναλλάξ γωνίες $\mathrm{HEA}, \mathrm{EAB}$ είναι ίσες συνεπώς $\mathrm{EH}//\mathrm{AB}$.

ΘΕΜΑ 6879

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R). Έστω σημείο Δ του τόξου AB τέτοιο, ώστε $\Delta\mathrm{B} \perp \mathrm{B}\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta\mathrm{A} \perp \mathrm{A}\Gamma$. (Μονάδες 8)

β) Έστω H το ορθόκεντρο του τριγώνου $\mathrm{AB}\Gamma$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\mathrm{A}\Delta\mathrm{BH}$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

γ) Αν M είναι το μέσον της $\mathrm{B}\Gamma$, να αποδείξετε ότι $\mathrm{OM} = \dfrac{\mathrm{AH}}{2}$. (Μονάδες 8)

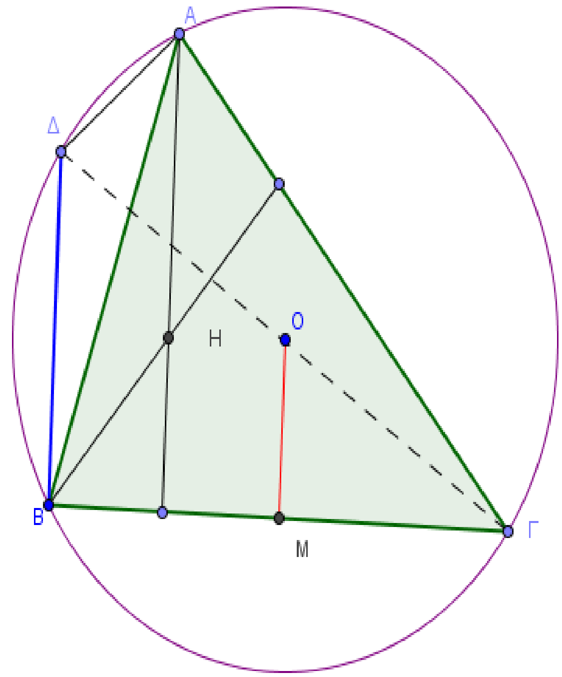
Λύση:

α) Επειδή η εγγεγραμμένη γωνία $\Delta\hat{\mathrm{B}}\Gamma$ είναι ορθή , η $\Gamma\Delta$ είναι διάμετρος του κύκλου. Επομένως και η γωνία $\Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma$ είναι ορθή, αφού βαίνει σε ημικύκλιο. Επομένως $\Delta\mathrm{A} \perp \mathrm{A}\Gamma$.

β) Επειδή το H είναι ορθόκεντρο του τριγώνου $\mathrm{AB}\Gamma$, είναι $\mathrm{BH} \perp \mathrm{A}\Gamma$. Είναι όμως και $\Delta\mathrm{A} \perp \mathrm{A}\Gamma$, οπότε $\mathrm{BH}//\Delta\mathrm{A}$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=142&t=44444

Όμοια, είναι $\Delta B \perp B\Gamma$ και $AH // B\Gamma$, οπότε $AH // \Delta B$. Επομένως το τετράπλευρο $A\Delta BH$ είναι παραλληλόγραμμο.



γ) Επειδή το τετράπλευρο $A\Delta BH$ είναι παραλληλόγραμμο, είναι $AH = \Delta B$. Στο τρίγωνο λοιπόν $\Gamma B\Delta$ το τμήμα OM ενώνει τα μέσα δύο πλευρών , οπότε : $OM = \frac{\Delta B}{2} = \frac{AH}{2}$.

ΘΕΜΑ 7433

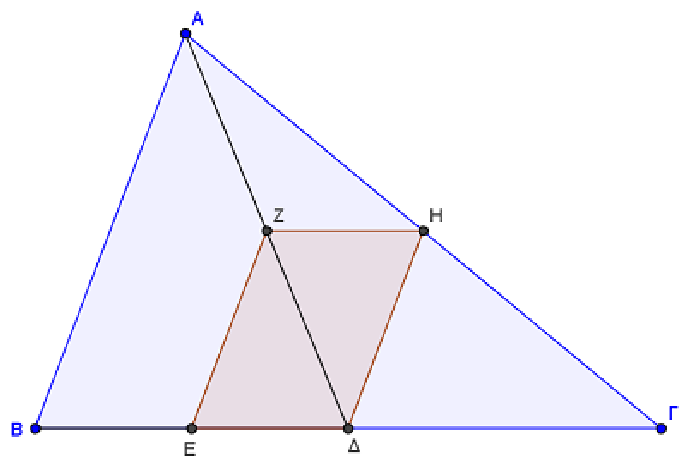
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσός του $A\Delta$. Έστω E, Z και H είναι τα μέσα των $B\Delta, A\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔEZH είναι παραλληλόγραμμο.

β) Να βρείτε τη σχέση των πλευρών AB και $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$, ώστε το παραλληλόγραμμο ΔEZH να είναι ρόμβος.

γ) Στην περίπτωση που το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο (η γωνία B ορθή), να βρείτε το είδος του παραλληλογράμμου ΔEZH.

Λύση:



α) Είναι $EZ// = \frac{AB}{2}$ (1) διότι το $ΔE$ ενώνει τα μέσα των πλευρών $AΔ, BE$ του τριγώνου $ABΔ$. $ΔH// = \frac{AB}{2}$ (2) διότι το $ΔH$ ενώνει τα μέσα των πλευρών $BΓ, AΓ$ του τριγώνου $ABΓ$

Από $(1),(2) \Rightarrow EZ// = ΔH$ οπότε το τετράπλευρο $ΔEZH$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Είναι $ZH = \frac{ΔΓ}{2} \Rightarrow ZH = \frac{BΓ}{4}$ (3) αφού $ΔΓ = \frac{BΓ}{2}$, γιατί ενώνει τα μέσα των πλευρών $AΔ, AΓ$ του τριγώνου $AΔΓ$.

Για να είναι το παραλληλόγραμμο $ΔEZH$ ρόμβος πρέπει να έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, δηλαδή: $ZH = ZE \overset{(3),(1)}{\Rightarrow} \frac{BΓ}{4} = \frac{AB}{2} \Rightarrow BΓ = 2AB$.

γ) Αν η γωνία B είναι ορθή τότε $ZEΔ = B = 90^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά, οπότε το $ΔEZH$ είναι ορθογώνιο επειδή είναι παραλληλόγραμμο με μια ορθή γωνία.