mathematica.gr

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Β΄ τάξης Γενικού Λυκείου

Θέμα 4ο

Εκφωνήσεις - Λύσεις

των

θεμάτων

Οι απαντήσεις και οι λύσεις
είναι αποτέλεσμα συλλογικής δουλειάς
των Επιμελητών των φακέλων του Λυκείου
του Δικτυακού Τόπου **mathematica.gr**
με βάση υλικό που αναρτήθηκε στο mathematica
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=147&t=46868

Συνεργάστηκαν οι:
Θανάσης Μπεληγιάννης,
Γιώργος Ρίζος,
Χρήστος Τσιφάκης,
Γιώργος Βισβίκης,
Θανάσης Καραμεσάλης,
Νίκος Φραγκάκης,
KARKAR,
Ηλίας Καμπελής,
Γιώργος Μήτσιος,
Θανάσης Παπασταθόπουλος,
Σωτήρης Στόγιας

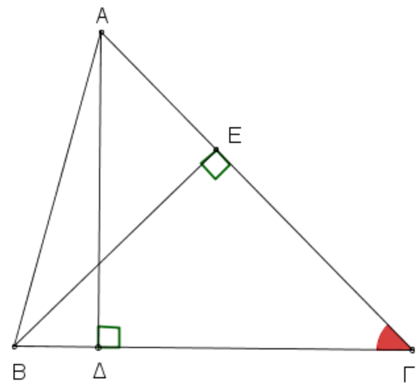
Θέματα 4^{ης} Ομάδας

GI_V_GEO_4_18976

Σε οξυγώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ φέρουμε τα ύψη του $ΑΔ$ και $ΒΕ$.
α) Αν το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι και σκαληνό, τότε:
i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΔΓ$ και $ΒΕΓ$ είναι όμοια. (Μονάδες 10)
ii. Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα $ΑΔΒ$ και $ΒΕΑ$ δεν μπορεί να είναι όμοια. (Μονάδες 10)
β) Αν το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι και ισοσκελές με κορυφή το $Γ$, τότε μπορούμε να ισχυριστούμε ότι τα τρίγωνα $ΑΔΒ$ και $ΒΕΑ$ είναι όμοια; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

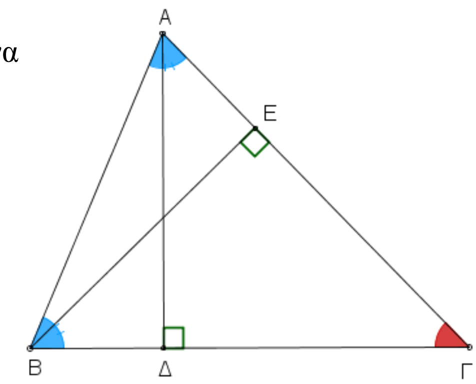
Λύση:

α) i. Τα τρίγωνα $ΑΔΓ$ και $ΒΕΓ$ είναι όμοια επειδή είναι ορθογώνια και έχουν κοινή τη γωνία $\hat{Γ}$.



ii. Τα δύο αυτά τρίγωνα είναι ορθογώνια. Επειδή όμως το $ΑΒΓ$ είναι σκαληνό, $\hat{Α} \neq \hat{Β}$. Για να είναι λοιπόν όμοια θα πρέπει $Β\hat{Α}Ε = Β\hat{Α}Δ$, που είναι άτοπο γιατί το $ΑΒΓ$ είναι οξυγώνιο και το ύψος του, $ΑΔ$ είναι εσωτερικό της γωνίας $Β\hat{Α}Ε$.

β) Αν το $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές με κορυφή το $Γ$, τότε τα τρίγωνα $ΑΔΒ$ και $ΒΕΑ$ είναι ίσα και κατά συνέπεια ισογώνια, άρα θα είναι και όμοια.



http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=147&t=46868

GI_V_GEO_4_18985

Σε κύκλο κέντρου O θεωρούμε δύο χορδές του AB και $\Gamma\Delta$ που τέμνονται σε ένα σημείο M.

α) Αν το σημείο A είναι το μέσο του τόξου $\Gamma\Delta$, να αποδείξετε ότι:

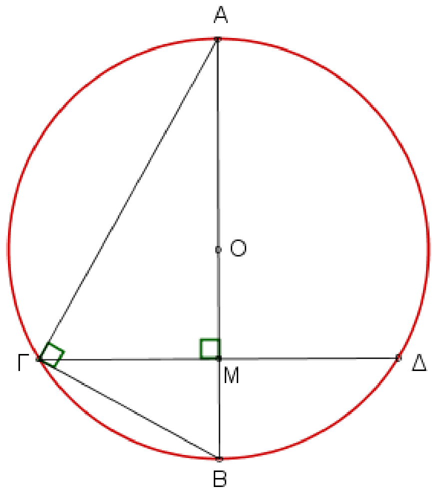
i. Όταν η χορδή AB είναι κάθετη στη χορδή $\Gamma\Delta$, τότε $AM\cdot AB = A\Gamma^2$. (Μονάδες 8)

ii. Όταν η χορδή AB δεν είναι κάθετη στη χορδή $\Gamma\Delta$, ισχύει η σχέση $AM\cdot AB = A\Gamma^2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

β) Αν για τις χορδές AB και $\Gamma\Delta$ που τέμνονται σε σημείο M ισχύει ότι $AM\cdot AB = A\Gamma^2$, να αποδείξετε ότι το σημείο A είναι το μέσο του τόξου $\Gamma\Delta$. (Μονάδες 8)

Λύση:

α) i. Αν το σημείο A είναι το μέσο του τόξου $\Gamma\Delta$ και $AB\perp\Gamma\Delta$, τότε η AB είναι διάμετρος του κύκλου και κατά συνέπεια $B\hat{\Gamma}A = 90^0$. Άρα: $A\Gamma^2 = AM\cdot AB$.



ii) Η σχέση ισχύει από την ομοιότητα των τριγώνων $A\Gamma M, A\Gamma B$, που έχουν τη γωνία $\hat{A}$ κοινή και $A\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{B}\Gamma$ ως εγγεγραμμένες σε ίσα τόξα.

β) Αν ισχύει η σχέση αυτή τότε $\frac{A\Gamma}{AM} = \frac{AB}{A\Gamma}$, οπότε τα τρίγωνα $A\Gamma M, A\Gamma B$, που έχουν τη γωνία $\hat{A}$ κοινή, θα είναι όμοια.

Άρα $A\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{B}\Gamma$, δηλαδή τα τόξα $A\Gamma, A\Delta$ είναι ίσα.

GI_V_GEO_4_18994

Στην πλευρά AB παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε σημείο E τέτοιο, ώστε $BE = \frac{1}{3}AB$ και στην πλευρά $\Delta\Gamma$ θεωρούμε σημείο Z τέτοιο, ώστε $\Delta Z = \frac{1}{3}\Delta\Gamma$. Αν η διαγώνιος $A\Gamma$ τέμνει τις ΔE και BZ στα σημεία M και N αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $AM = \Gamma N = 2\cdot MN$. (Μονάδες 13)

β) $MN = \frac{1}{5}\cdot A\Gamma$. (Μονάδες 12)

Λύση:

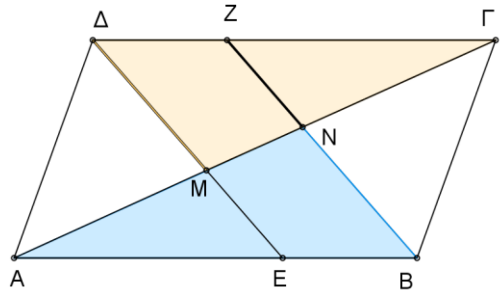
α) $\Delta Z \parallel= EB \Leftrightarrow \Delta E \parallel BZ$.

Στο τρίγωνο $\Gamma\Delta M, ZN \parallel \Delta M$: $\frac{\Gamma N}{MN} = \frac{\Gamma Z}{Z\Delta} = 2 \Leftrightarrow \Gamma N = 2\cdot MN$.

Στο τρίγωνο $ABN, ME \parallel BN$:

$$\frac{AM}{MN}=\frac{AE}{EB}=2 \Leftrightarrow AM=2\cdot MN.$$

Άρα: $AM=\Gamma N=2\cdot MN$.

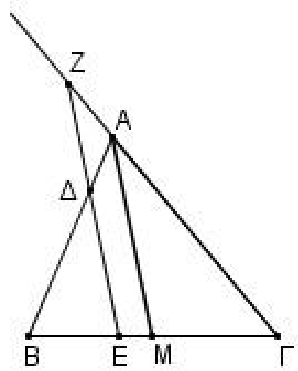


β) $A\Gamma=AM+MN+N\Gamma=2\cdot MN+MN+2\cdot MN=$

$$=5\cdot MN \Leftrightarrow MN=\frac{1}{5}\cdot A\Gamma.$$

GI_V_GEO_4_19000

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Θεωρούμε AM τη διάμεσο του και E τυχαίο σημείο του τμήματος BM. Από το E φέρουμε ευθεία παράλληλη στην AM που τέμνει την πλευρά AB στο Δ και την προέκτασή της ΓA στο Z.



α) Να συμπληρώσετε τις αναλογίες και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας:

i) $\frac{\Delta E}{\dots}=\frac{\dots}{\dots}=\frac{\dots}{AB}$

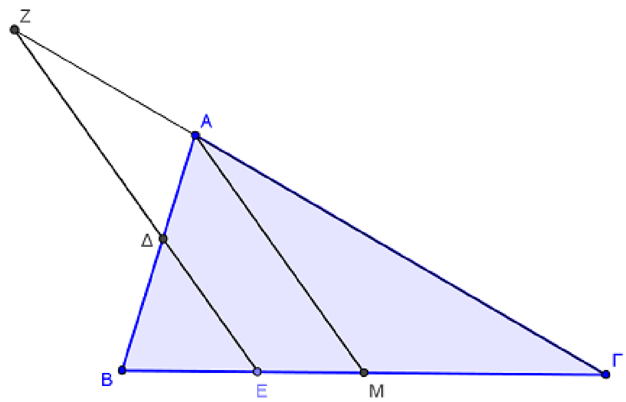
ii) $\frac{EZ}{\dots}=\frac{\dots}{\Gamma M}=\frac{\dots}{\dots}$ (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα $\Delta E+EZ$ είναι σταθερό, για οποιαδήποτε θέση του E στο BM. (Μονάδες 13)

Λύση:

α) i. Τα τρίγωνα ΔEM και ABM είναι όμοια αφού έχουν $\Delta E//AM$ και $\hat{B}$ κοινή έτσι:

$$\frac{\Delta E}{AM}=\frac{BE}{BM}=\frac{\Delta B}{AB} \quad (1).$$



ii. Τα τρίγωνα $E\Gamma Z$ και $AM\Gamma$ είναι όμοια αφού έχουν $ZE//AM$ και $\hat{\Gamma}$ κοινή έτσι:

$$\frac{EZ}{AM}=\frac{E\Gamma}{\Gamma M}=\frac{\Gamma Z}{A\Gamma} \quad (2).$$

β) Από τη σχέση (1) είναι: $\frac{\Delta E}{AM}=\frac{BE}{BM}$ (3).

Από τη σχέση (2) είναι

$$\frac{EZ}{AM}=\frac{E\Gamma}{\Gamma M}\overset{\Gamma M=BM}{\Rightarrow}\frac{EZ}{AM}=\frac{E\Gamma}{BM} \quad (4).$$

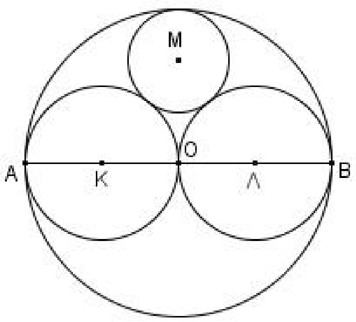
Από $(3)+(4) \Rightarrow \dfrac{\Delta E+EZ}{AM}=\dfrac{BE+E\Gamma}{BM} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\Delta E+EZ}{AM}=\dfrac{B\Gamma}{BM} \Leftrightarrow$

$\dfrac{\Delta E+EZ}{AM}=\dfrac{2BM}{BM} \Leftrightarrow \Delta E+EZ=2AM$, το οποίο είναι σταθερό.

GI_V_GEO_4_19006

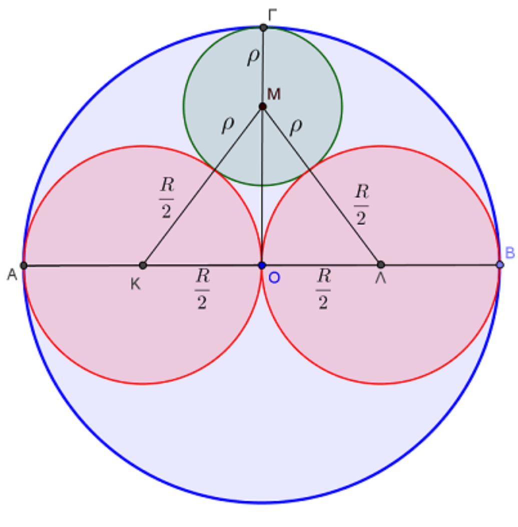
Δίνεται κύκλος (O,R) και μία διάμετρός του AB. Με διαμέτρους τα τμήματα OA και OB γράφουμε τους κύκλους κέντρων K και Λ αντίστοιχα. Ένας τέταρτος κύκλος κέντρου M και ακτίνας ρ εφάπτεται εξωτερικά των κύκλων κέντρων K και Λ και εσωτερικά του κύκλου κέντρου O.



α) Να εκφράσετε τις διακέντρους KM, ΛM και OM των αντιστοίχων κύκλων ως συνάρτηση των ακτίνων τους, δικαιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\rho=\dfrac{R}{3}$ (Μονάδες 13)

Λύση:



α) Είναι $KM=\dfrac{R}{2}+\rho$ αφού οι κύκλοι $\left(K,\dfrac{R}{2}\right)$ και (M,ρ) εφάπτονται εξωτερικά.

Ομοίως, $\Lambda M=\dfrac{R}{2}+\rho$ αφού οι κύκλοι $\left(\Lambda,\dfrac{R}{2}\right)$ και (M,ρ) εφάπτονται εξωτερικά.

$OM=R-\rho$ αφού οι κύκλοι (O,R) και (M,ρ) εφάπτονται εσωτερικά.

β) Στο ισοσκελές τρίγωνο $KM\Lambda$ το MO είναι διάμεσος άρα και ύψος.

Από Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο MOK είναι:

$$MK^2=MO^2+OK^2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{R}{2}+\rho\right)^2=(R-\rho)^2+\dfrac{R^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\dfrac{R^2}{4}+R\rho+\rho^2=R^2-2R\rho+\rho^2+\dfrac{R^2}{4} \Leftrightarrow 3R\rho=R^2 \Leftrightarrow \rho=\dfrac{R}{3}.$$

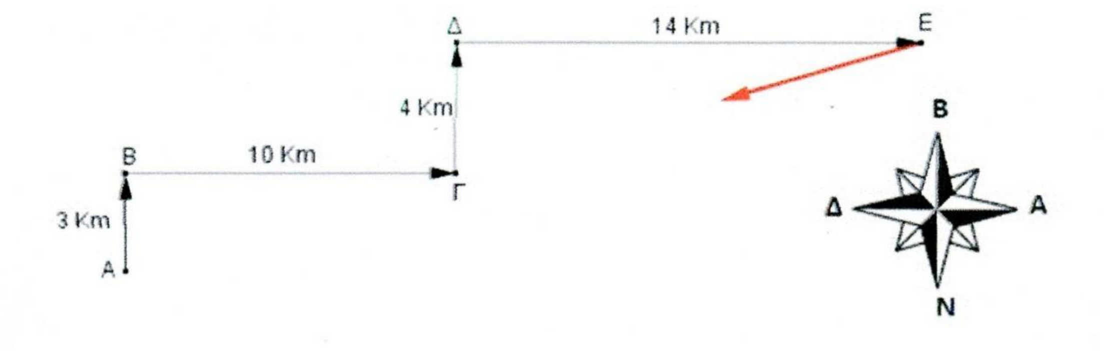
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=147&t=46868

GI_V_GEO_4_19009

Ένα κινητό ξεκινάει από ένα σημείο Α και κινείται βόρεια 3 χιλιόμετρα, κατόπιν συνεχίζει 10 χιλιόμετρα ανατολικά, στη συνέχεια προχωράει 4 χιλιόμετρα βόρεια και τέλος 14 χιλιόμετρα ανατολικά καταλήγοντας στο σημείο Ε.

α) Αν από το σημείο Ε επιστρέψει στο σημείο Α από το οποίο ξεκίνησε ,κινούμενο ευθύγραμμα, να βρείτε την απόσταση ΑΕ που θα διανύσει. (Μονάδες 12)

β) Τα σημεία Α, Γ και Ε είναι συνευθειακά; Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 13)



Λύση:

α) Ας είναι Z η τομή των ευθειών $AB, E\Delta$ τότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ZAE(\hat{Z}=90^\circ)$ θα έχουμε: $EA^2 = EZ^2 + ZA^2 = 24^2 + 7^2 = 625$ και άρα $EA = 25$.

β) Επειδή $A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2 \Rightarrow A\Gamma = \sqrt{109}$ και ομοίως : $\Gamma E = \sqrt{14^2 + 4^2} \Rightarrow \Gamma E = \sqrt{212}$ αν τα σημεία A, Γ, E ανήκουν στην ίδια ευθεία θα έχουμε

$AE = A\Gamma + \Gamma E \Rightarrow 25 = \sqrt{109} + \sqrt{212}$, άτοπο, αφού το πρώτο μέλος είναι ρητός και μάλιστα ακέραιος, ενώ το δεύτερο μέλος άρρητος.

2ος τρόπος

Αν τα σημεία A, Γ, E ανήκουν στην ίδια ευθεία τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma\Delta E$ θα είναι όμοια και άρα θα έχουν τις κάθετες πλευρές ανάλογες.

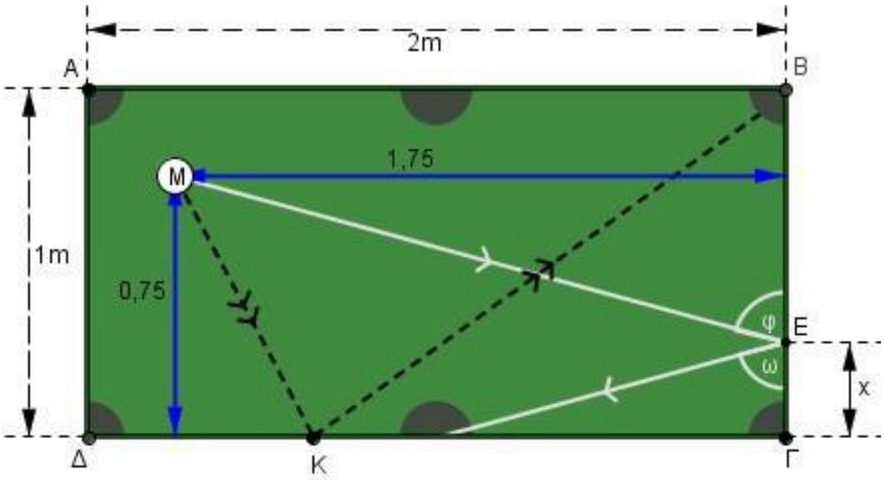
Δηλαδή $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\Gamma\Delta}{\Delta E} \Leftrightarrow \frac{3}{10} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} \Leftrightarrow 21 = 20$ άτοπο.

Εν κατακλείδι τα σημεία A, Γ, E δεν είναι συνευθειακά.

GI_V_GEO_4_19013

Δύο παίκτες Π1 και Π2 παίζουν σε ένα τραπέζι του μπιλιάρδου με διαστάσεις 1x2 μέτρα. Μία άσπρη μπάλα τοποθετείται έτσι ώστε, να απέχει 1,75 μέτρα από την πλευρά ΒΓ και 0,75 μέτρα από την πλευρά ΔΓ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=147&t=46868



Ο παίκτης Π1 παίζει πρώτος και χτυπάει την μπάλα Μ έτσι ώστε, να προσκρούσει στο απέναντι μέρος του τραπεζιού στο σημείο Ε και κατόπιν να μπει στην τρύπα που βρίσκεται στο μέσον της πλευράς ΓΔ.

Ο παίκτης Π2 τοποθετεί την μπάλα Μ πάλι στο ίδιο σημείο εκκίνησης και προτίθεται να χτυπήσει έτσι τη μπάλα ώστε, να προσκρούσει στην πλευρά ΓΔ σε σημείο της Κ και κατόπιν να μπει στην τρύπα στην κορυφή Β (η διαδρομή ΜΚΒ όπως φαίνεται στο σχήμα). Ο συμπαίκτης του ισχυρίζεται ότι αυτό δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί και θα χάσει.

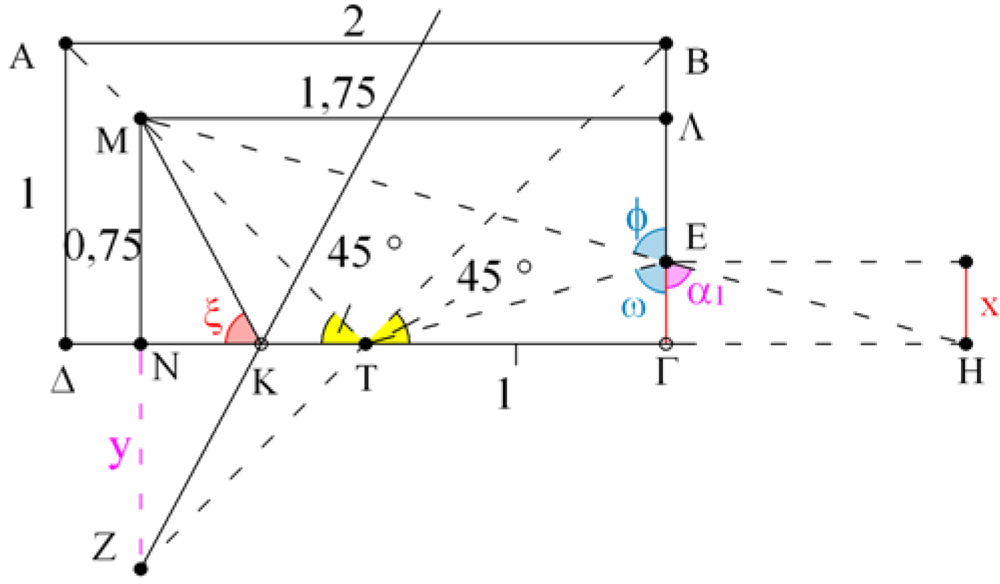
(Σημείωση: Η γωνία με την οποία χτυπάει η μπάλα σε μία πλευρά ισούται με τη γωνία με την οποία απομακρύνεται)

α) Να βρείτε πόσο απέχει το σημείο Ε από την κορυφή Γ του μπιλιάρδου. (Μονάδες 12)

β) Γιατί ο παίκτης Π1 ισχυρίζεται ότι θα χάσει ο συμπαίκτης του;
Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντηση σας. (Μονάδες 13)

Λύση:

α) Διαδικασία προσδιορισμού του Ε.



http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=147&t=46868

Ας είναι H το σημείο τομής των ευθειών ME και $\Delta\Gamma$. Επειδή $\hat{\omega}=\hat{\varphi}$ και $\hat{\varphi}=\hat{\alpha}_1$ ως κατακορυφήν θα είναι και $\hat{\omega}=\hat{\alpha}_1$.

Ονομάζω T το σημείο της τρύπας στο μέσο του $\Gamma\Delta$, έτσι το τρίγωνο ETH θα έχει την $E\Gamma$ διχοτόμο και ύψος οπότε και διάμεσο και άρα μεσοκάθετο του TH.

Ας είναι και N η προβολή του M στη $\Delta\Gamma$

Τα ορθογώνια τρίγωνα HMN, HET είναι προφανώς όμοια και άρα

$$\frac{MN}{E\Gamma}=\frac{HN}{H\Gamma}\Rightarrow\frac{0,75}{x}=\frac{2,75}{1}\Rightarrow x=\frac{75}{275} \text{ και άρα } x=\frac{3}{11}=0,\overline{27}.$$

Παρατήρηση:

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε χωρίς την διαδικασία κατασκευής του E, από τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα ΛME και ΓTE.

β) Αν η BT τμήσει την ευθεία MN στο Z, το ορθογώνιο τρίγωνο ΓBT έχει τις κάθετες πλευρές του ίσες $(B\Gamma=\Gamma T=1)$.

Το τρίγωνο NZT θα είναι και αυτό ισοσκελές ορθογώνιο ως όμοιο με το ΓBT. Θα έχει δε $NT=NZ=y=MN=0,75$.

Συνεπώς το μόνο σημείο στο οποίο θα μπορούσε να ανακλαστεί η σφαίρα M στην πρόσκρουσή της με την $\Gamma\Delta$ είναι το T που όμως είναι τρύπα !

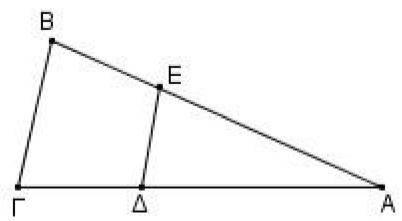
Για κάθε άλλο σημείο K πάνω στην $\Gamma\Delta$ ανάμεσα στα N, T, η ανάκλαση της σφαίρας θα ακολουθήσει την διεύθυνση της ZN (αφού η KN μεσοκάθετος στο MZ) η οποία όμως δεν διέρχεται από το B, κι αυτό γιατί η γωνία $\hat{\xi}>45^{\circ}$ ως εξωτερική στο τρίγωνο MKT.

Παρατήρηση.

Βεβαίως μπορούμε και με άτοπο να υποθέσουμε ότι ο ισχυρισμός του δεύτερου παίκτη είναι αληθής και από την προκύπτουσα ομοιότητα των ορθογωνίων τριγώνων $MNK, B\Gamma K$ οι προκύπτουσες αναλογίες οδηγούν σε άτοπο.

GI_V_GEO_4_19016

Στο παρακάτω σκαληνό τρίγωνο $AB\Gamma$ θεωρούμε τα σημεία Δ και E στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, έτσι ώστε να ισχύουν: $AE=\frac{2}{3}A\Gamma$ και $A\Delta=\frac{2}{3}AB$.



α) Να αποδείξετε ότι $A\hat{E}\Delta=A\hat{\Gamma}B$ (Μονάδες 9)

β) Να εξετάσετε αν ισχύει $\frac{AE}{A\Gamma}=\frac{E\Delta}{B\Gamma}$. (Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν το τμήμα $B\Gamma$ είναι παράλληλο στο τμήμα ΔE.

Να αιτιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας. (Μονάδες 8)

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=147&t=46868

Λύση:

α) Τα τρίγωνα $ΑΕΔ$ και $ΑΒΓ$ είναι όμοια αφού έχουν $\hat{Α}$ κοινή και $\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{2}{3}$ από την υπόθεση, έτσι θα έχουν και τις αντίστοιχες γωνίες ίσες δηλαδή και $Α\hat{Ε}Δ=Α\hat{Γ}Β$.

β) Από την ομοιότητα των παραπάνω τριγώνων είναι και $\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\frac{ΕΔ}{ΒΓ}$

γ) Είναι $Α\hat{Ε}Δ=Α\hat{Γ}Β \quad (1)$ και $Α\hat{Δ}Ε=Α\hat{Β}Γ \quad (2)$.

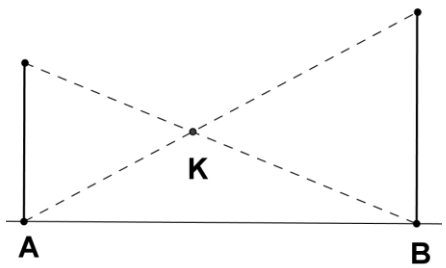
Αν είναι $ΒΓ//ΔΕ$ τότε και $Α\hat{Ε}Δ=Α\hat{Β}Γ \quad (3)$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά.

Από $(1),(3)\Rightarrow Α\hat{Β}Γ=Α\hat{Γ}Β$, δηλαδή το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές.

Αυτό είναι άτοπο αφού το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι σκαληνό, έτσι το τμήμα $ΒΓ$ δεν είναι παράλληλο στο τμήμα $ΔΕ$.

GI_V_GEO_4_19020

Σε δυο σημεία ενός ευθύγραμμου δρόμου ΑΒ βρίσκονται δυο κατακόρυφοι στύλοι ύψους 2 και 3 μέτρων αντίστοιχα. Χρησιμοποιούμε δυο σύρματα για να ενώσουμε την κορυφή του καθενός με τη βάση του άλλου, ώστε τα δυο σύρματα να διασταυρώνονται σε ένα σημείο Κ (σχήμα).



α) Να βρείτε τα ζεύγη των όμοιων τριγώνων που σχηματίζονται.
Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας. (Μονάδες 8)

β) Προκειμένου να μετρήσουμε πόσο απέχει από το έδαφος το σημείο Κ στο οποίο διασταυρώνονται τα σύρματα, μετρήσαμε την απόσταση του Κ από τον μικρότερο στύλο και την βρήκαμε 4 μέτρα. Αν η απόσταση ΑΒ των στύλων ήταν 10 μέτρα, πόσο απείχε το σημείο Κ από το έδαφος; (Μονάδες 9)

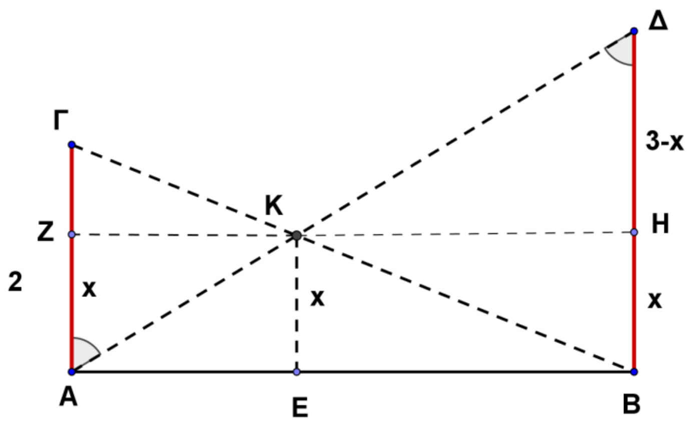
γ) Δείξτε ότι όποια και αν είναι η απόσταση ΑΒ που απέχουν οι δυο στύλοι μεταξύ τους, η απόσταση του σημείου Κ, όπου διασταυρώνονται τα δυο σύρματα από το έδαφος , θα είναι η ίδια. (Μονάδες 8)

Λύση:

α) Στο αρχικό σχήμα σχηματίζεται ένα ζεύγος όμοιων τριγώνων.
Είναι τα $ΑΚΓ$ και $ΚΒΔ$.

Τα τρίγωνα αυτά είναι όμοια γιατί έχουν τις γωνίες τους μία προς μία ίσες. Εδώ μας αρκούν οι δύο γωνίες:

- $\hat{K}_1 = \hat{K}_2$ ως κατακορυφήν.
- $K\hat{A}\Gamma = B\hat{\Delta}K$ ως εντός εναλλάξ των παράλληλων στύλων $AE, B\Delta$ με την τέμνουσα $A\Delta$.



β)

γ) Καταρχήν πρέπει να πούμε ότι αφού οι στύλοι είναι κατακόρυφοι, οι γωνίες $\hat{A} = \hat{B} = 90^0$.
Αν φέρουμε από το K κάθετη στην $A\Gamma$ αυτή θα τέμνει κάθετα και την παράλληλή της $B\Delta$.
Έτσι το $ABHZ$ είναι ορθογώνιο, καθώς έχει 4 ορθές γωνίες. Συνεπώς $AZ = BH$.
Ακόμη η κάθετη απόσταση του K από το έδαφος $B\Gamma$ θα είναι ίση με τις AZ, BH αφού το $KEAZ$ είναι επίσης ορθογώνιο.
Επομένως $KE = AZ = BH = x$
Τα τρίγωνα $KZA, KH\Delta$ είναι όμοια αφού έχουν

- $\hat{Z} = \hat{H} = 90^0$
- $K\hat{A}\Gamma = B\hat{\Delta}K$

Άρα θα έχουν τις αντίστοιχες πλευρές τους ανάλογες

$$\frac{AZ}{\Delta Z} = \frac{AK}{\Delta K} \Leftrightarrow \frac{x}{3-x} = \frac{AK}{\Delta K} \quad (1)$$

Όμως από στο α ερώτημα δείξαμε ότι $AK\Gamma$ και $KB\Delta$ είναι επίσης όμοια.

Συνεπώς $\dfrac{A\Gamma}{B\Delta} = \dfrac{AK}{\Delta K} \Leftrightarrow \dfrac{2}{3} = \dfrac{AK}{\Delta K}$ (2).

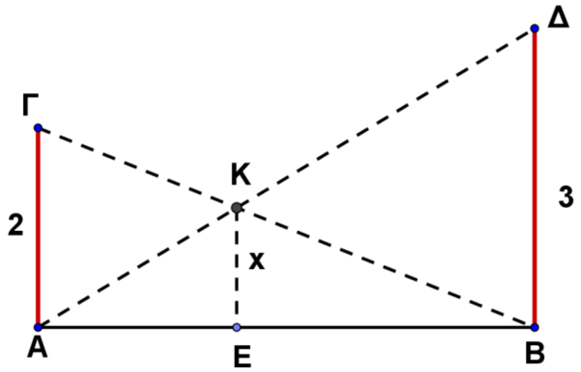
Από (1) και (2) έχουμε $\dfrac{x}{3-x} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow 3x = 2(3-x) \Leftrightarrow 3x = 6-2x$

$$\Leftrightarrow 5x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{5}.$$

Δείξαμε δηλαδή ότι $KE = \dfrac{6}{5} = 1,2$ μέτρα , ανεξάρτητα από την απόσταση των δύο στύλων.

(Δεν χρησιμοποιήσαμε πουθενά το στοιχείο $AB = 10$)

Β τρόπος

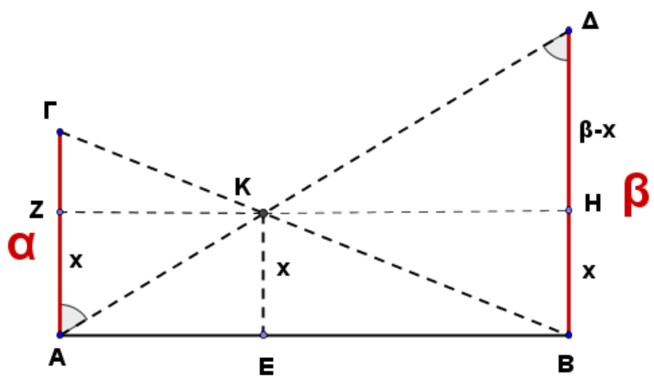


Φέρνω $KE \perp AB$. Επομένως $KE//A\Gamma//B\Delta$.
Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και KEB είναι όμοια αφού έχουν τουλάχιστον δύο γωνίες ίσες ($\hat{A}=\hat{E}$ και $\hat{B}$ κοινή).

Επομένως παίρνουμε την αναλογία : $\frac{KE}{A\Gamma}=\frac{EB}{AB} \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{EB}{AB}$ (1).
Με τον ίδιο τρόπο, από τα όμοια τρίγωνα $AB\Delta$ και KEA παίρνουμε την αναλογία:
$\frac{KE}{\Delta B}=\frac{AE}{AB} \Leftrightarrow \frac{x}{3}=\frac{AE}{AB}$ (2).
Προσθέτοντας τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε:
$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=\frac{AE}{AB}+\frac{EB}{AB} \Leftrightarrow \frac{x}{2}+\frac{x}{3}=\frac{AB}{AB}=1 \Leftrightarrow 3x+2x=6 \Leftrightarrow x=\frac{6}{5}=1,2.$$

Το θέμα αυτό είναι το διάσημο πρόβλημα "Crossed Ladders ", δείτε π.χ. εδώ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ
Γενικά, αν οι δύο στύλοι έχουν μήκος α και β (σχήμα)



από τα ζεύγη των όμοιων τριγώνων $KZA, KH\Delta$ και $AK\Gamma$, $KB\Delta$.
Όπως αποδείχθηκαν παραπάνω προκύπτουν οι αναλογίες:

$$\frac{AZ}{\Delta Z}=\frac{AK}{\Delta K}\Leftrightarrow\frac{x}{\beta-x}=\frac{AK}{\Delta K}\quad(1)$$

$$\frac{A\Gamma}{B\Delta}=\frac{AK}{\Delta K}\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\beta}=\frac{AK}{\Delta K}\quad(2)$$

Από (1) και (2) έχουμε

$$\frac{x}{\beta-x}=\frac{\alpha}{\beta}\Leftrightarrow\beta x=\alpha(\beta-x)\Leftrightarrow\beta x=\alpha\beta-\alpha x\Leftrightarrow(\alpha+\beta)x=\alpha\beta\Leftrightarrow x=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}.$$

Επομένως η ζητούμενη απόσταση είναι σταθερή και εξαρτάται από τις διαστάσεις των δύο στύλων και όχι από την μεταξύ τους απόσταση.

Όμως το πρόβλημα με το β ερώτημα παραμένει.
Αν ένας μαθητής απαντήσει απευθείας στο γ ερώτημα, τι γίνεται;

GI_V_GEO_4_19022

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) τέτοιο ώστε να ισχύει $2\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$. Αν η προέκτασή της διαμέσου του ΑΜ τέμνει τον κύκλο στο σημείο P, να αποδείξετε ότι :

α) $\mu_\alpha=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ (Μονάδες 8)

β) $MP=\frac{a\sqrt{3}}{6}$ (Μονάδες 8)

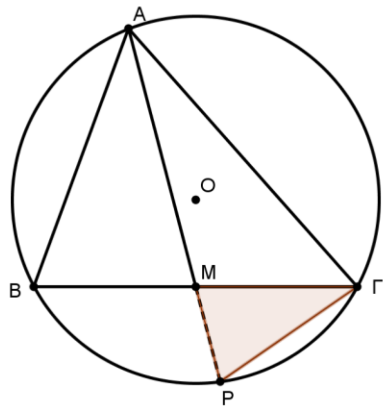
γ) $(AB\Gamma)=6\cdot(MP\Gamma)$ (Μονάδες 9)

Λύση:

α) $\beta^2+\gamma^2=2\mu_\alpha^2+\frac{\alpha^2}{2}\Rightarrow 2\alpha^2=2\mu_\alpha^2+\frac{\alpha^2}{2}\Rightarrow\mu_\alpha^2=\frac{3}{4}\alpha^2\Rightarrow\mu_\alpha=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$.

β) Ισχύει ότι

$$MA\cdot MP=MB\cdot M\Gamma\Rightarrow MP=\frac{MB\cdot M\Gamma}{AM}=\frac{\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha}{2}}{\alpha\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\alpha}{2\sqrt{3}}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{6}.$$



$$\gamma)\ \frac{(AB\Gamma)}{(MP\Gamma)}=\frac{2(ABM)}{(MP\Gamma)}=\frac{2AM\cdot BM}{MP\cdot M\Gamma}=\frac{2\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{\alpha}{2}}=6.$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=147&t=46868

GI_V_GEO_4_19025

Κυρτό τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Οι διαγώνιοί του $ΑΓ$ και $ΒΔ$ τέμνονται στο σημείο $Μ$, το οποίο είναι το μέσο της διαγωνίου $ΒΔ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΔΒ^2 = 4ΜΑ \cdot ΜΓ$ (Μονάδες 7)

β) $ΑΒ^2 + ΑΔ^2 = 2ΑΜ \cdot ΑΓ$ (Μονάδες 9)

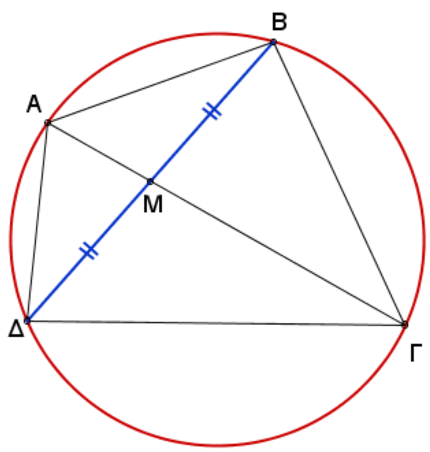
γ) $ΑΒ^2 + ΒΓ^2 + ΓΔ^2 + ΑΔ^2 = 2ΑΓ^2$ (Μονάδες 9)

Λύση:

α) $ΔΜ{\cdot}ΜΒ = ΜΑ{\cdot}ΜΓ \Leftrightarrow \dfrac{ΔΒ^2}{4} = ΜΑ{\cdot}ΜΓ \Leftrightarrow ΔΒ^2 = 4ΜΑ{\cdot}ΜΓ$.

β) Εφαρμόζω το 1ο θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο $ΑΒΔ$:

$$ΑΒ^2 + ΑΔ^2 = 2ΑΜ^2 + \frac{ΔΒ^2}{2} = 2ΑΜ^2 + 2ΑΜ{\cdot}ΜΓ = 2ΑΜ(ΑΜ + ΜΓ) \Leftrightarrow$$
$$ΑΒ^2 + ΑΔ^2 = 2ΑΜ{\cdot}ΑΓ.$$



γ) Εφαρμόζω το 1ο θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο $ΓΒΔ$:

$$ΓΒ^2 + ΓΔ^2 = 2ΓΜ^2 + \frac{ΔΒ^2}{2} = 2ΓΜ^2 + 2ΑΜ{\cdot}ΜΓ =$$
$$= 2ΓΜ(ΓΜ + ΑΜ) \Leftrightarrow ΓΒ^2 + ΓΔ^2 = 2ΓΜ{\cdot}ΑΓ.$$

Προσθέτω κατά μέλη την τελευταία αυτή σχέση και τη σχέση του β) ερωτήματος:

$$ΑΒ^2 + ΒΓ^2 + ΓΔ^2 + ΑΔ^2 = 2ΑΜ{\cdot}ΑΓ + 2ΓΜ{\cdot}ΑΓ =$$
$$= 2ΑΓ(ΑΜ + ΓΜ) = 2ΑΓ^2.$$

GI_V_GEO_4_19027

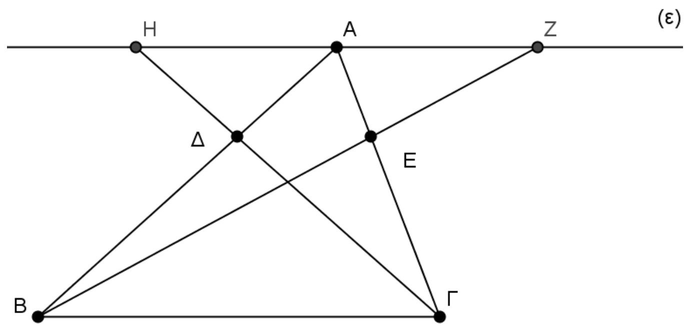
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ε των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ώστε $\dfrac{ΑΔ}{ΑΒ} = \dfrac{ΑΕ}{ΑΓ} = \dfrac{1}{3}$. Από το σημείο Α φέρνουμε ευθεία (ε) παράλληλη στη ΒΓ. Η ευθεία (ε) τέμνει τις προεκτάσεις των ΒΕ και ΓΔ στα σημεία Ζ, Η αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΔΕ // ΓΒ$. (Μονάδες 5)

β) $ΖΕ = \dfrac{1}{2} \cdot ΕΒ$. Μονάδες 7)

γ) $ΑΖ = \dfrac{1}{2} \cdot ΒΓ$. (Μονάδες 7)

δ) $(ΒΗΖ) = 2 \cdot (ΑΒΖ)$. (Μονάδες 6)



http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=147&t=46868

Λύση:

α) Οι ευθείες $HZ//B\Gamma$ και ακόμη $HZ, \Delta E$ και $B\Gamma$ τέμνουν τις AB, $A\Gamma$ και ορίζουν σε αυτές τμήματα ανάλογα, αφού ισχύει $\frac{A\Delta}{AB}=\frac{AE}{A\Gamma}$.

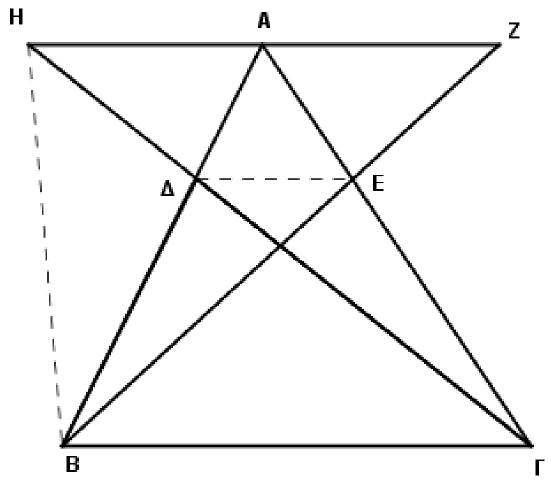
Επομένως από το αντίστροφο του Θεωρήματος του Θαλή προκύπτει $\Delta E//\Gamma B//AZ$.

β) Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Θαλή για τις παράλληλες $\Delta E, AZ$ και $B\Gamma$ που τέμνουν τις AB και AZ παίρνουμε τις αναλογίες:

$$\frac{A\Delta}{AB}=\frac{ZE}{ZB}\Leftrightarrow\frac{1}{3}=\frac{ZE}{ZB}\Leftrightarrow ZB=3ZE\Leftrightarrow ZE+EB=3ZE\Leftrightarrow EB=2ZE\Leftrightarrow ZE=\frac{1}{2}EB.$$

γ) Το τρίγωνο EAZ ορίζεται από την προέκταση των πλευρών EB και $E\Gamma$ του τριγώνου $AE\Gamma$ και την AZ που είναι παράλληλη προς την τρίτη του πλευρά $B\Gamma$.

Έτσι σύμφωνα με το σχετικό θεώρημα οι πλευρές των δύο τριγώνων θα είναι ανάλογες.



Δηλαδή $\frac{ZE}{EB}=\frac{AZ}{B\Gamma}\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\frac{AZ}{B\Gamma}\Leftrightarrow A\Gamma=\frac{1}{2}B\Gamma$ (1).

δ) Με όμοιο τρόπο προκύπτει ότι τα τρίγωνα ΔHA και $\Delta B\Gamma$ έχουν πλευρές ανάλογες.

Δηλαδή

$$\frac{A\Delta}{\Delta B}=\frac{HA}{B\Gamma}\Leftrightarrow\frac{A\Delta}{\Delta B+A\Delta}=\frac{HA}{B\Gamma+HA}\Leftrightarrow\frac{A\Delta}{AB}=\frac{HA}{B\Gamma+HA}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{3}=\frac{HA}{B\Gamma+HA}\Leftrightarrow B\Gamma+HA=3HA\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow HA=\frac{1}{2}B\Gamma \quad (2).$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $HA=AZ$.

Επομένως στο τρίγωνο BHZ η BA αποτελεί διάμεσο και χωρίζει το τρίγωνο (σύμφωνα με εφαρμογή του βιβλίου) σε δύο ισεμβαδικά τρίγωνα $(ABZ)=(AHB)$.

Άρα $(BHZ)=(ABZ)+(AHB)=2\cdot(ABZ)$.

GI_V_GEO_4_19029

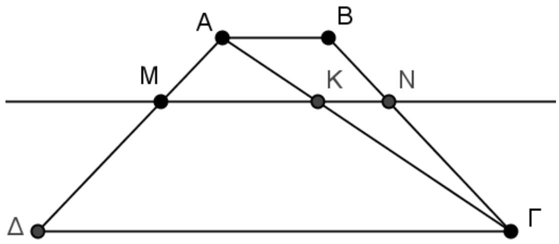
Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) και σημείο Μ της πλευράς του ΑΔ ώστε $\frac{AM}{A\Delta}=\frac{1}{3}$. Από το Μ φέρνουμε παράλληλη προς τις βάσεις του τραπεζίου, η οποία τέμνει τις ΑΓ και ΒΓ στα σημεία Κ και Ν αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{AK}{A\Gamma}=\frac{1}{3}$ (Μονάδες 6)

β) $\frac{KN}{AB}=\frac{2}{3}$ (Μονάδες 6)

γ) $MN=\frac{1}{3}\Gamma\Delta+\frac{2}{3}AB$ (Μονάδες 6)

δ) Ο ισχυρισμός «τα τραπέζια ΑΒΝΜ και ΑΒΓΔ είναι όμοια» είναι αληθής ή ψευδής ;
Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας. (Μονάδες 7)



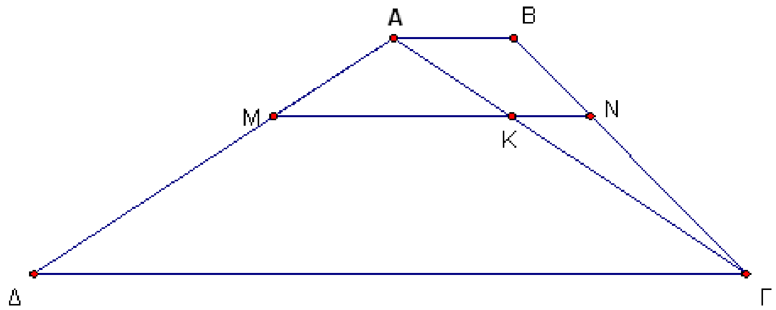
Λύση:

α) Από το Θεώρημα Θαλή παίρνουμε $\frac{AK}{A\Gamma}=\frac{AM}{A\Delta}=\frac{1}{3}$ κι' ακόμη $\frac{MK}{\Gamma\Delta}=\frac{1}{3}$ από τα όμοια τρίγωνα AMK και $A\Gamma\Delta$.

β) Είναι
$KN\parallel AB\Rightarrow \Gamma KN\approx AB\Gamma\Rightarrow$
$\Rightarrow\frac{KN}{AB}=\frac{\Gamma N}{\Gamma B}=\frac{\Delta M}{\Delta A}=\frac{2}{3}$.

γ) $MN=MK+KN=\frac{1}{3}\Gamma\Delta+\frac{2}{3}AB$

δ) Ας δεχθούμε ότι τα τραπέζια $ABNM, AB\Gamma\Delta$ είναι όμοια .
Τότε οι αντίστοιχες πλευρές τους έχουν τον ίδιο λόγο (ομοιότητας) οπότε ισχύει $\frac{MN}{\Gamma\Delta}=\frac{AM}{A\Delta}=\frac{1}{3}$.

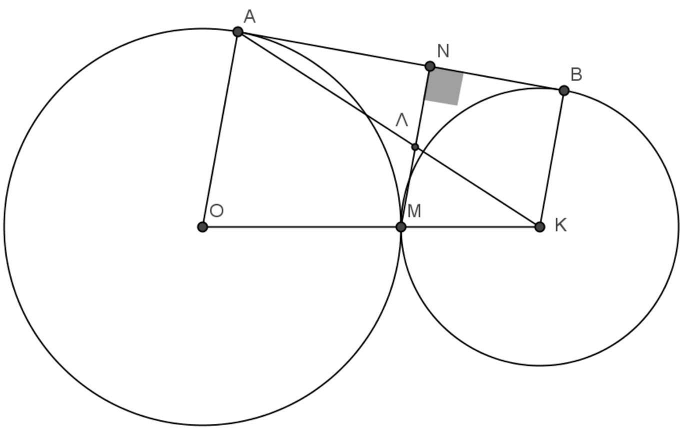


αλλά από το γ) προκύπτει: $\frac{1}{3}\Gamma\Delta=MN=\frac{1}{3}\Gamma\Delta+\frac{2}{3}AB\Rightarrow AB=0$, που είναι ΑΤΟΠΟΝ .. συνεπώς τα τραπέζια δεν είναι όμοια, δηλ. ο ισχυρισμός είναι ΨΕΥΔΗΣ .

Ας δούμε και μια πιο πρακτική αιτιολόγηση.
Τα όμοια σχήματα είναι το ένα μεγέθυνση του άλλου , δηλ οι πλευρές του μικρού πολλαπλασιάζονται (όλες με τον ίδιο αριθμό) για να προκύψουν οι πλευρές του μεγάλου.
Εδώ η πλευρά AM τριπλασιάζεται για να προκύψει η $A\Delta$, ενώ η AB παραμένει αμετάβλητη.
Συνεπώς τα τραπέζια $ABNM$, $AB\Gamma\Delta$ δεν είναι δυνατόν να είναι όμοια.

GI_V_GEO_4_19032

Δίνονται δύο κύκλοι (O,α) και (K,β) με $\alpha>\beta$, οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά στο M. Φέρνουμε το κοινό εφαπτόμενο τμήμα AB , με A, B σημεία των κύκλων (O,α) και (K,β) αντίστοιχα. Από το M θεωρούμε την κάθετη στο AB, η οποία τέμνει τα ευθύγραμμα τμήματα AK και AB στα σημεία Λ και N αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :



α) $M\Lambda=\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$

(Μονάδες 8

β) $\Lambda N=\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$

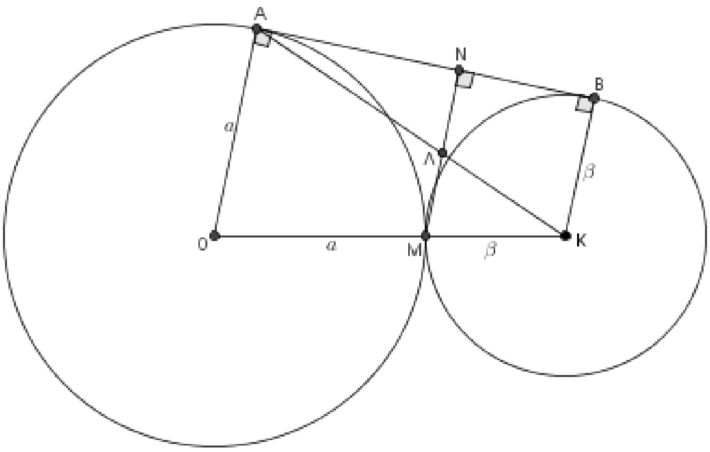
(Μονάδες 8)

γ) Αν E_1,E_2 είναι τα εμβαδά των κύκλων (O,α) και (K,β) αντίστοιχα,

τότε: $\dfrac{E_1}{E_2}=\left(\dfrac{(A\Lambda N)}{(KM\Lambda)}\right)^2$

(Μονάδες 9)

Λύση:



α) Είναι : $M\Lambda//OA$, επομένως :

$$\frac{M\Lambda}{a}=\frac{\beta}{a+\beta}\Leftrightarrow M\Lambda=\frac{a\beta}{a+\beta}$$

β) Είναι : $\Lambda N//KB$, επομένως :

$$\frac{\Lambda N}{\beta}=\frac{A\Lambda}{AK}=\frac{a}{a+\beta}\Leftrightarrow \Lambda N=\frac{a\beta}{a+\beta}$$

γ) Είναι :

$$\frac{(A\Lambda N)}{(KM\Lambda)}=\frac{\Lambda A\cdot\Lambda N}{\Lambda K\cdot\Lambda M}=\frac{\Lambda A}{\Lambda K}=\frac{a}{\beta}$$

και τετραγωνίζοντας , έχω : $\left(\dfrac{a}{\beta}\right)^2=\dfrac{a^2}{\beta^2}=\dfrac{\pi a^2}{\pi\beta^2}=\dfrac{E_1}{E_2}$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=147&t=46868

GI_V_GEO_4_19034

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Μ, Λ και Ζ πάνω στις πλευρές ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα τέτοια, ώστε $\text{AM}=\frac{1}{2}\text{AB}$, $\text{A}\Lambda=\frac{2}{3}\text{A}\Gamma$ και $\text{BZ}=\frac{1}{3}\text{B}\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι $(\text{AM}\Lambda)=\frac{1}{3}(\text{AB}\Gamma)$. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{(\text{MZ}\Lambda)}{(\text{AB}\Gamma)}=\frac{5}{18}$. (Μονάδες 12)

γ) Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών $\frac{(\text{AMZ}\Lambda)}{(\text{AB}\Gamma)}$. (Μονάδες 6)

Λύση:

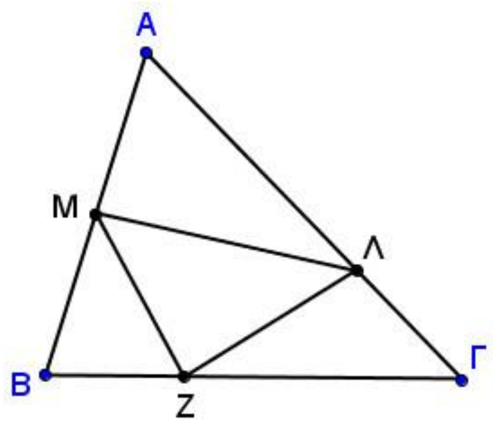
α) Τα τρίγωνα ΑΜΛ, ΑΒΓ έχουν κοινή την γωνία $\hat{\text{A}}$, οπότε $\frac{(\text{AM}\Lambda)}{(\text{AB}\Gamma)}=\frac{\text{AM}\cdot\text{A}\Lambda}{\text{AB}\cdot\text{A}\Gamma}=\frac{\frac{1}{2}\text{AB}\cdot\frac{2}{3}\text{A}\Gamma}{\text{AB}\cdot\text{A}\Gamma}=\frac{1}{3}$.

Άρα $(\text{AM}\Lambda)=\frac{1}{3}(\text{AB}\Gamma)$.

β) Τα τρίγωνα ΒΜΖ, ΑΒΓ έχουν κοινή την γωνία $\hat{\text{B}}$,

οπότε $\frac{(\text{BMZ})}{(\text{AB}\Gamma)}=\frac{\text{BM}\cdot\text{BZ}}{\text{AB}\cdot\text{B}\Gamma}=\frac{\frac{1}{2}\text{AB}\cdot\frac{1}{3}\text{B}\Gamma}{\text{AB}\cdot\text{B}\Gamma}=\frac{1}{6}$.

Άρα $(\text{BMZ})=\frac{1}{6}(\text{AB}\Gamma)$.



Ομοίως τα τρίγωνα ΓΛΖ, ΑΒΓ έχουν κοινή την γωνία $\hat{\Gamma}$.

Άρα $\frac{(\Gamma\Lambda\text{Z})}{(\text{AB}\Gamma)}=\frac{\Gamma\Lambda\cdot\Gamma\text{Z}}{\text{A}\Gamma\cdot\text{B}\Gamma}=\frac{\frac{1}{3}\text{A}\Gamma\cdot\frac{2}{3}\text{B}\Gamma}{\text{A}\Gamma\cdot\text{B}\Gamma}=\frac{2}{9}$.

Επομένως $(\Gamma\Lambda\text{Z})=\frac{2}{9}(\text{AB}\Gamma)$.

Είναι $(\text{MZ}\Lambda)=(\text{AB}\Gamma)-(\text{AM}\Lambda)-(\text{BMZ})-(\Gamma\Lambda\text{Z})=(\text{AB}\Gamma)-\frac{1}{3}(\text{AB}\Gamma)-\frac{1}{6}(\text{AB}\Gamma)-\frac{2}{9}(\text{AB}\Gamma)$

$=\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{2}{9}\right)(\text{AB}\Gamma)=\frac{18-6-3-4}{18}(\text{AB}\Gamma)=\frac{5}{18}(\text{AB}\Gamma)$. Άρα $\frac{(\text{MZ}\Lambda)}{(\text{AB}\Gamma)}=\frac{5}{18}$.

γ) $\frac{(\text{AMZ}\Lambda)}{(\text{AB}\Gamma)}=\frac{(\text{AM}\Lambda)+(\text{MZ}\Lambda))}{(\text{AB}\Gamma)}=\frac{\frac{1}{3}(\text{AB}\Gamma)+\frac{5}{18}(\text{AB}\Gamma)}{(\text{AB}\Gamma)}=\frac{(\frac{1}{3}+\frac{5}{18})(\text{AB}\Gamma)}{(\text{AB}\Gamma)}=\frac{1}{3}+\frac{5}{18}=\frac{11}{18}$.

GI_V_GEO_4_19037

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με διάμεσο $ΑΜ=\frac{α\sqrt{5}}{2}$. Αν τα ύψη του ΑΔ και ΒΕ τέμνονται στο σημείο Η, να αποδείξετε ότι:

α) $ΑΗ\cdot ΑΔ=ΑΓ\cdot ΑΕ$ (Μονάδες 8)

β) Η γωνία Α του τριγώνου ΑΒΓ είναι οξεία. (Μονάδες 9)

γ) $ΑΗ\cdot ΑΔ=α^2$ (Μονάδες 8)

Λύση:

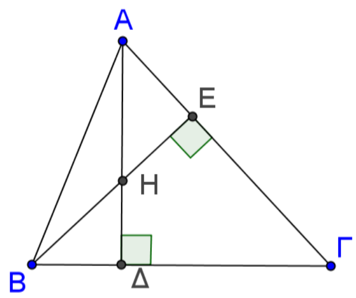
α) Το τετράπλευρο ΕΓΔΗ είναι εγγράψιμο, αφού $Η\hat{Ε}Γ+Γ\hat{Δ}Η=90^o+90^o=180^o$.
Άρα $ΑΗ\cdot ΑΔ=ΑΓ\cdot ΑΕ$.

β) Από το 1^o Θ. Διαμέσων έχουμε

$$ΑΜ^2=\frac{2β^2+2γ^2-α^2}{4}\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{α\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{2β^2+2γ^2-α^2}{4}\Leftrightarrow$$

$$\frac{5α^2}{4}=\frac{2β^2+2γ^2-α^2}{4}\Leftrightarrow β^2+γ^2=3α^2.$$



Άρα $β^2+γ^2=3α^2>α^2$ κι επομένως η $\hat{Α}$ είναι οξεία.

γ) Εφαρμόζουμε Γ.Π.Θ. στο τρίγωνο ΑΒΓ, αφού $\hat{Α}<90^o$:

$$ΒΓ^2=ΑΒ^2+ΑΓ^2-2ΑΓ\cdot ΑΕ\Leftrightarrow α^2=γ^2+β^2-2ΑΓ\cdot ΑΕ\Leftrightarrow$$

$α^2=3α^2-2ΑΓ\cdot ΑΕ\Leftrightarrow ΑΓ\cdot ΑΕ=α^2$ και λόγω του (α) ερωτήματος: $ΑΗ\cdot ΑΔ=α^2$.

GI_V_GEO_4_19039

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ, $\hat{Α}=36^o$ και η διχοτόμος του ΒΔ.

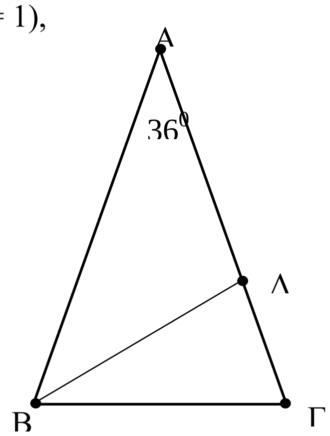
α) Να αποδείξετε ότι:

i) Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια. (Μονάδες 6)

ii) $ΑΔ^2=ΑΓ\cdot ΔΓ$ (Μονάδες 9)

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=147&t=46868

β) Αν θεωρήσουμε το ΑΓ ως μοναδιαίο τμήμα (ΑΓ = 1), να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΔ και το λόγο $\frac{ΑΔ}{ΔΓ}$. (Μονάδες 10)



Λύση:

Αφού η $\hat{A}=36^o$ και το ΑΒΓ είναι ισοσκελές είναι : $\hat{Γ}=\hat{B}=72^o$. Η ΒΔ είναι διχοτόμος της $\hat{B}$, άρα: $Δ\hat{B}Γ=Δ\hat{B}A=36^o$.
Τα τρίγωνα ΑΒΔ , ΒΔΓ έχουν δύο γωνίες ίσες άρα είναι ισοσκελή με ΑΔ=ΒΔ=ΒΓ .
α) (i) Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΑΒΓ έχουν:
$\hat{A}=Δ\hat{B}Γ=36^o$ και $\hat{Γ}$ κοινή γωνία , άρα είναι όμοια .
(ii) Αφού τα ΒΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια έχουμε: $\frac{ΒΔ}{ΑΓ}=\frac{ΓΔ}{ΒΓ} \Leftrightarrow \frac{ΑΔ}{ΑΓ}=\frac{ΓΔ}{ΑΔ} \Leftrightarrow ΑΔ^2=ΑΓ\cdot ΓΔ$.

<u>**β΄τρόπος**</u> Από θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου έχουμε :
$\frac{ΒΓ}{ΑΒ}=\frac{ΓΔ}{ΑΔ} \Leftrightarrow \frac{ΑΔ}{ΑΓ}=\frac{ΓΔ}{ΑΔ} \Leftrightarrow ΑΔ^2=ΑΓ\cdot ΓΔ$.

β) Αφού ΑΓ= 1 η σχέση του ερωτήματος (α- ii) γίνεται: $ΑΔ^2=ΓΔ$.
Άρα $ΑΔ+ΓΔ=ΑΓ \Leftrightarrow ΑΔ+ΑΔ^2=1 \Leftrightarrow ΑΔ^2+ΑΔ-1=0$
Η δευτεροβάθμια ως προς ΑΔ εξίσωση δίνει λύση: $ΑΔ=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Επίσης $\frac{ΑΔ}{ΔΓ}=\frac{ΑΒ}{ΒΔ}=\frac{1}{ΑΔ}=\frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=φ$.