mathematica.gr

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Β΄ τάξης Γενικού Λυκείου

2ο Θέμα

Εκφωνήσεις - Λύσεις

των

θεμάτων

Έκδοση 1η (14/11/2014)

Οι απαντήσεις και οι λύσεις
είναι αποτέλεσμα συλλογικής δουλειάς
των Επιμελητών των φακέλων του Λυκείου
του Δικτυακού Τόπου **mathematica.gr**
με βάση υλικό που αναρτήθηκε στο mathematica
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=147&t=46867

Συνεργάστηκαν οι:
Γιώργος Ρίζος,
Χρήστος Τσιφάκης,
Γιώργος Απόκης,
Α Ταουκτσόγλου,
Σωτήρης Στόγιας,
Κωνσταντίνος Γεωργίου,
Νίκος Ξενιάδης,
Γιώργος Βισβίκης,
Θανάσης Παπασταθόπουλος,
Θοδωρής Καραμεσάλης,
Δημήτρης Ιωάννου

Το **Δελτίο** διατίθεται ελεύθερα
από το δικτυακό τόπο **mathematica.gr**

Θέματα 2ης Ομάδας

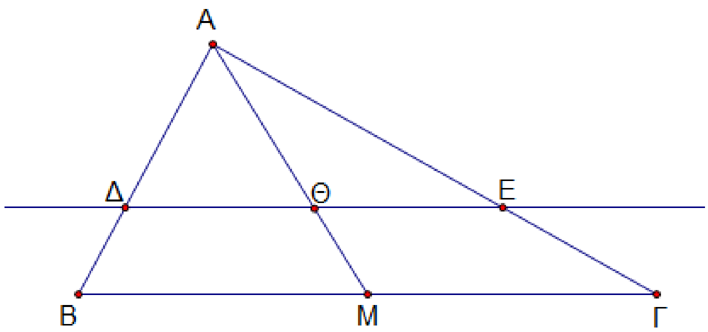
GI_V_GEO_2_18975

Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ=9$, $ΑΓ=15$. Από το βαρύκεντρο $Θ$ φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην πλευρά $ΒΓ$ που τέμνει τις $ΑΒ,ΑΓ$ στα $Δ,Ε$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{2}{3}$ και $\frac{ΑΕ}{ΕΓ}=2$. (Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων $ΑΔ$, $ΓΕ$. (Μονάδες 10)

Λύση:



α) Το $Θ$ είναι το βαρύκεντρο άρα θα έχουμε

$$\frac{ΑΘ}{ΑΜ}=\frac{2}{3} \quad (1), \qquad \frac{ΑΘ}{ΘΜ}=2 \quad (2).$$

Αφού τα τρίγωνα έχουν $ΔΕ//ΒΓ$, από το Θεώρημα του Θαλή θα ισχύουν :

$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΘ}{ΑΜ}\overset{(1)}{=}\frac{2}{3} \text{ και } \frac{ΑΕ}{ΕΓ}=\frac{ΑΘ}{ΘΜ}\overset{(2)}{=}2.$$

β) Έχουμε $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{ΑΔ}{9}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow ΑΔ=6$

και

$$\frac{ΑΕ}{ΕΓ}=\frac{2}{1}\Leftrightarrow\frac{ΑΕ+ΕΓ}{ΕΓ}=\frac{2+1}{1}\Leftrightarrow\frac{ΑΓ}{ΕΓ}=\frac{3}{1}\Leftrightarrow\frac{15}{ΕΓ}=\frac{3}{1}\Leftrightarrow ΕΓ=5.$$

GI_V_GEO_2_18984

Θεωρούμε δύο τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$.

α) Να εξετάσετε σε ποιές από τις παρακάτω περιπτώσεις τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$ είναι όμοια και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

i. $ΑΒ=8$, $ΑΓ=12$, $\hat{Α}=35^0$, $ΔΕ=20$, $ΔΖ=30$, $\hat{Δ}=35^0$.

ii. $\hat{Α}=47^0$, $\hat{Β}=38^0$, $\hat{Ε}=47^0$, $\hat{Δ}=95^0$

iii. $ΑΒ=ΑΓ$, $\hat{Α}=\hat{Δ}$, $ΔΕ=ΔΖ$. (Μονάδες 15)

β) Στις περιπτώσεις που το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι όμοιο με το $ΔΕΖ$, να γράψετε τους ίσους λόγους των ομόλογων πλευρών τους. (Μονάδες 10)

Λύση:

α) i. Τα τρίγωνα είναι όμοια γιατί έχουν δύο πλευρές ανάλογες $\frac{AB}{\Delta E}=\frac{A\Gamma}{\Delta Z}=\frac{2}{5}$ και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες.

ii. Από τις γωνίες που δίνονται προκύπτει ότι $\hat{\Gamma}=95^0, \hat{Z}=38^0$, επομένως τα τρίγωνα είναι όμοια γιατί έχουν όλες τις γωνίες τους ίσες μία προς μία.

iii. Τα τρίγωνα είναι ισοσκελή και έχουν ίση τη γωνία της κορυφής, οπότε είναι όμοια.

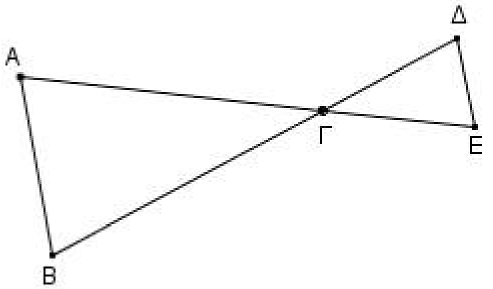
β) i. $\frac{AB}{\Delta E}=\frac{A\Gamma}{\Delta Z}=\frac{B\Gamma}{EZ}$.

ii. $\frac{AB}{EZ}=\frac{A\Gamma}{\Delta E}=\frac{B\Gamma}{\Delta Z}$.

iii. $\frac{AB}{\Delta E}=\frac{A\Gamma}{\Delta Z}=\frac{B\Gamma}{EZ}$.

GI_V_GEO_2_18990

Στο παρακάτω σχήμα τα τμήματα AE και $B\Delta$ τέμνονται στο Γ.



Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $E\Delta\Gamma$ είναι όμοια σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $AB//\Delta E$. (Μονάδες 12)

β) $B\Gamma=2\cdot\Delta\Gamma$ και $E\Gamma=\frac{1}{2}A\Gamma$. (Μονάδες 13)

Λύση:

α) Αφού $AB//\Delta E$ τότε οι γωνίες $A\hat{B}\Gamma$ και $\Gamma\hat{\Delta}E$ είναι ίσες ως εντός εναλλάξ καθώς και οι γωνίες $B\hat{A}\Gamma$ και $\Gamma\hat{E}\Delta$ είναι ίσες και αυτές ως εντός εναλλάξ. Επίσης η γωνία $A\hat{\Gamma}B$ είναι ίση με την γωνία $\Delta\hat{\Gamma}E$ γιατί είναι κατακορυφήν και αφού τα δυο τρίγωνα έχουν και τις τρεις γωνίες ίσες θα είναι όμοια.

β) Έχουμε ότι $ΒΓ=2\cdot ΔΓ$ δηλαδή $\frac{ΔΓ}{ΒΓ}=\frac{1}{2}$ και αφού $\frac{ΕΓ}{ΑΓ}=\frac{1}{2}$, προκύπτει ότι $\frac{ΔΓ}{ΒΓ}=\frac{ΕΓ}{ΑΓ}$.

Τα δύο τρίγωνα έχουν δυο πλευρές ανάλογες και την περιεχόμενη γωνία ίση, αφού $Α\hat{Γ}Β$ ισούται με την $Δ\hat{Γ}Ε$, άρα είναι όμοια.

GI_V_GEO_2_18993

α) Να εξετάσετε αν δύο τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$ είναι όμοια σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) $ΑΓ=4$, $ΒΓ=16$, $ΒΑ=18$, $ΔΖ=10$, $ΕΖ=40$, $ΔΕ=48$.

ii) $\hat{Α}=63^0$, $\hat{Γ}=83^0$, $\hat{Δ}=63^0$, $\hat{Ε}=34^0$. (Μονάδες 15)

β) Έστω τρίγωνο $ΑΒΓ$ με πλευρές $ΑΒ=6$, $ΑΓ=7$ και $ΒΓ=8$. Ποιο θα είναι το μήκος των πλευρών ενός τριγώνου $ΔΕΖ$ το οποίο είναι όμοιο με το τρίγωνο $ΑΒΓ$, με λόγο ομοιότητας 3; (Μονάδες 10)

Λύση:

α) i) Έστω ότι τα τρίγωνα είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $λ>0$.
Είναι $ΑΓ<ΒΓ<ΑΒ \Rightarrow λΑΓ<λΒΓ<λΑΒ$, οπότε οι ομόλογες πλευρές των $ΑΓ, ΒΓ, ΑΒ$ είναι αντίστοιχα οι $ΔΖ, ΕΖ, ΔΕ$.

Όμως $\frac{ΔΖ}{ΑΓ}=\frac{5}{2}$, $\frac{ΕΖ}{ΒΓ}=\frac{5}{2}$, $\frac{ΔΕ}{ΑΒ}=\frac{8}{3}$, άτοπο, άρα δεν είναι όμοια.

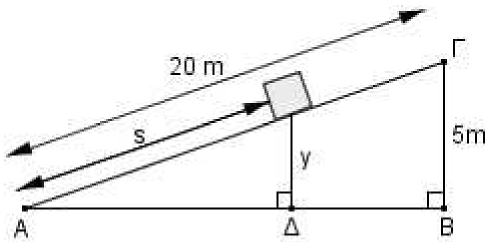
ii) Είναι $\hat{Γ}=180°-\hat{Α}-\hat{Β}=34°$, οπότε τα δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, άρα είναι όμοια.

β) Έστω x, y, z τα μήκη των πλευρών του $ΔΕΖ$ με $x<y<z$.
Αφού το $ΔΕΖ$ είναι όμοιο με το $ΑΒΓ$ με λόγο $λ=3$, θα είναι
$x=3ΑΒ=18$, $y=3ΑΓ=21$, $z=3ΒΓ=24$.

ΣΧΟΛΙΟ:
Θα έπρεπε το ερώτημα (β) να συμπληρωθεί με τη διάταξη των πλευρών του $ΔΕΖ$, για να έχουμε μοναδική απάντηση.

GI_V_GEO_2_18997

Ένας άνθρωπος σπρώχνει ένα κουτί προς τα πάνω στη ράμπα του παρακάτω σχήματος.



α) Να αποδείξετε ότι για το ύψος y, που απέχει το κουτί από το έδαφος κάθε χρονική στιγμή, ισχύει ότι $y=\frac{s}{4}$, όπου s το μήκος που έχει διανύσει το κουτί πάνω στη ράμπα. (Μονάδες 15)

β) Όταν το κουτί απέχει από το έδαφος 2 m, να βρείτε:

i. Το μήκος s που έχει διανύσει το κουτί στη ράμπα. (Μονάδες 3)

ii. Την απόσταση του σημείου Δ από την άκρη της ράμπας Α. (Μονάδες 7)

Λύση:

α) $\frac{y}{5}=\frac{s}{A\Gamma}\Leftrightarrow y=\frac{5s}{20}\Leftrightarrow y=\frac{s}{4}$.

β) i. $s=4y\overset{y=2}{\Leftrightarrow}s=8m$.

ii. Από Πυθαγόρειο θεώρημα: $A\Delta^2=s^2-y^2=8^2-2^2=60\Leftrightarrow A\Delta=2\sqrt{15}m$.

GI_V_GEO_2_19001

Τα μήκη των πλευρών τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $\alpha=8$, $\beta=6$ και $\gamma=5$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο. (Μονάδες 11)

β) Να υπολογίσετε τις προβολές της πλευράς AB στις πλευρές $A\Gamma$ και $B\Gamma$. (Μονάδες 14)

Λύση:

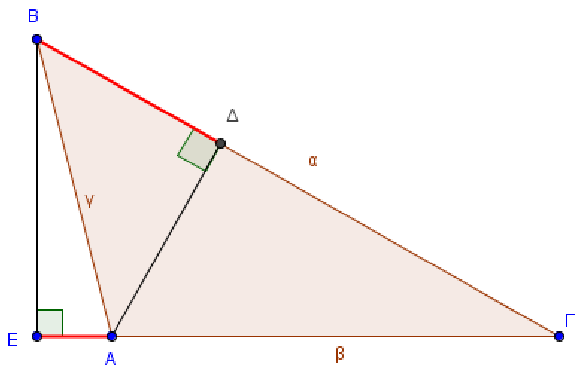
α) Παρατηρούμε ότι $\alpha>\beta>\gamma$

Έχουμε: $\alpha^2=8^2=64$ και

$\beta^2+\gamma^2=6^2+5^2=36+25=61$.

Ισχύει: $\alpha^2>\beta^2+\gamma^2\Leftrightarrow\hat{A}>90°$, οπότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι αμβλυγώνιο.

β) Αρχικά θέλουμε να υπολογίσουμε την προβολή της πλευράς AB πάνω στην $A\Gamma$.
Γι' αυτό θα εφαρμόσουμε το γενικευμένο Πυθαγόρειο θεώρημα για την πλευρά $B\Gamma$, η οποία βρίσκεται απέναντι από την αμβλεία γωνία $\hat{A}$. Αν BE είναι ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$, τότε η ζητούμενη προβολή είναι η AE.



Έχουμε:

$$\hat{A}>90°\Leftrightarrow\alpha^2=\beta^2+\gamma^2+2\beta\cdot AE\Leftrightarrow 64=61+12\cdot AE\Leftrightarrow 3=12\cdot AE\Leftrightarrow AE=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

Αντίστοιχα, για την προβολή της πλευράς AB πάνω στην $B\Gamma$ θα εφαρμόσουμε το γενικευμένο Πυθαγόρειο θεώρημα για την πλευρά $A\Gamma$, η οποία βρίσκεται απέναντι από την οξεία γωνία $\hat{B}$. Αν $A\Delta$ ύψος του τριγώνου, τότε η ζητούμενη προβολή είναι η ΔB.

Έχουμε:

$\hat{B}<90^\circ \Leftrightarrow \beta^2=\alpha^2+\gamma^2-2\alpha\cdot \Delta B \Leftrightarrow 36=64+25-16\cdot \Delta B \Leftrightarrow 36=89-16\cdot \Delta B \Leftrightarrow$

$16\cdot \Delta B=89-36 \Leftrightarrow 16\cdot \Delta B=53 \Leftrightarrow \Delta B=\frac{53}{16}$.

GI_V_GEO_2_19005

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ σε σημείο Δ, τέτοιο ώστε $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}=\frac{3}{4}$.

α) Να αποδείξετε ότι $AB=\frac{3}{4}A\Gamma$. (Μονάδες 12)

β) Αν επιπλέον ισχύει ότι $B\Gamma=\frac{5}{4}A\Gamma$, να εξετάσετε αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

Λύση:

α) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ η $A\Delta$ είναι εσωτερική διχοτόμος.
Άρα ισχύει η αναλογία $\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma}$.

Επομένως, $\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{3}{4} \Leftrightarrow AB=\frac{3}{4}A\Gamma$.

β) Από τη σχέση $AB=\frac{3}{4}A\Gamma$ προκύπτει ότι $AB<A\Gamma$.

Από τη σχέση $B\Gamma=\frac{5}{4}A\Gamma$ προκύπτει ότι $B\Gamma>A\Gamma$.

Άρα $AB<A\Gamma<B\Gamma$, δηλ. η $B\Gamma$ είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου $AB\Gamma$.
Υπολογίζουμε λοιπόν

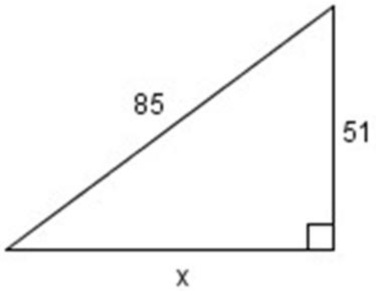
- $B\Gamma^2=\left(\frac{5}{4}A\Gamma\right)^2=\frac{25}{16}A\Gamma^2$ και
- $AB^2+A\Gamma^2=\left(\frac{3}{4}A\Gamma\right)^2+A\Gamma^2=\frac{9}{16}A\Gamma^2+A\Gamma^2=\frac{9}{16}A\Gamma^2+\frac{16}{16}A\Gamma^2=\frac{25}{16}A\Gamma^2$

Άρα $B\Gamma^2=AB^2+A\Gamma^2$, οπότε σύμφωνα με το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\hat{A}=90^0$.

GI_V_GEO_2_19008

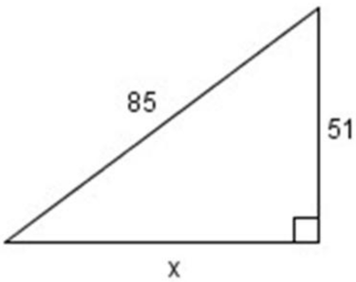
α) Ποιες από τις παρακάτω τριάδες θετικών αριθμών μπορούν να θεωρηθούν μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

i. $3, 4, 5$.
ii. 3λ, 4λ, 5λ ($\lambda > 0$).
iii. 4, 5, 6. (Μονάδες18)
β) Στο παρακάτω ορθογώνιο τρίγωνο να αποδείξετε ότι, το μήκος x είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 4. (Μονάδες 7)



Λύση:

α) i. Αρχικά ελέγχουμε αν υπάρχει τρίγωνο με μήκη πλευρών 3, 4 και 5 αντίστοιχα.
Για το λόγο αυτό αρκεί να εξετάσουμε αν ικανοποιείται η τριγωνική ανισότητα για την πλευρά με το μεγαλύτερο μήκος, δηλαδή για την πλευρά με μήκος 5.
Παρατηρούμε ότι: $|4-3|<5<4+3 \Leftrightarrow 1<5<7$ που ισχύει. Επομένως υπάρχει τρίγωνο με μήκη πλευρών 3,4 και 5.



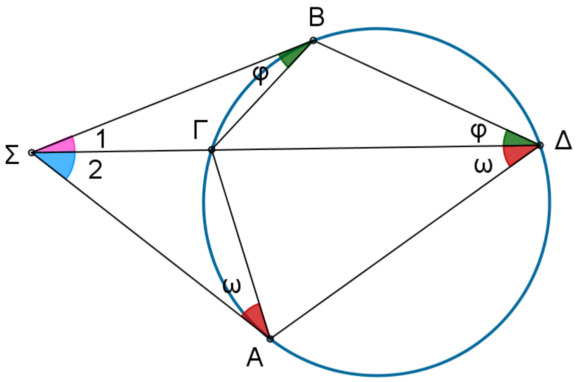
Στη συνέχεια εξετάζουμε αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
Έχουμε: $5^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow 25 = 9 + 16 \Leftrightarrow 25 = 25$, οπότε σύμφωνα με το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος, το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα μήκους 5.
ii. Αντίστοιχα: $|4\lambda-3\lambda|<5\lambda<4\lambda+3\lambda \Leftrightarrow \lambda<5\lambda<7\lambda,\ \lambda>0$ που ισχύει.
Άρα υπάρχει τρίγωνο με μήκη πλευρών $3\lambda, 4\lambda$ και 5λ.
Επιπλέον: $(5\lambda)^2 = (3\lambda)^2 + (4\lambda)^2 \Leftrightarrow 25\lambda^2 = 9\lambda^2 + 16\lambda^2 \Leftrightarrow 25\lambda^2 = 25\lambda^2$, επομένως το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα μήκους 5λ.
iii) Όμοια: $|5-4|<6<5+4 \Leftrightarrow 1<6<9$ που ισχύει. Εξετάζουμε αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
Παρατηρούμε ότι: $6^2 = 36$, ενώ $4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$, άρα: $6^2 \neq 4^2 + 5^2$, οπότε το τρίγωνο δεν είναι ορθογώνιο.

β) Με εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο έχουμε:
$x^2 + 51^2 = 85^2 \Leftrightarrow x^2 = 85^2 - 51^2 = (85-51)(85+51) = 34\cdot 136 = 34\cdot 4\cdot 34 = 4\cdot 34^2 = \pi o\lambda 4$.

GI_V_GEO_2_19011

Από ένα σημείο Σ που βρίσκεται έξω από έναν δοσμένο κύκλο φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΣΑ και ΣΒ και μία τέμνουσα ΣΓΔ. Να αποδείξετε ότι:
α) i. Τα τρίγωνα ΣΒΓ και ΣΔΒ είναι όμοια.
ii. Τα τρίγωνα ΣΑΓ και ΣΔΑ είναι όμοια. (Μονάδες 16)
β) ΑΓ·ΒΔ=ΑΔ·ΒΓ (Μονάδες 9)

Λύση:



α) i. Τα τρίγωνα $ΣΒΓ$ και $ΣΔΒ$ είναι όμοια γιατί έχουν τη γωνία $\hat{Σ}_1$ κοινή και $Β\hat{Δ}Σ = Γ\hat{Β}Σ = φ$ (σχέση γωνίας χορδής κι εφαπτομένης με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο ίδιο τόξο).

ii. Για τον ίδιο λόγο τα τρίγωνα $ΣΑΓ$ και $ΣΔΑ$ είναι όμοια ($\hat{Σ}_2$ κοινή και $Α\hat{Δ}Σ = Γ\hat{Α}Σ = ω$).

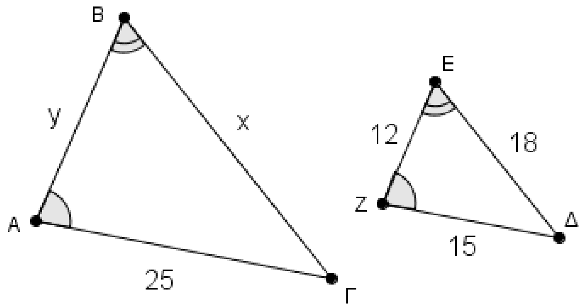
β) Είναι $ΣΑ = ΣΒ$ (εφαπτόμενα τμήματα).
Από τις παραπάνω ομοιότητες των τριγώνων, έχουμε:

$$\frac{ΒΓ}{ΒΔ} = \frac{ΣΓ}{ΣΒ} = \frac{ΣΓ}{ΣΑ} \quad \text{και} \quad \frac{ΑΓ}{ΑΔ} = \frac{ΣΓ}{ΣΑ}.$$

Άρα: $\dfrac{ΒΓ}{ΒΔ} = \dfrac{ΑΓ}{ΑΔ} \Leftrightarrow ΑΓ \cdot ΒΔ = ΑΔ \cdot ΒΓ$.

GI_V_GEO_2_19014

Τα παρακάτω τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$ έχουν $\hat{Α} = \hat{Ζ}$, $\hat{Β} = \hat{Ε}$ και $ΑΓ = 25$, $ΕΖ = 12$, $ΕΔ = 18$ και $ΖΔ = 15$.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$ είναι όμοια. (Μονάδες 8)

β) Να συμπληρώσετε την ισότητα των λόγων με τις κατάλληλες πλευρές του τριγώνου ΔΕΖ:

$$\frac{ΒΑ}{\dots} = \frac{ΑΓ}{\dots} = \frac{ΓΒ}{\dots}$$ (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τα x και y. (Μονάδες 8)

Λύση:

α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι όμοια γιατί έχουν δύο γωνίες τους ($\hat{A}=\hat{Z}$ και $\hat{B}=\hat{E}$) μία προς μία ίσες.

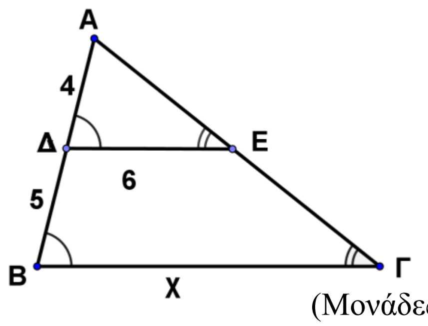
β) Επομένως θα έχουν τις αντίστοιχες (ομόλογες) πλευρές τους ανάλογες: $\frac{BA}{ZE}=\frac{A\Gamma}{Z\Delta}=\frac{\Gamma B}{E\Delta}$ (1).

γ) Από την σχέση (1) αντικαθιστώντας $\frac{y}{12}=\frac{x}{18}=\frac{25}{15}$.

- $\frac{y}{12}=\frac{25}{15}\Leftrightarrow\frac{y}{12}=\frac{5}{3}\Leftrightarrow 3y=60\Leftrightarrow y=\frac{60}{3}=20$.
- $\frac{x}{18}=\frac{25}{15}\Leftrightarrow\frac{x}{18}=\frac{5}{3}\Leftrightarrow 3x=90\Leftrightarrow x=30$.

GI_V_GEO_2_19015

Στο σχήμα που ακολουθεί, το τμήμα ΔE είναι παράλληλο στην πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ και επιπλέον ισχύουν $A\Delta=4$, $\Delta B=5$ και $\Delta E=6$.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι όμοια. (Μονάδες 9)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) να συμπληρώσετε τα κενά στην ισότητα:

$\frac{AB}{\dots}=\frac{\dots}{\Delta E}=\frac{A\Gamma}{\dots}$ (Μονάδες 9)

γ) Ένας μαθητής χρησιμοποιεί την αναλογία $\frac{4}{6}=\frac{5}{x}$ για να υπολογίσει το x.

Να εξηγήσετε γιατί αυτή η αναλογία είναι λάθος, να γράψετε τη σωστή και να υπολογίσετε την τιμή του x. (Μονάδες 7)

Λύση:

α) Ισχύει ότι $\Delta E//B\Gamma$. Συνεπώς $\hat{B}=\hat{\Delta}$ και $\hat{\Gamma}=\hat{E}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά.
Έτσι τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια αφού έχουν τις γωνίες μία προς μία ίσες.

β) Αφού τα τρίγωνα είναι όμοια θα έχουν τις ομόλογες πλευρές της ανάλογες:

Δηλαδή $\frac{AB}{A\Delta}=\frac{B\Gamma}{\Delta E}=\frac{A\Gamma}{AE}$.

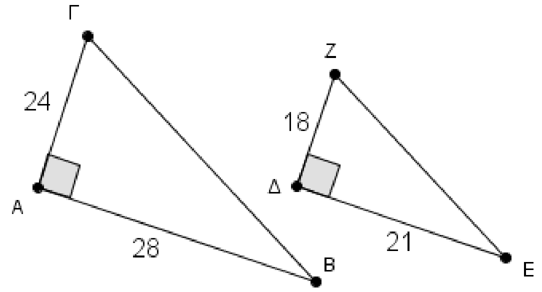
γ) Είναι λάθος, γιατί το τμήμα με μήκος 5 δεν είναι πλευρά κανενός τριγώνου.

Η σωστή αναλογία θα ήταν $\frac{ΑΔ}{ΔΕ}=\frac{ΑΒ}{ΒΓ} \Leftrightarrow \frac{4}{6}=\frac{9}{x} \Leftrightarrow 4x=36 \Leftrightarrow x=9$.

GI_V_GEO_2_19017

Τα παρακάτω τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$ είναι ορθογώνια με ορθές τις γωνίες $\hat{Α}$ και $\hat{Δ}$ αντίστοιχα. Επιπλέον, για τις πλευρές των τριγώνων $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$ αντίστοιχα ισχύουν $ΑΒ=28$, $ΑΓ=24$ και $ΔΕ=21$, $ΔΖ=18$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$ είναι όμοια. (Μονάδες 10)



β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) να συμπληρώσετε κατάλληλα τα κενά:

$\frac{ΑΒ}{\ldots}=\frac{\ldots}{ΕΖ}=\frac{ΑΓ}{\ldots}$ (Μονάδες 9)

γ) Από τις παρακάτω ισότητες να επιλέξετε τη σωστή.

i. $ΖΕ=\frac{18}{21}ΓΒ$ **ii.** $ΖΕ=\frac{24}{28}ΓΒ$ **iii.** $ΖΕ=\frac{3}{4}ΓΒ$ **iv.** $ΖΕ=\frac{4}{3}ΓΒ$. (Μονάδες 6)

Λύση:

α) Είναι $\frac{ΑΒ}{ΔΕ}=\frac{28}{21}=\frac{4}{3}$ και $\frac{ΑΓ}{ΔΖ}=\frac{21}{18}=\frac{4}{3}$. Άρα οι πλευρές $ΑΒ$ και $ΑΓ$ του τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι ανάλογες με τις πλευρές $ΔΕ$ και $ΔΖ$, αντίστοιχα του τριγώνου $ΔΕΖ$.

Επίσης έχουν $\hat{Α}=\hat{Δ}=90^o$.

Οπότε τα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$ έχουν δυο αντίστοιχες πλευρές τους ανάλογες και τις περιεχόμενες (στις πλευρές αυτές) γωνίες ίσες. Άρα είναι όμοια.

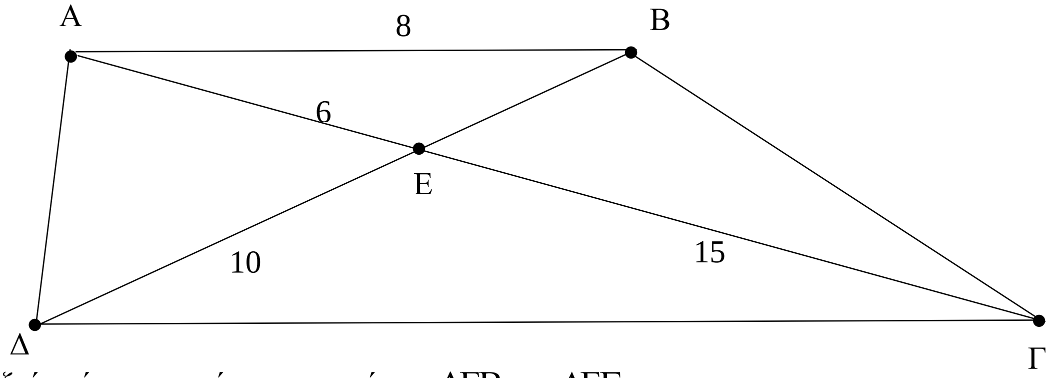
β) Αφού (από α ερώτημα) τα τρίγωνα είναι όμοια οι αντίστοιχες (ομόλογες) πλευρές τους είναι ανάλογες. Άρα $\frac{ΑΒ}{ΔΕ}=\frac{ΒΓ}{ΕΖ}=\frac{ΑΓ}{ΔΖ}=\frac{4}{3}$.

γ) Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $λ=\frac{4}{3}$.

Άρα έχουμε $\frac{ΒΓ}{ΕΖ}=\frac{4}{3} \Leftrightarrow ΖΕ=\frac{3}{4}ΓΒ$. Δηλαδή σωστό είναι το (iii).

GI_V_GEO_2_19019

Στο σχήμα που ακολουθεί ισχύουν $AB//\Delta\Gamma$, $AE=6$, $AB=8$, $\Gamma E=15$ και $\Delta E=10$.



α) Να βρείτε δυο ζεύγη ίσων γωνιών των τριγώνων AEB και $\Delta E\Gamma$.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AEB και $\Delta E\Gamma$ είναι όμοια και να γράψετε την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών τους. (Μονάδες 9)
γ) Να υπολογίσετε τα τμήματα BE και $\Delta\Gamma$. (Μονάδες 8)

Λύση:

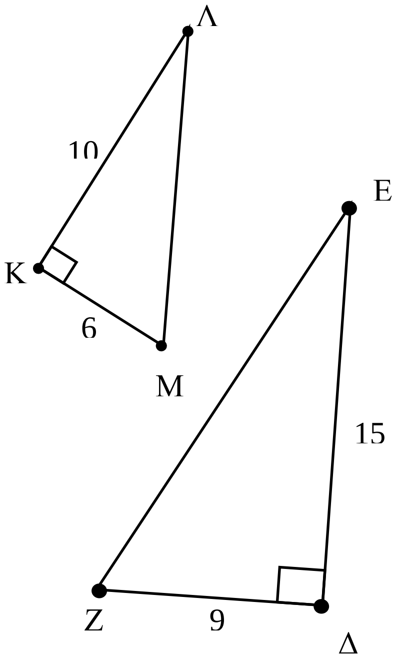
α) Είναι $E\hat{A}B=E\hat{\Gamma}\Delta$ και $E\hat{B}A=E\hat{\Delta}\Gamma$ και στις δύο περιπτώσεις ως εντός εναλλάξ των παράλληλων ευθειών AB, $\Gamma\Delta$.
β) Αφού τα τρίγωνα AEB και $\Delta E\Gamma$ έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, είναι όμοια, οπότε ισχύει: $\frac{AB}{\Delta\Gamma}=\frac{BE}{\Delta E}=\frac{AE}{\Gamma E}$.
γ) $\frac{BE}{\Delta E}=\frac{AE}{\Gamma E}\Leftrightarrow\frac{BE}{10}=\frac{6}{15}\Leftrightarrow 15\cdot BE=6\cdot 10\Leftrightarrow BE=4$.

και $\frac{AB}{\Delta\Gamma}=\frac{AE}{\Gamma E}\Leftrightarrow\frac{8}{\Delta\Gamma}=\frac{6}{15}\Leftrightarrow 6\cdot\Delta\Gamma=8\cdot 15\Leftrightarrow\Delta\Gamma=20$.

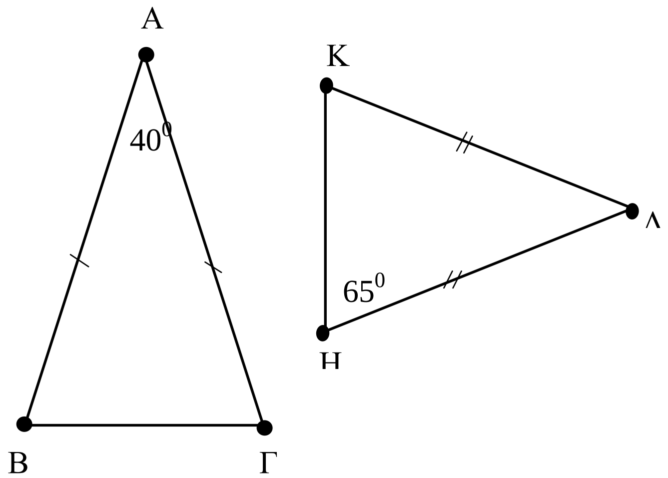
GI_V_GEO_2_19021

Να χρησιμοποιήσετε τις πληροφορίες που σας δίνονται για το κάθε ζεύγος τριγώνων των παρακάτω σχημάτων, προκειμένου να απαντήσετε στα ακόλουθα:
α) Ποιο από τα παρακάτω ζεύγη τριγώνων είναι όμοια και ποιο δεν είναι; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 14)
β) Για το ζεύγος των όμοιων τριγώνων του προηγούμενου ερωτήματος,
i. να γράψετε την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών. (Μονάδες 6)
ii. να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους. (Μονάδες 5)

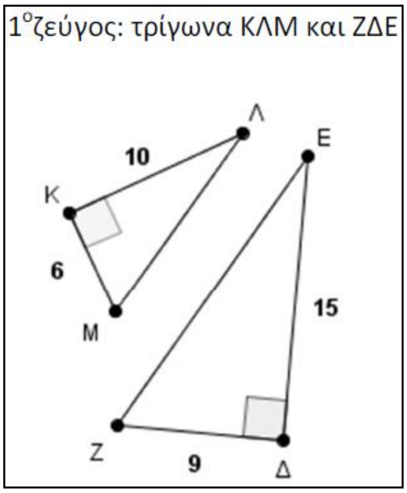
1ο ζεύγος: τρίγωνα ΚΛΜ και ΖΔΕ



2ο ζεύγος: τρίγωνα ΑΒΓ και ΗΚΛ



Λύση:

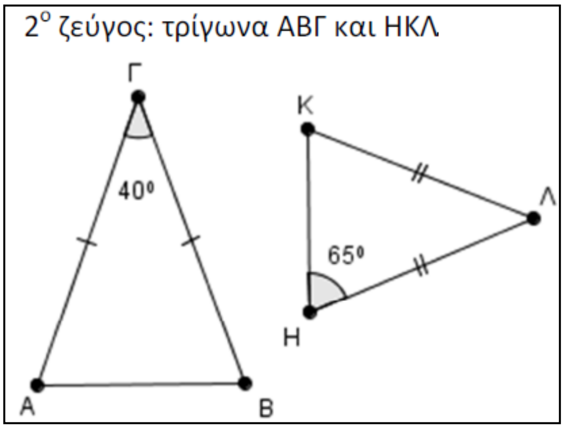


α) Στο 1ο ζευγάρι ορθογωνίων τριγώνων ισχύει:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{ΚΛ}{ΕΔ}=\dfrac{10}{15}=\dfrac{2}{3} \\ \text{και} \\ \dfrac{ΚΜ}{ΖΔ}=\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{ΚΛ}{ΕΔ}=\dfrac{ΚΜ}{ΖΔ}.$$

Επομένως από το 2ο κριτήριο ομοιότητας, τα ορθογώνια τρίγωνα, είναι όμοια.

Στο 2^o ζευγάρι ισοσκελών τριγώνων έχουμε: $\hat{A}=\hat{B}=\dfrac{180^0-40^0}{2}=\dfrac{140^0}{2}=70^0$ και



$\hat{K}=\hat{H}=65^0$, οπότε

$\hat{\Lambda}=180^0-2\cdot 65^0=180^0-130^0=50^0$.

Συνεπώς, τα τρίγωνα δεν έχουν γωνίες ίσες , οπότε δεν είναι όμοια.

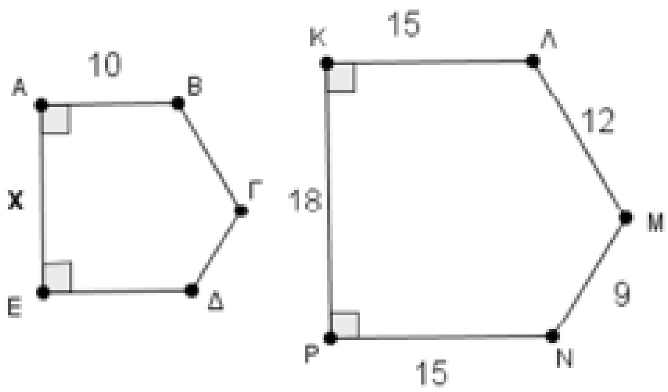
β) i. Για τα όμοια τρίγωνα (1^o ζευγάρι) έχουμε: $\dfrac{K\Lambda}{E\Delta}=\dfrac{KM}{Z\Delta}=\dfrac{\Lambda M}{EZ}$

ii. Προφανώς, ο λόγος ομοιότητας των $K\Lambda M$, $ZE\Delta$ είναι: $\lambda=\dfrac{2}{3}$.

GI_V_GEO_2_19023

Στο παρακάτω σχήμα, τα πολύγωνα $AB\Gamma\Delta E$ και $K\Lambda MNP$ είναι όμοια και έχουν $\hat{\Delta}=\hat{N}$ και $\hat{B}=\hat{\Lambda}$.

α) Να προσδιορίσετε το λόγο ομοιότητάς τους. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)
β) Να υπολογίσετε το μήκος x της πλευράς AE. (Μονάδες 8)
γ) Να βρείτε την περίμετρο του πολυγώνου $AB\Gamma\Delta E$. (Μονάδες 9)



Λύση:

α) Οι πλευρές AB, $K\Lambda$ είναι ομόλογες αφού $\hat{A}=\hat{K}=90^o$ και $\hat{B}=\hat{\Lambda}$.

Άρα ο λόγος ομοιότητας του πολυγώνου $AB\Gamma\Delta E$ προς το πολύγωνο $K\Lambda MNP$ είναι $\lambda=\frac{AB}{K\Lambda}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$.

β) Οι πλευρές AE, KP είναι ομόλογες (έχουν προσκείμενες τις ορθές γωνίες), οπότε $\lambda=\frac{AE}{KP}\Leftrightarrow\frac{2}{3}=\frac{x}{18}\Leftrightarrow 3x=36\Leftrightarrow x=12$.

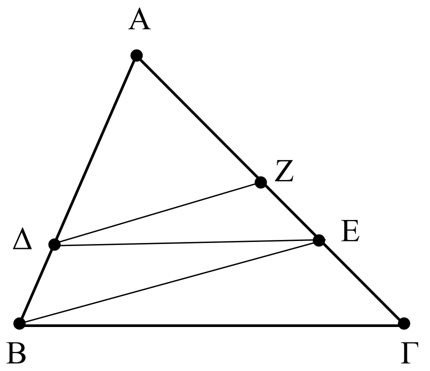
γ) Είναι $\Pi_{K\Lambda MNP}=K\Lambda+\Lambda M+MN+NP+PK=15+12+9+15+18=69$.

Ο λόγος των περιμέτρων των δύο πολυγώνων είναι ίσος με τον λόγο ομοιότητάς τους.

Άρα $\frac{\Pi_{AB\Gamma\Delta E}}{\Pi_{K\Lambda MNP}}=\lambda\Leftrightarrow\frac{\Pi_{AB\Gamma\Delta E}}{69}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\Pi_{AB\Gamma\Delta E}=46$.

GI_V_GEO_2_19024

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος, το τμήμα ΔE είναι παράλληλο στην πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου. Από το σημείο Δ φέρουμε την παράλληλη προς τη BE η οποία τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο Z. Να αποδείξετε ότι:



α) $\frac{AE}{A\Delta}=\frac{A\Gamma}{AB}$ (Μονάδες 10)

β) $\frac{AZ}{A\Delta}=\frac{AE}{AB}$ (Μονάδες 10)

γ) $\frac{AE}{A\Gamma}=\frac{AZ}{AE}$ (Μονάδες 5)

Λύση:

α) Είναι $\Delta E//B\Gamma$.

Από πόρισμα Θ. Θαλή στο τρίγωνο $AB\Gamma$ παίρνουμε:

$$\frac{A\Delta}{AB}=\frac{AE}{A\Gamma}\Leftrightarrow\frac{AE}{A\Delta}=\frac{A\Gamma}{AB}\quad(1).$$

β) Είναι $\Delta Z//BE$. Από πόρισμα Θ. Θαλή στο τρίγωνο ABE παίρνουμε:

$$\frac{A\Delta}{AB}=\frac{AZ}{AE}\Leftrightarrow\frac{AE}{AB}=\frac{AZ}{A\Delta}\quad(2).$$

γ) Από τις σχέσεις (1), (2) και τους τονισμένους λόγους παίρνουμε: $\frac{AE}{A\Gamma}=\frac{AZ}{AE}$.

GI_V_GEO_2_19026

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τυχαίο σημείο Δ στην πλευρά $B\Gamma$. Φέρνουμε από το σημείο Δ παράλληλες στις πλευρές $A\Gamma$ και AB που τέμνουν αντίστοιχα τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία E και Z. Να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{\Delta E}{A\Gamma}=\dfrac{B\Delta}{B\Gamma}$ (Μονάδες 10)

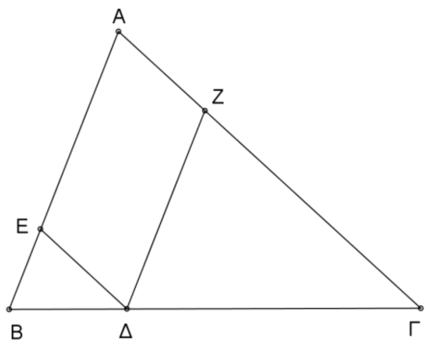
β) $\dfrac{Z\Delta}{AB}=\dfrac{\Delta\Gamma}{B\Gamma}$ (Μονάδες 10)

γ) $\dfrac{\Delta E}{A\Gamma}+\dfrac{Z\Delta}{AB}=1$ (Μονάδες 5)

Λύση:

α) $\Delta E \parallel A\Gamma$, άρα τα τρίγωνα $B\Delta E, B\Gamma A$ είναι όμοια: $\dfrac{\Delta E}{A\Gamma}=\dfrac{B\Delta}{B\Gamma}$.

β) $\Delta Z // AB$, άρα τα τρίγωνα $\Gamma\Delta Z, \Gamma BA$ είναι όμοια:
$\dfrac{\Delta Z}{AB}=\dfrac{\Gamma\Delta}{B\Gamma}$.



γ) Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο παραπάνω σχέσεις:

$$\frac{\Delta E}{A\Gamma}+\frac{Z\Delta}{AB}=\frac{B\Delta}{B\Gamma}+\frac{\Delta\Gamma}{B\Gamma}=\frac{B\Gamma}{B\Gamma}=1.$$

GI_V_GEO_2_19028

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB//\Gamma\Delta$) και BE το ύψος του. Αν είναι $AB=3$, $\Gamma\Delta=7$ και $B\Gamma=4$, τότε,

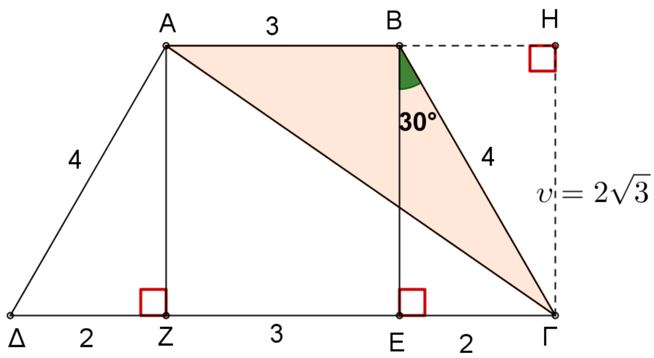
α) να αποδείξετε ότι $BE=2\sqrt{3}$. (Μονάδες 13)

β) να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 12)

Λύση:

α) Φέρνω και το άλλο ύψος AZ του τραπεζίου. Είναι $ZE=AB=3$, άρα $\Delta Z=E\Gamma=2$.
Από Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $EB\Gamma$ έχουμε:
$BE^2=B\Gamma^2-E\Gamma^2=16-4=12 \Leftrightarrow BE=2\sqrt{3}$.

β)
Το τρίγωνο $AB\Gamma$, έχει βάση $AB=3$ και ύψος
$\Gamma H=2\sqrt{3}$, οπότε $(AB\Gamma)=\dfrac{1}{2}AB\cdot\Gamma H=3\sqrt{3}$



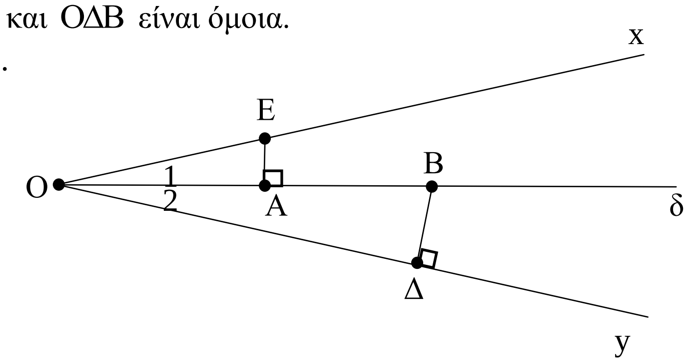
Β τρόπος
Στο ορθογώνιο τρίγωνο $EB\Gamma$, είναι
$E\Gamma=\dfrac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow E\hat{B}\Gamma=30^0 \Rightarrow A\hat{B}\Gamma=120^0$ Άρα:
$(AB\Gamma)=\dfrac{1}{2}AB\cdot B\Gamma\cdot \eta\mu 120^0=6\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$.

GI_V_GEO_2_19030

Στη διχοτόμο $O\delta$ της γωνίας $x\hat{O}y$ θεωρούμε τα σημεία A, B τέτοια ώστε $OB = 2\cdot OA$. Η κάθετος στην $O\delta$ στο σημείο A τέμνει την πλευρά Ox στο σημείο E και έστω Δ η προβολή του B στην Oy. Να αποδείξετε ότι:

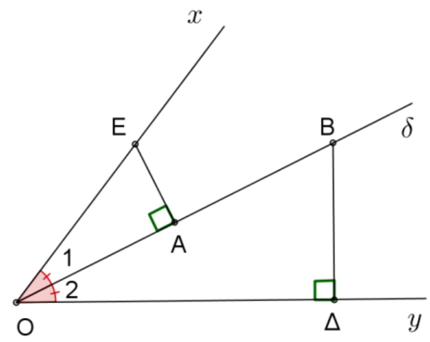
α) Τα τρίγωνα OAE και $O\Delta B$ είναι όμοια. (Μονάδες 10)

β) $2\cdot OA^2 = O\Delta \cdot OE$. (Μονάδες 15)



Λύση:

α) Τα τρίγωνα OAE και $O\Delta B$ είναι ορθογώνια και έχουν τις γωνίες $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ (Η $O\delta$ διχοτόμος).
Άρα είναι όμοια.



β) Αφού είναι όμοια έχουν τις πλευρές ανάλογες, άρα

$$\frac{OE}{OB} = \frac{OA}{O\Delta} \Leftrightarrow OA\cdot OB = OE\cdot O\Delta \Leftrightarrow 2OA^2 = OE\cdot O\Delta.$$

GI_V_GEO_2_19031

Στο κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του παρακάτω σχήματος, η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ είναι παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$ και τέμνει τη ΔB στο E και τη $\Delta\Gamma$ στο Z. Αν $A\Delta = 12$, $AB = 8$, $\Delta E = 9$ και $Z\Gamma = 6$, να αποδείξετε ότι:

α) $EB = 6$ (Μονάδες 13)

β) $\Delta Z = 9$ (Μονάδες 12)

Λύση:

α) Στο τρίγωνο $AB\Delta$ η AE είναι εσωτερική διχοτόμος.

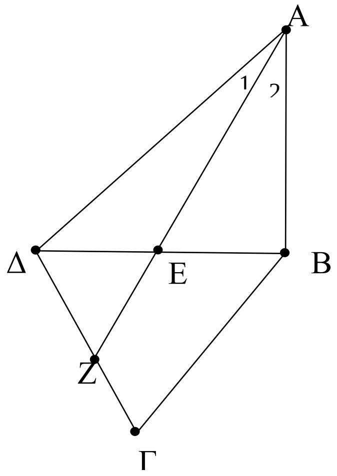
Άρα ισχύει η αναλογία $\frac{AB}{A\Delta}=\frac{EB}{E\Delta}\Leftrightarrow\frac{8}{12}=\frac{EB}{9}$.

Απλοποιώντας το πρώτο κλάσμα η αναλογία γράφεται $\frac{2}{3}=\frac{EB}{9}$.

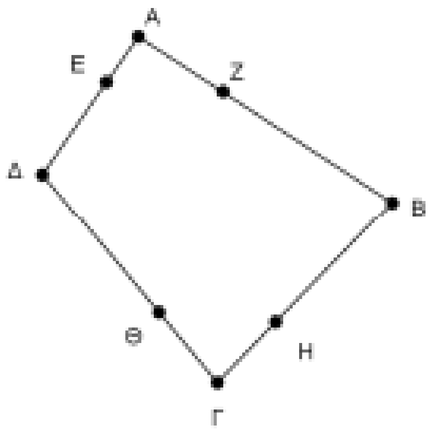
Πολλαπλασιάζουμε χιαστί και έχουμε $3\cdot EB=18\Leftrightarrow EB=6$.

β) Στο τρίγωνο $\Delta B\Gamma$ έχουμε $ZE//B\Gamma$ οπότε από το Θεώρημα Θαλή έχουμε $\frac{\Delta E}{EB}=\frac{\Delta Z}{Z\Gamma}\Leftrightarrow\frac{9}{6}=\frac{\Delta Z}{6}$.

Άρα απλοποιώντας τους παρονομαστές έχουμε $\Delta Z=9$.



GI_V_GEO_2_19033



Δίνεται κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και τα σημεία E, Z, H και Θ των πλευρών του $A\Delta$, AB, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα τέτοια, ώστε $\frac{AE}{A\Delta}=\frac{AZ}{AB}=\frac{\Gamma H}{\Gamma B}=\frac{\Gamma\Theta}{\Gamma\Delta}=\frac{1}{3}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $EZ//\Theta H//\Delta B$. (Μονάδες 10)

β) $EZ=\Theta H=\frac{1}{3}\Delta B$ (Μονάδες 10)

γ) το $EZH\Theta$ παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 5)

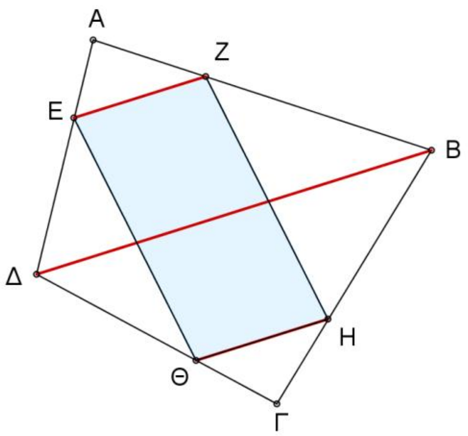
Λύση:

α) $\frac{AE}{A\Delta}=\frac{AZ}{AB}\Leftrightarrow EZ\parallel\Delta B$ και $\frac{\Gamma H}{\Gamma B}=\frac{\Gamma\Theta}{\Gamma\Delta}\Leftrightarrow\Theta H\parallel\Delta B$

β) Τα τρίγωνα $AEZ, A\Delta B$ είναι όμοια, καθώς επίσης και τα $\Gamma H\Theta, \Gamma B\Delta$. Άρα έχουμε:

$\frac{EZ}{\Delta B}=\frac{1}{3}$ και $\frac{\Theta H}{\Delta B}=\frac{1}{3}$, οπότε $EZ=\Theta H=\frac{1}{3}\Delta B$.

γ) $EZ//=\Theta H$, άρα το $EZH\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο.



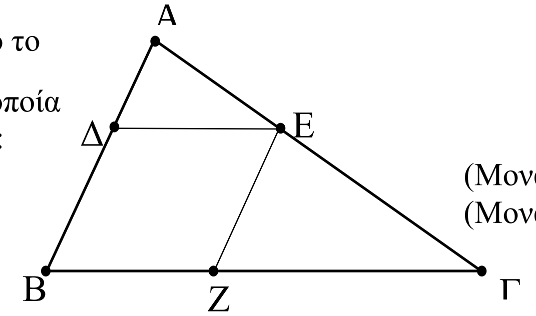
ΣΧΟΛΙΟ:
Το (γ) ερώτημα, κατά τη γνώμη μου, δεν χρειαζόταν.

GI_V_GEO_2_19035

Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ και τα σημεία $Δ$ και $Ε$ των πλευρών $ΑΒ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα ώστε $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\frac{1}{3}$. Από το σημείο $Ε$ φέρνουμε παράλληλη προς την $ΑΒ$, η οποία τέμνει την $ΒΓ$ στο σημείο $Ζ$. Να αποδείξετε ότι :

α) Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΑΔΕ$ είναι όμοια. (Μονάδες 10)

β) $3\cdot ΒΖ=ΒΓ$. (Μονάδες 15)



Λύση:

α) Είναι $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}$ (1) και

$\hat{Α}$ κοινή των τριγώνων $ΑΒΓ$ και $ΑΔΕ$ (2).

Άρα τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΑΔΕ$ είναι όμοια ($2^{ο}$ κριτήριο ομοιότητας).

β) Από την ομοιότητα των τριγώνων $ΑΒΓ$ και $ΑΔΕ$ έχουμε τους ίσους λόγους:

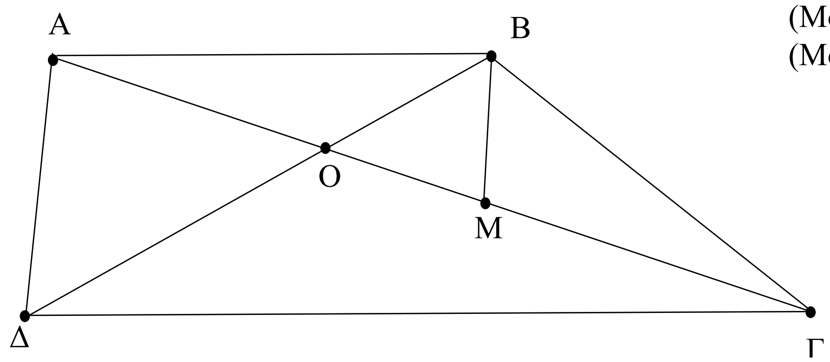
$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\frac{ΔΕ}{ΒΓ}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{ΔΕ}{ΒΓ}=\frac{1}{3}\Rightarrow 3ΔΕ=ΒΓ$$

GI_V_GEO_2_19036

Οι διαγώνιοι του τραπεζίου $ΑΒΓΔ$ ($ΑΒ//ΓΔ$) με $ΓΔ>ΑΒ$ τέμνονται στο $Ο$. Η παράλληλη από το $Β$ προς την $ΑΔ$ τέμνει την $ΑΓ$ στο $Μ$. Αν $ΟΑ=12$, $ΟΒ=9$ και $ΟΓ=36$, να αποδείξετε ότι:

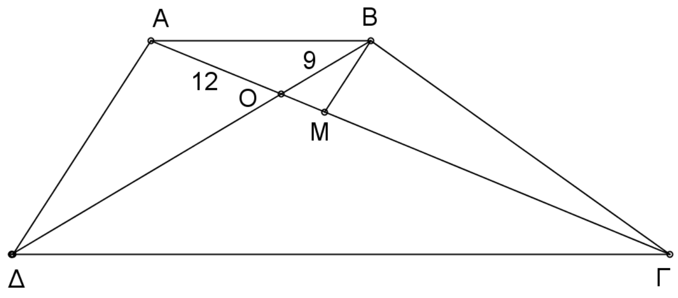
α) $ΟΔ=27$ (Μονάδες 12)

β) $ΟΜ=4$ (Μονάδες 13)



Λύση:

α) $ΑΒ\parallel ΓΔ\Rightarrow\frac{ΟΑ}{ΟΒ}=\frac{ΟΓ}{ΟΔ}\Leftrightarrow\frac{12}{9}=\frac{36}{ΟΔ}\Leftrightarrow ΟΔ=\frac{9\cdot 36}{12}\Leftrightarrow ΟΔ=27$.



β) $BM \parallel A\Delta \Rightarrow \frac{OA}{O\Delta} = \frac{OM}{OB} \Leftrightarrow \frac{12}{27} = \frac{OM}{9} \Leftrightarrow OM = \frac{9 \cdot 12}{27} \Leftrightarrow OM = 4$.

GI_V_GEO_2_19038

Σε ημικύκλιο διαμέτρου AB κέντρου O θεωρούμε σημείο του Δ. Η χορδή ΔB τέμνει το ημικύκλιο διαμέτρου OB στο Γ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $O\Gamma B$ είναι όμοια. (Μονάδες 12)

β) $(A\Delta B) = 4 \cdot (O\Gamma B)$ (Μονάδες 13)

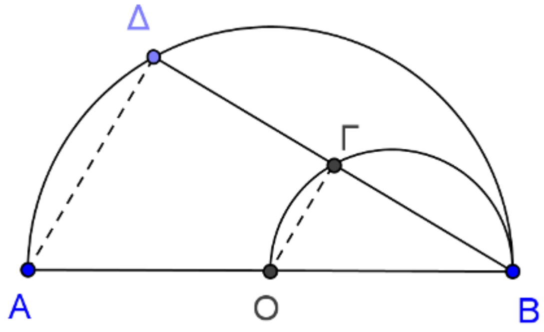
Λύση:

α) Τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $O\Gamma B$ έχουν:

1. $A\hat{\Delta}B = O\hat{\Gamma}B = 90^\circ$ (ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ημικύκλιο)

2. $\Gamma\hat{B}O$ κοινή γωνία

Άρα τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $O\Gamma B$ είναι όμοια.



β) Τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $O\Gamma B$ είναι όμοια, με λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{AB}{OB}$.

Όμως η AB είναι διάμετρος, ενώ η OB ακτίνα του ίδιου κύκλου.

Άρα, $AB = 2 \cdot OB$, οπότε $\lambda = \frac{AB}{OB} = \frac{2OB}{OB} = 2$.

Αλλά, ο λόγος των εμβαδών των δύο όμοιων τριγώνων θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, δηλ. $\frac{(A\Delta B)}{(O\Gamma B)} = \lambda^2 = 4$.

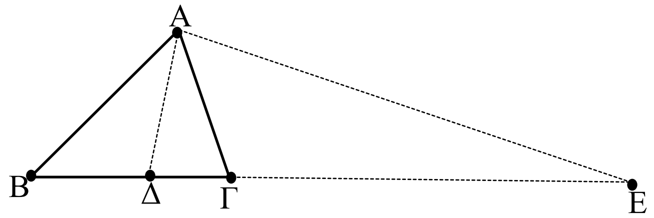
Επομένως, $(A\Delta B) = 4(O\Gamma B)$.

GI_V_GEO_2_19040

Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($ΑΒ > ΑΓ$) και $ΑΔ$, $ΑΕ$ η εσωτερική και η εξωτερική διχοτόμος του αντίστοιχα. Αν είναι $ΑΒ = 6$, $ΔΒ = 3$, $ΒΓ = 5$ και $ΒΕ = 15$, να αποδείξετε ότι:

α) $ΑΓ = 4$ (Μονάδες 12)

β) $ΔΕ = 12$ (Μονάδες 13)



Λύση:

α) Ισχύει $ΔΓ = ΒΓ - ΒΔ = 5 - 3 = 2$. (1).

Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ η $ΑΔ$ είναι εσωτερική διχοτόμος.

Άρα ισχύει η αναλογία $\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{ΔΒ}{ΔΓ} \Leftrightarrow \frac{6}{ΑΓ} = \frac{3}{2}$.

Πολλαπλασιάζουμε χιαστί και έχουμε $3ΑΓ = 12 \Leftrightarrow ΑΓ = 4$.

β) Ισχύει $ΓΕ = ΒΕ - ΒΓ = 15 - 5 = 10$ (2).

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $ΔΕ = ΔΓ + ΓΕ = 2 + 10 = 12$.

GI_V_GEO_2_19041

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($\hat{Α} = 90^0$) με ύψος $ΑΔ$ και $ΑΓ = 8$, $ΔΓ = \frac{32}{5}$. Να υπολογίσετε τα μήκη των παρακάτω τμημάτων:

α) $ΒΓ$. (Μονάδες 9)

β) $ΑΒ$. (Μονάδες 8)

γ) $ΑΔ$. (Μονάδες 8)

Λύση:

α) Ισχύει ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο μιας καθέτου πλευράς ισούται με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πάνω σε αυτή. Έτσι προκύπτει ότι

$ΑΓ^2 = ΒΓ \cdot ΔΓ$ επομένως $8^2 = ΒΓ \cdot \frac{32}{5}$, επομένως $5 \cdot 64 = 32 \cdot ΒΓ$, άρα $ΒΓ = 10$.

β) από εφαρμογή του ΠΘ έχουμε ότι $ΑΒ^2 = ΒΓ^2 - ΑΓ^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$,

άρα $ΑΒ = \sqrt{36} = 6$.

γ) Καταρχήν αφού $B\Gamma = 10$ και το $\Delta\Gamma = \frac{32}{5}$, το $\Delta B = B\Gamma - \Delta\Gamma = 10 - \frac{32}{5} = \frac{18}{5}$.

Τέλος σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ισχύει ότι το τετράγωνο του ύψους ισούται με το γινόμενο των προβολών των καθέτων πάνω στη υποτείνουσα . Έτσι έχουμε $A\Delta^2 = \Delta B \cdot \Delta\Gamma$ επομένως

$A\Delta^2 = \frac{32}{5} \cdot \frac{18}{5} = \frac{576}{25}$, άρα $A\Delta = \sqrt{\frac{576}{25}} = \frac{24}{5}$.

GI_V_GEO_2_19042

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $\alpha = 7$, $\beta = 4$ και $\mu_\beta = \sqrt{33}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\gamma = 5$. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς τις γωνίες του. (Μονάδες 12)

Λύση:

α) $\mu_\beta{}^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4} \Leftrightarrow 33 = \frac{98 + 2\gamma^2 - 16}{4} \Leftrightarrow \gamma^2 = 25 \Leftrightarrow \gamma = 5$

β) $\beta^2 + \gamma^2 = 16 + 25 = 41 < 49 = \alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$.

Άρα το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο στη γωνία $\hat{A}$.

GI_V_GEO_2_19043

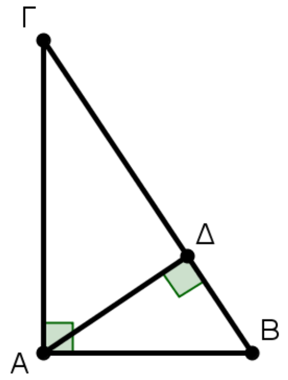
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^0$) με $A\Gamma = 4$ και ύψος $A\Delta = \frac{12}{5}$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος $\Delta\Gamma$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $\Delta B = \frac{9}{5}$. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 5)

Λύση:



α) Εφαρμόζουμε το ΠΘ στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ και έχουμε ότι

$\Delta\Gamma^2 = A\Gamma^2 - A\Delta^2 = 4^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2 = 16 - \frac{144}{25} = \frac{256}{25}$,

επομένως $\Delta\Gamma = \sqrt{\frac{256}{25}} = \frac{16}{5}$.

β) Ισχύει σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ότι το τετράγωνο του ύψους ισούται με το γινόμενο των προβολών των καθέτων πάνω στην υποτείνουσα δηλαδή $A\Delta^2 = \Delta\Gamma \cdot \Delta B$

και με αντικατάσταση έχουμε $\left(\frac{12}{5}\right)^2=\frac{16}{5}\cdot\Delta B$ ή $\frac{144}{25}=\frac{16}{5}\cdot\Delta B$.

Επομένως $\Delta B=\dfrac{\frac{144}{25}}{\frac{16}{5}}=\frac{9}{5}$.

γ) η $B\Gamma=\Delta B+\Delta\Gamma=\frac{9}{5}+\frac{16}{5}=5$ και επομένως $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}B\Gamma\cdot A\Delta=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{12}{5}=6$.

GI_V_GEO_2_19045

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $AB=6$, $B\Gamma=9$ και $\hat{B}=60^0$.

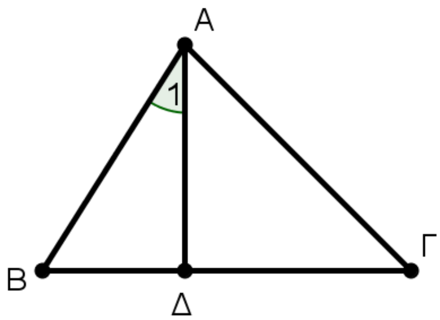
α) Να αποδείξετε ότι $A\Gamma=3\sqrt{7}$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς τις γωνίες του. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε την προβολή της AB πάνω στη $B\Gamma$. (Μονάδες 9)

Λύση:

α) Φέρνουμε το ύψος $A\Delta$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ αφού η γωνία $\hat{B}=60^0$ έχουμε ότι η γωνία $\hat{A}_1=30^0$. Επομένως η απέναντι κάθετη πλευρά της $B\Delta$ ισούται με το μισό της υποτείνουσας AB δηλαδή $B\Delta=\frac{AB}{2}=\frac{6}{2}=3$. Εφαρμόζοντας το ΠΘ στο $AB\Delta$ έχουμε $A\Delta^2=AB^2-B\Delta^2=6^2-3^2=36-9=27$, έτσι προκύπτει ότι $A\Delta=\sqrt{27}$. Ακόμη είναι $\Delta\Gamma=B\Gamma-B\Delta=9-3=6$ και έτσι πάμε στο $A\Delta\Gamma$ τρίγωνο ορθογώνιο και εφαρμόζουμε το ΠΘ που δίνει



$$A\Gamma^2=A\Delta^2+\Delta\Gamma^2=\left(\sqrt{27}\right)^2+6^2=27+36=63.$$

Επομένως $A\Gamma=\sqrt{63}=3\sqrt{7}$.

β) Οι πλευρές του τριγώνου είναι λοιπόν $AB=6$, $B\Gamma=9$ και $A\Gamma=3\sqrt{7}$ με μεγαλύτερη πλευρά την $B\Gamma$ (αφού $9>3\sqrt{7}$ γιατί $81>63$) τότε $B\Gamma^2=81$ και $AB^2+A\Gamma^2=6^2+(3\sqrt{7})^2=36+63=99$ και επειδή $B\Gamma^2<AB^2+A\Gamma^2$, το τρίγωνο είναι οξυγώνιο.

γ) Από την επέκταση του Πυθαγορείου θεωρήματος στο οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

$$A\Gamma^2=AB^2+B\Gamma^2-2B\Gamma\cdot B\Delta\Rightarrow 63=36+81-18\cdot B\Delta\Rightarrow B\Delta=3.$$

Β τρόπος

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ έχουμε: $\sigma\upsilon\nu 60^o=\frac{B\Delta}{AB}\Rightarrow\frac{B\Delta}{6}=\frac{1}{2}\Rightarrow B\Delta=3$.