ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

Μαθηματικά Προσανατολισμού

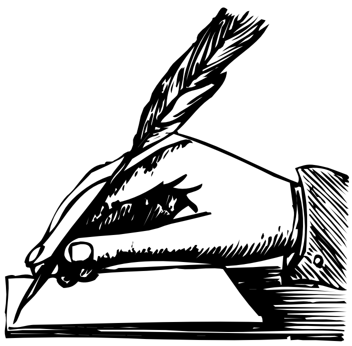
Β΄ Γενικού Ημερησίου Λυκείου

2^{o} ΘΕΜΑ

Εκφωνήσεις - Λύσεις

των

θεμάτων



Έκδοση 1^{η} (18/11/2014)

Οι απαντήσεις και οι λύσεις
είναι αποτέλεσμα συλλογικής δουλειάς
μελών του Δικτυακού Τόπου **mathematica.gr**
με βάση υλικό που αναρτήθηκε στο mathematica
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=147&t=46869

Συνεργάστηκαν οι:

Γιώργος Απόκης, Κωνσταντίνος Γεωργίου, Κώστας Ζυγούρης, Γιώργος Καλαθάκης, Ηλίας Καμπελής, Θοδωρής Καραμεσάλης, Μάνος Κοθρής, Δημήτρης Ε. Κοντοκώστας, Γιώργος Λέκκας, Θανάσης Μπεληγιάννης, Περικλής Παντούλας, Θανάσης Παπασταθόπουλος, Γιώργος Ρίζος, Κώστας Τηλέγραφος, Σωτήρης Στόγιας, Χρήστος Τσιφάκης, Σωτήρης Δ. Χασάπης, nikosxen, depymak

Την αποδελτίωση και σελιδοποίηση έκαναν οι:
Περικλής Παντούλας, Γιώργος Ρίζος, Κώστας Τηλέγραφος

Το **Δελτίο** διατίθεται ελεύθερα
από το δικτυακό τόπο **mathematica.gr**

Θέματα $2^{ης}$ Ομάδας
$2^{ο}$ ΘΕΜΑ Μαθηματικά Προσανατολισμού Β΄ Λυκείου

GI_V_MATHP_2_18556 *[παράγραφος 1.5]*

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{3}$ και $|\vec{\alpha}|=\sqrt{2}$, $|\vec{\beta}|=2\sqrt{2}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\vec{\beta}$.

(Μονάδες 8)

β) Αν τα διανύσματα $2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ είναι κάθετα να βρείτε την τιμή του κ.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ:

α) Από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου έχουμε:

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=2\sqrt{2}^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{4}{2}=2.$$

Οπότε $\vec{\alpha}\vec{\beta}=2.$

β) Έστω $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{\delta}=\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ τα δοσμένα διανύσματα.

Από την υπόθεση έχουμε:

$$\vec{\gamma}\perp\vec{\delta}\Leftrightarrow\vec{\gamma}\cdot\vec{\delta}=0\Leftrightarrow\left(2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\left(\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\kappa\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\kappa\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=0\overset{\vec{\alpha}\vec{\beta}=2}{\overbrace{\Leftrightarrow}}2\kappa|\vec{\alpha}|^2+4+2\kappa+|\vec{\beta}|^2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\kappa\sqrt{2}^2+4+2\kappa+\left(2\sqrt{2}\right)^2=0\Leftrightarrow 4\kappa+4+2\kappa+8=0\Leftrightarrow 6\kappa=-12\Leftrightarrow\kappa=-2.$$

γ) Θα υπολογίσουμε αρχικά το τετράγωνο του μέτρου για το $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$. Έχουμε λοιπόν:

$$|2\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2=\left(2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2=4\vec{\alpha}^2+4\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2\overset{\vec{\alpha}\vec{\beta}=2}{\overbrace{=}}4|\vec{\alpha}|^2+8+|\vec{\beta}|^2=4\sqrt{2}^2+8+\left(2\sqrt{2}\right)^2=$$

$$=8+8+8=24\Rightarrow|2\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=\sqrt{24}=2\sqrt{6}.$$

GI_V_MATHP_2_18558 *[παράγραφος 1.5]*

Σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι: $\overrightarrow{AB}=(-4,-6)$, $\overrightarrow{AΓ}=(2,-8)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AM}$, όπου AM είναι η διάμεσος του τριγώνου $ΑΒΓ$.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι οξεία.

(Μονάδες 10)

γ) Αν στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ επιπλέον ισχύει $A(3,1)$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του $Β$ και $Γ$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ:

α) Η AM είναι διάμεσος του τριγώνου $ΑΒΓ$. Δηλαδή το σημείο M είναι μέσο του $ΒΓ$. Γνωρίζουμε ότι η διανυσματική ακτίνα του μέσου ενός ευθυγράμμου τμήματος ισούται με το ημιάθροισμα των διανυσματικών ακτίνων των άκρων. Οπότε:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AΓ}\right)=\frac{1}{2}\left[(-4,-6)+(2,-8)\right]=\frac{1}{2}(-2,-14)=(-1,-7)$$

β) Η γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου είναι ίση με τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AΓ}$. Δηλαδή $\hat{A}=\left(\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AΓ}\right)$. Τη γωνία (*Δηλ: το αν είναι αμβλεία ή οξεία*) των διανυσμάτων θα την υπολογίσουμε μέσω του συνημιτόνου της. Δηλαδή από τη σχέση:

$$συν\left(\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AΓ}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AΓ}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AΓ}|}$$

✓ Καταρχήν έχουμε

$$|\overrightarrow{AB}|>0,\ |\overrightarrow{AΓ}|>0$$

✓ Στη συνέχεια βρίσκουμε το εσωτερικό τους γινόμενο.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AΓ}=(-4,-6)\cdot(2,-8)=-8+48=40$$

Έτσι $συν\left(\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AΓ}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AΓ}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AΓ}|}=\frac{40}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AΓ}|}>0$, άρα η γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AΓ}$ είναι οξεία αφού έχει θετικό συνημίτονο. Συνεπώς και η γωνία $\hat{A}$ είναι επίσης οξεία.

γ) Είναι $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A)\Leftrightarrow(-4,-6)=(x_B-3,y_B-1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x_B-3=-4 \text{ και } y_B-1=-6)\Leftrightarrow(x_B=-1 \text{ και } y_B=-5)$, δηλαδή $B(-1,-5)$.

Ακόμη $\overrightarrow{AΓ}=(x_Γ-x_A,y_Γ-y_A)\Leftrightarrow(2,-8)=(x_Γ-3,y_Γ-1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x_Γ-3=2 \text{ και } y_Γ-1=-8)\Leftrightarrow(x_Γ=5 \text{ και } y_Γ=-7)$, δηλαδή $Γ(5,-7)$.

GI_V_MATHP_2_18575 *[παράγραφος 2.1]*

Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$ και $B(5,6)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η μεσοκάθετος ε του ευθυγράμμου τμήματος AB έχει εξίσωση την $y=-x+7$.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ:

α) Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B είναι η

$$y-y_A=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x-x_A)\Leftrightarrow y-2=\frac{6-2}{5-1}(x-1)\Leftrightarrow y-2=x-1\Leftrightarrow y=x+1$$

β) Αν M το μέσο του AB, τότε $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{1+5}{2}=3$ και $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{2+6}{2}=4$, αφού οι συντεταγμένες του μέσου ενός ευθυγράμμου τμήματος ισούνται με το ημιάθροισμα των συντεταγμένων των άκρων. Οπότε $M(3,4)$. Επιπλέον:

$$\varepsilon\perp AB\Leftrightarrow \lambda_\varepsilon\lambda_{AB}=-1\Leftrightarrow \lambda_\varepsilon\cdot 1=-1\Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=-1.$$

Οπότε η εξίσωση της μεσοκαθέτου της ε της AB είναι:

$$y-y_M=\lambda_\varepsilon(x-x_M)\Leftrightarrow y-4=-(x-3)\Leftrightarrow y-4=-x+3\Leftrightarrow y=-x+7$$

GI_V_MATHP_2_18581 *[παράγραφος 1.5]*

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία : $2|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=2\sqrt{2}$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=60^\circ$

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=2$.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ:

α) Από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου έχουμε:

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu 60^\circ=4\cdot\frac{1}{2}=2.$$

β) Θα υπολογίσουμε αρχικά τα τετράγωνα των μέτρων. Έχουμε λοιπόν:

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2=(\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2=\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=\sqrt{2}^2+2\cdot 2+(2\sqrt{2})^2=2+4+8=14$$

και $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2=(\vec{\alpha}-\vec{\beta})^2=\vec{\alpha}^2-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=\sqrt{2}^2-2\cdot 2+(2\sqrt{2})^2=2-4+8=6$.

Άρα $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=\sqrt{14}$ και $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=\sqrt{6}$.

GI_V_MATHP_2_18584 *[παράγραφος 2.1]*

Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1: x-2y-8=0$, $\varepsilon_2: 2x-4y+10=0$ και το σημείο A της ε_1 που έχει τετμημένη το 4.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε η οποία διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στην ευθεία ε_1

(Μονάδες 10)

γ) Αν Β είναι το σημείο τομής των ευθειών ε και ε_2, τότε να βρείτε τις συντεταγμένες του Β.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ:

α) Έστω $(4,\alpha)$ οι συντεταγμένες του σημείου A. Το A είναι σημείο της ευθείας ε_1, κατά συνέπεια οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ε_1, οπότε για $(x,y)=(4,\alpha)$ η εξίσωση της ε_1 γίνεται: $4-2\alpha-8=0 \Leftrightarrow -2\alpha=4 \Leftrightarrow \alpha=-2$. Άρα $A(4,-2)$.

β) Η ε_1 είναι στη μορφή $Ax+By+\Gamma=0$, με $A=1$ και $B=-2$, οπότε έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\varepsilon_1}=-\frac{A}{B}=-\frac{1}{-2}=\frac{1}{2}$. Η ζητούμενη ευθεία ε είναι κάθετη στην ε_1, οπότε το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσής τους είναι -1. Δηλαδή: $\varepsilon_1 \perp \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1}\cdot\lambda_\varepsilon=-1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=-2$.

Τότε η εξίσωση της ε είναι:

$$y-y_A=\lambda_\varepsilon(x-x_A) \Leftrightarrow$$
$$y-(-2)=\lambda_\varepsilon\cdot(x-4) \Leftrightarrow y+2=-2(x-4) \Leftrightarrow$$
$$y+2=-2x+8 \Leftrightarrow 2x+y-6=0.$$

γ) Οι συντεταγμένες του σημείου Β θα βρεθούν από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων των ε_2 και ε.

Έχουμε: $\begin{cases} (\varepsilon): 2x+y-6=0 \quad (1) \\ (\varepsilon_2): 2x-4y+10=0 \, (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{2x}+y=6 \\ \cancel{-2x}+4y=10 \end{cases} \Leftrightarrow 5y=16 \Leftrightarrow y=\frac{16}{5}$

Τότε η $(1) \Leftrightarrow 2x+\frac{16}{5}=6 \Leftrightarrow 10x+16=30 \Leftrightarrow 10x=14 \Leftrightarrow x=\frac{14}{10}=\frac{7}{5}$

Άρα: $B\left(\frac{7}{5},\frac{16}{5}\right)$

GI_V_MATHP_2_18587 *[παράγραφος 2.1]*

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : x-8y+16=0$ και $\varepsilon_2 : 2x+y+15=0$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο M. Αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνουν τον άξονα $y'y$ στα σημεία A και B αντίστοιχα, τότε:

α) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων M, A και B.

(Μονάδες 10)

β) αν K είναι το μέσο του τμήματος AB, να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\overrightarrow{MK}$

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ:

α) Οι συντεταγμένες του σημείου M θα βρεθούν από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων των δύο ευθειών, αφού το σημείο M είναι κοινό τους σημείο.

Έχουμε: $\begin{cases}(\varepsilon_1): x-8y+16=0\,(1)\\(\varepsilon_2): 2x+y+15=0\,(2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-8y=-16\\2x+y=-15\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cancel{-2x}+16y=32\\ \cancel{2x}+y=-15\end{cases} \overset{(+)}{\Leftrightarrow}$

$17y=17 \Leftrightarrow y=1$. Τότε η $(1) \Leftrightarrow x-8=-16 \Leftrightarrow x=-8$. Άρα $M(-8,1)$

Η ε_1 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο A.

Για $x=0$ η εξίσωση της ε_1 γίνεται: $-8y=-16 \Leftrightarrow y=2$. Άρα $A(0,2)$.

Η ε_2 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο B.

Για $x=0$ η εξίσωση της ε_2 γίνεται: $y=-15$. Άρα $B(0,-15)$

β) Έστω (x_K, y_K) οι συντεταγμένες του σημείου K. Από υπόθεση το K είναι μέσο του τμήματος AB, οπότε οι συντεταγμένες του θα ισούνται με το ημιάθροισμα των συντεταγμένων των άκρων.

Δηλαδή $\begin{cases}x_K = \dfrac{x_A+x_B}{2} = \dfrac{0}{2} = 0\\[2mm] y_K = \dfrac{y_A+y_B}{2} = \dfrac{2-15}{2} = -\dfrac{13}{2}\end{cases}$ Άρα $K\left(0,-\dfrac{13}{2}\right)$.

Για το διάνυσμα $\overrightarrow{MK}$ έχουμε:

$$\overrightarrow{MK} = (x_K - x_M, y_K - y_M) = \left(0+8,-\frac{13}{2}-1\right) = \left(8,-\frac{15}{2}\right)$$

Άρα: $\lambda_{\overrightarrow{MK}} = \dfrac{y_{\overrightarrow{MK}}}{x_{\overrightarrow{MK}}} = \dfrac{-\frac{15}{2}}{8} = -\dfrac{15}{16}$.

GI_V_MATHP_2_18589 *[παράγραφος 2.2]*

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 8x+y-28=0$ και $\varepsilon_2: x-y+1=0$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο M.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M και, στη συνέχεια, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το M και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες που διέρχονται από το M και έχουν συντελεστή διεύθυνσης λ έχουν εξίσωση την: $\lambda x-y-3\lambda+4=0$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ:

α) Οι συντεταγμένες του σημείου M θα προκύψουν από τη λύση του συστήματος των ευθειών ε_1 και ε_2, αφού το σημείο M ανήκει και στις δύο. Έχουμε λοιπόν:

$$\left.\begin{aligned}(\varepsilon_1)&: 8x+y-28=0\\(\varepsilon_2)&: \quad x-y+1=0\end{aligned}\right\}\overset{+}{\Rightarrow}\left.\begin{aligned}9x-27=0\\x-y+1=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}x=3\\y=4\end{aligned}\right\}. \text{ Άρα } M(3,4).$$

Η ευθεία (ε) η οποία διέρχεται από το M είναι κάθετη στον άξονα $x'x$ και έχει εξίσωση της μορφής $x=x_o$, όπου x_o η τετμημένη του γνωστού σημείου από το οποίο διέρχεται.

Οπότε $(\varepsilon): x=x_M \Leftrightarrow x=3$.

β) Οι ευθείες που διέρχονται από το M και έχουν συντελεστή διεύθυνσης λ έχουν εξίσωση:

$$y-4=\lambda(x-3)\Rightarrow y-4=\lambda x-3\lambda\Rightarrow \lambda x-y-3\lambda+4=0 \text{ με } \lambda\in\mathbb{R}.$$

GI_V_MATHP_2_18592 *[παράγραφος 2.1]*

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: x-3y+5=0$ και $\varepsilon_2: 3x+y-5=0$

α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες μεταξύ τους.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής A των ευθειών ε_1 και ε_2.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο A και την αρχή O των αξόνων.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ:

α) Αρκεί να δείξουμε ότι το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των δύο ευθειών ισούται με -1.

✓ Είναι $\varepsilon_1: x-3y+5=0 \Leftrightarrow 3y=x+5 \Leftrightarrow y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$ οπότε: $\lambda_{\varepsilon_1}=\frac{1}{3}$.

✓ Είναι $\varepsilon_2: 3x+y-5=0 \Leftrightarrow y=-3x+5$ οπότε: $\lambda_{\varepsilon_2}=-3$.

Τότε: $\lambda_{\varepsilon_1}\cdot\lambda_{\varepsilon_2}=\frac{1}{3}\cdot(-3)=-1 \Leftrightarrow \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.

β) Οι συντεταγμένες του σημείου A θα βρεθούν από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων των (ε_1) και (ε_2), αφού το σημείο A ανήκει και στις δύο ευθείες.

Έχουμε: $\begin{cases} x-3y+5=0 \, (1) \\ 3x+y-5=0 \, (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y=-5 \\ 3x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y=-5 \\ 9x+3y=15 \end{cases} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} 10x=10 \Leftrightarrow x=1$

Τότε η $(2) \Leftrightarrow 3+y=5 \Leftrightarrow y=2$. Άρα $A(1,2)$

γ) Έστω (ζ) η ζητούμενη ευθεία. Η (ζ) διέρχεται από την αρχή των αξόνων O, οπότε θα έχει εξίσωση της μορφής $y=\lambda x$, όπου λ ο συντελεστής διεύθυνσης.

Επιπλέον η ευθεία διέρχεται από το σημείο A, κατά συνέπεια η εξίσωσή της επαληθεύεται από τις συντεταγμένες του σημείου A, δηλαδή για $x=1$ και $y=2$ έχουμε: $\lambda=2$.

Άρα η εξίσωση της (ζ) είναι $y=2x$.

GI_V_MATHP_2_18595 *[παράγραφος 2.1]*

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 3x+y+3=0$ και $\varepsilon_2: x+2y-4=0$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής A των ευθειών ε_1 και ε_2.

(Μονάδες 8)

β) Αν η ευθεία ε_1 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο B και η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Γ, τότε:

i) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων B και Γ.

(Μονάδες 8)

ii) να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία B και Γ έχει εξίσωση την $3x-4y-12=0$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ:

α) Οι συντεταγμένες του σημείου A θα βρεθούν από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων των ευθειών (ε_1) και (ε_2) αφού το σημείο A είναι κοινό σημείο των δύο ευθειών.

Έχουμε: $\begin{cases} \varepsilon_1: 3x+y+3=0 \ (1) \\ \varepsilon_2: x+2y-4=0 \ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y=-3 \\ x+2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x-2y=6 \\ x+2y=4 \end{cases} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} -5x=10$

$\Leftrightarrow x=-2$. Τότε η $(1) \Leftrightarrow 3\cdot(-2)+y=-3 \Leftrightarrow -6+y=-3 \Leftrightarrow y=3$. Άρα $A(-2,3)$

β)(i) Το σημείο στο οποίο η (ε_1) τέμνει τον άξονα $y'y$ έχει τετμημένη μηδέν. Οπότε για $x=0$ η εξίσωση της (ε_1) γίνεται: $y+3=0 \Leftrightarrow y=-3$. Άρα η (ε_1) τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0,-3)$

Το σημείο στο οποίο η (ε_2) τέμνει τον άξονα $y'y$ έχει τετμημένη μηδέν. Οπότε για $y=0$ η εξίσωση της (ε_2) γίνεται: $x-4=0 \Leftrightarrow x=4$. Άρα η (ε_2) τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Gamma(4,0)$.

(ii) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $B\Gamma$ είναι: $\lambda_{B\Gamma} = \dfrac{y_\Gamma - y_B}{x_\Gamma - x_B} = \dfrac{0+3}{4-0} = \dfrac{3}{4}$.

Τότε η εξίσωση της $B\Gamma$ είναι:

$$y-y_\Gamma = \lambda_{B\Gamma}\cdot(x-x_\Gamma) \Leftrightarrow y-0=\frac{3}{4}\cdot(x-4) \Leftrightarrow 4y=3x-12 \Leftrightarrow 3x-4y-12=0.$$

GI_V_MATHP_2_18598 *[παράγραφος 1.5]*

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}=\left(\kappa^2-6\kappa+9,\kappa-3\right)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(1,6)$, όπου $\kappa\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του κ, ώστε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ να είναι κάθετα.

(Μονάδες 9)

γ) Για $\kappa=1$ να βρείτε το διάνυσμα $\overrightarrow{B\Gamma}$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ:

α) Από την αναλυτική έκφραση του εσωτερικού γινομένου έχουμε:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=\kappa^2-6\kappa+9+6\cdot(\kappa-3)=\kappa^2-\cancel{6\kappa}+9+\cancel{6\kappa}-18=\kappa^2-9.$$

β) Τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι κάθετα, οπότε το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν.

$$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{A\Gamma}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=0\overbrace{\Leftrightarrow}^{\alpha)}\kappa^2-9=0\Leftrightarrow\kappa^2=9\Leftrightarrow\kappa=3\text{ ή }\kappa=-3.$$

γ) Για $\kappa=1$ είναι $\overrightarrow{AB}=(4,-2)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(1,6)$. Χρησιμοποιώντας το σημείο A ως σημείο αναφοράς έχουμε:

$$\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AB}=(1,6)-(4,-2)=(1-4,6+2)=(-3,8).$$

GI_V_MATHP_2_18600 *[παράγραφος 2.1]*

Θεωρούμε την ευθεία ε_1 που τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία $A(3,0)$ και $B(0,6)$ αντίστοιχα.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1.

(Μονάδες 8)

β) Αν ε_2 είναι η ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ε_1, τότε να βρείτε:

i) την εξίσωση της ευθείας ε_2.

(Μονάδες 9)

ii) τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε_1 και ε_2.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ:

α) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεί A και B είναι

$$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6-0}{0-3} = -2.$$

Οπότε η ευθεία ε_1 έχει εξίσωση:

$$y - y_A = \lambda_{AB}(x - x_A) \Leftrightarrow y - 0 = -2(x-3) \Leftrightarrow y = -2x + 6$$

β)

i) Αφού $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$, οι δύο ευθείες θα έχουν γινόμενο συντελεστών διεύθυνσης -1. Οπότε θα είναι

$\lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda_{\varepsilon_2} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_2} = \frac{1}{2}$

Η ευθεία ε_2 διέρχεται από το $O(0,0)$ οπότε έχει εξίσωση της μορφής $y = \lambda x$ με $\lambda = \lambda_{\varepsilon_2} = \frac{1}{2}$,

δηλαδή είναι η ευθεία (ε_2): $y = \frac{1}{2}x$

ii) Το σημείο τομής, έστω M, των δύο ευθειών θα προκύψει από τη λύση του συστήματος των δύο ευθειών, αφού το σημείο M είναι κοινό τους σημείο.

$$\begin{cases} y = -2x + 6 \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x = -2x + 6 \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{12}{5} \\ y = \frac{6}{5} \end{cases},$$

οπότε το σημείο τομής τους είναι το $M\left(\frac{12}{5}, \frac{6}{5}\right)$

GI_V_MATHP_2_18601 *[παράγραφος 2.1]*

Έστω $M(3,5)$ το μέσο ευθυγράμμου τμήματος AB με $A(1,1)$.

α) Να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες του σημείου B.

(Μονάδες 6)

ii) την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου K του άξονα $x'x$ έτσι, ώστε να ισχύει $(KA)=(KB)$.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ:

α)(i) Έστω $B(\beta_1,\beta_2)$.

Από την υπόθεση το σημείο $M(3,5)$ είναι το μέσο του τμήματος AB και συνεπώς οι συντεταγμένες του ισούνται με το ημιάθροισμα των συντεταγμένων των άκρων.

οπότε: $\begin{cases} x_A + x_B = 2x_M \\ y_A + y_B = 2y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\beta_1 = 6 \\ 1+\beta_2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 = 5 \\ \beta_2 = 9 \end{cases}$

Άρα $B(5,9)$.

ii) Έστω (ε) η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B.

Τότε $\lambda_\varepsilon = \lambda_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{9-1}{5-1} = \dfrac{8}{4} = 2.$

Επομένως η εξίσωση της ευθείας θα είναι:

$$y - y_A = \lambda_\varepsilon \cdot (x - x_A) \Leftrightarrow y - 1 = 2\cdot(x-1) \Leftrightarrow y - 1 = 2x - 2 \Leftrightarrow y = 2x - 1$$

β) Έστω $K(\kappa,0)$ το σημείο του άξονα $x'x$ για το οποίο ισχύει $(KA)=(KB)$ (1)

Τότε η $(1) \Leftrightarrow \sqrt{(x_A - x_K)^2 + (y_A - y_K)^2} = \sqrt{(x_B - x_K)^2 + (y_B - y_K)^2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(1-\kappa)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{(5-\kappa)^2 + (9-0)^2} \Leftrightarrow \sqrt{(1-\kappa)^2 + 1} = \sqrt{(5-\kappa)^2 + 81} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-\kappa)^2 + 1 = (5-\kappa)^2 + 81 \Leftrightarrow 1 - 2\kappa + \cancel{\kappa^2} = 25 - 10\kappa + \cancel{\kappa^2} + 80 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8\kappa = 104 \Leftrightarrow \kappa = 13.$$ Άρα $K(13,0)$.

GI_V_MATHP_2_18602 *[παράγραφος 2.1]*

Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): y+x=1$ και το σημείο $A(2,-4)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το A και είναι κάθετη στην (ε).

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την προβολή του σημείου A πάνω στην ευθεία (ε).

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ:

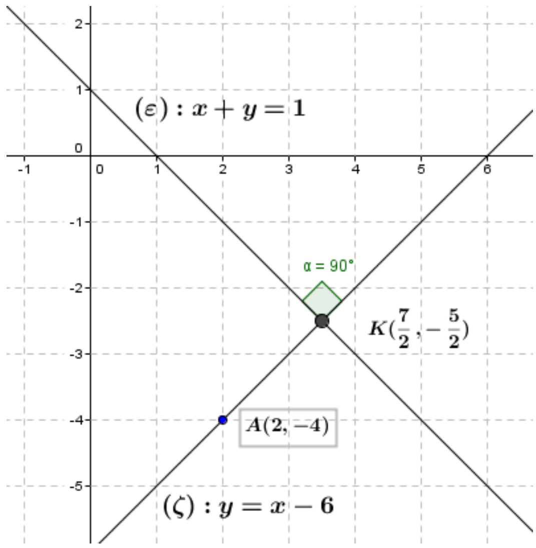
α) Έστω (ζ) η ευθεία που διέρχεται από το A με $(\zeta)\perp(\varepsilon)$ (1)

Έχουμε $(\varepsilon): x+y=1 \Leftrightarrow y=-x+1$, άρα: $\lambda_\varepsilon=-1$ (2)

Τότε: $(1)\Leftrightarrow \lambda_\zeta\cdot\lambda_\varepsilon=-1\Leftrightarrow \lambda_\zeta=-\dfrac{1}{\lambda_\varepsilon}\overset{(2)}{=}1.$

Οπότε η εξίσωση της (ζ) είναι:

$$y-(-4)=1\cdot(x-2)\Leftrightarrow y+4=x-2$$
$$\Leftrightarrow y=x-6.$$



β) Δεδομένου ότι $(\zeta)\perp(\varepsilon)$, η προβολή του σημείου A πάνω στην ευθεία (ε) θα είναι το σημείο τομής K των δύο ευθειών, το οποίο θα βρεθεί από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων των (ε) και (ζ),

Έχουμε: $\begin{cases}(\varepsilon): x+y=1\\(\zeta): y=x-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+x-6=1\\y=x-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=7\\y=x-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{7}{2}\\y=\dfrac{7}{2}-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{7}{2}\\y=-\dfrac{5}{2}\end{cases}$

Άρα $K\left(\dfrac{7}{2},-\dfrac{5}{2}\right)$

GI_V_MATHP_2_18603 *[παράγραφος 1.3]*

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ και Ε του επιπέδου τέτοια, ώστε $\overrightarrow{ΑΔ} = 2\overrightarrow{ΑΒ} + 5\overrightarrow{ΑΓ}$ και $\overrightarrow{ΑΕ} = 5\overrightarrow{ΑΒ} + 2\overrightarrow{ΑΓ}$.

α) Να γράψετε το διάνυσμα $\overrightarrow{ΔΕ}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{ΑΒ}$ και $\overrightarrow{ΑΓ}$.

(Μονάδες 13)

β) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{ΔΕ}$ και $\overrightarrow{ΒΓ}$ είναι παράλληλα.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ:

α) Χρησιμοποιώντας το σημείο Α ως σημείο αναφοράς έχουμε:

$$\overrightarrow{ΔΕ} = \overrightarrow{ΑΕ} - \overrightarrow{ΑΔ} = 5\overrightarrow{ΑΒ} + 2\overrightarrow{ΑΓ} - \left(2\overrightarrow{ΑΒ} + 5\overrightarrow{ΑΓ}\right) =$$

$$= 5\overrightarrow{ΑΒ} + 2\overrightarrow{ΑΓ} - 2\overrightarrow{ΑΒ} - 5\overrightarrow{ΑΓ} = 3\overrightarrow{ΑΒ} - 3\overrightarrow{ΑΓ}$$

Άρα $\overrightarrow{ΔΕ} = 3\overrightarrow{ΑΒ} - 3\overrightarrow{ΑΓ}$

β) Είναι: $\overrightarrow{ΔΕ} = 3\overrightarrow{ΑΒ} - 3\overrightarrow{ΑΓ} = 3\left(\overrightarrow{ΑΒ} - \overrightarrow{ΑΓ}\right) = 3\overrightarrow{ΓΒ} = -3\overrightarrow{ΒΓ} \Leftrightarrow \overrightarrow{ΔΕ} // \overrightarrow{ΒΓ}$.

GI_V_MATHP_2_18604 *[παράγραφος 1.3]*

Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ και $Ε$, $Ζ$ σημεία τέτοια ώστε: $\overrightarrow{ΑΕ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{ΑΔ}$, $\overrightarrow{ΑΖ}=\frac{2}{7}\overrightarrow{ΑΓ}$.

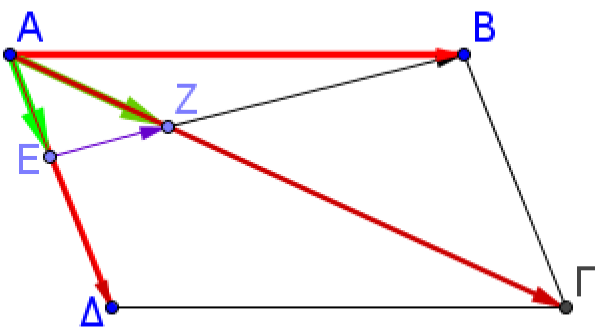
α) Να γράψετε τα διανύσματα $\overrightarrow{ΕΖ}$ και $\overrightarrow{ΖΒ}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{ΑΒ}$ και $\overrightarrow{ΑΔ}$.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξτε ότι τα σημεία $Β$, $Ζ$ και $Ε$ είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ:



α) Θεωρώντας ως σημείο αναφοράς το $Α$ έχουμε:

$$\overrightarrow{ΕΖ}=\overrightarrow{ΑΖ}-\overrightarrow{ΑΕ}=\frac{2}{7}\overrightarrow{ΑΓ}-\frac{2}{5}\overrightarrow{ΑΔ}=\frac{2}{7}\left(\overrightarrow{ΑΒ}+\overrightarrow{ΑΔ}\right)-\frac{2}{5}\overrightarrow{ΑΔ}=$$
$$\frac{2}{7}\overrightarrow{ΑΒ}+\frac{2}{7}\overrightarrow{ΑΔ}-\frac{2}{5}\overrightarrow{ΑΔ}=\frac{2}{7}\overrightarrow{ΑΒ}-\frac{4}{35}\overrightarrow{ΑΔ}=\frac{2}{7}\left(\overrightarrow{ΑΒ}-\frac{2}{5}\overrightarrow{ΑΔ}\right)$$

Δηλαδή $\boxed{\overrightarrow{ΕΖ}=\frac{2}{7}\left(\overrightarrow{ΑΒ}-\frac{2}{5}\overrightarrow{ΑΔ}\right)}$ (1) και

$$\overrightarrow{ΖΒ}=\overrightarrow{ΑΒ}-\overrightarrow{ΑΖ}=\overrightarrow{ΑΒ}-\frac{2}{7}\overrightarrow{ΑΓ}=\overrightarrow{ΑΒ}-\frac{2}{7}\left(\overrightarrow{ΑΒ}+\overrightarrow{ΑΔ}\right)=\overrightarrow{ΑΒ}-\frac{2}{7}\overrightarrow{ΑΒ}-\frac{2}{7}\overrightarrow{ΑΔ}=$$
$$\frac{5}{7}\overrightarrow{ΑΒ}-\frac{2}{7}\overrightarrow{ΑΔ}=\frac{5}{7}\left(\overrightarrow{ΑΒ}-\frac{2}{5}\overrightarrow{ΑΔ}\right)$$

Δηλαδή $\boxed{\overrightarrow{ΖΒ}=\frac{5}{7}\left(\overrightarrow{ΑΒ}-\frac{2}{5}\overrightarrow{ΑΔ}\right)}$ (2).

β) Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\overrightarrow{ΖΒ}=\frac{5}{7}\left(\overrightarrow{ΑΒ}-\frac{2}{5}\overrightarrow{ΑΔ}\right)=\frac{5}{2}\frac{2}{7}\left(\overrightarrow{ΑΒ}-\frac{2}{5}\overrightarrow{ΑΔ}\right)\overset{(1)}{=}\frac{5}{2}\overrightarrow{ΕΖ}\Rightarrow\overrightarrow{ΖΒ}=\frac{5}{2}\overrightarrow{ΕΖ}\Leftrightarrow\overrightarrow{ΖΒ}//\overrightarrow{ΕΖ}$$

και αφού η αρχή του ενός διανύσματος είναι το πέρας του άλλου, τα δύο διανύσματα έχουν κοινό φορέα, που σημαίνει ότι τα σημεία $Β$, $Ζ$ και $Ε$ είναι συνευθειακά.

GI_V_MATHP_2_18605 *[παράγραφος 1.4]*

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}+4\vec{j}$, $\overrightarrow{OB}=3\vec{i}+\vec{j}$ και $\overrightarrow{O\Gamma}=5\vec{i}-5\vec{j}$, όπου $\vec{i}$ και $\vec{j}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$.

(Μονάδες 12)

β) Να εξετάσετε αν τα σημεία A, B και Γ μπορεί να είναι κορυφές τριγώνου.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ:

α) Έχουμε ότι: $\overrightarrow{OA}=(2,4),\overrightarrow{OB}=(3,1),\overrightarrow{O\Gamma}=(5,-5)$

Οπότε: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(3,1)-(2,4)=(1,-3)$

και $\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OB}=(5,-5)-(3,1)=(2,-6)$

β) Αρκεί τα διανύσματα $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B\Gamma}$ να μην είναι παράλληλα, ώστε τα A,B,Γ να μην είναι συγγραμμικά. Οπότε αρκεί: $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B\Gamma}\right)\neq 0$.

Όμως $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & -6\end{vmatrix}=1\cdot(-6)-2\cdot(-3)=-6+6=0$

ΑΛΛΗ ΛΥΣΗ:

α) Γνωρίζουμε ότι $\vec{i}=(1,0)$ και $\vec{j}=(0,1)$. Οπότε για τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ χρησιμοποιώντας το σημείο O ως σημείο αναφοράς έχουμε:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=3\vec{i}+\vec{j}-\left(2\vec{i}+4\vec{j}\right)=3\vec{i}+\vec{j}-2\vec{i}-4\vec{j}=\vec{i}-3\vec{j}$$

Άρα: $\overrightarrow{AB}=\vec{i}-3\vec{j}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=(1,-3)$.

Όμοια: $\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OB}=5\vec{i}-5\vec{j}-\left(3\vec{i}+\vec{j}\right)=5\vec{i}-5\vec{j}-3\vec{i}-\vec{j}=2\vec{i}-6\vec{j}$

Άρα: $\overrightarrow{B\Gamma}=2\vec{i}-6\vec{j}\Leftrightarrow\overrightarrow{B\Gamma}=(2,-6)$.

β) Παρατηρούμε ότι: $\overrightarrow{B\Gamma}=(2,-6)=2\cdot(1,-3)=2\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{B\Gamma}\,//\,\overrightarrow{AB}$, οπότε τα σημεία A,B και Γ είναι συνευθειακά, κατά συνέπεια δεν αποτελούν κορυφές τριγώνου.

Συνεπώς τα σημεία A,B και Γ είναι συνευθειακά, οπότε δεν μπορούν να σχηματίζουν τρίγωνο.

GI_V_MATHP_2_20050

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,7)$ και $\vec{\beta}=(2,4)$

α) Να βρεθεί η προβολή του $\vec{\alpha}$ πάνω στο $\vec{\beta}$

(Μονάδες 10)

β) Να αναλύσετε το $\vec{\alpha}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, από τις οποίες, η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\beta}$

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ:

α) Ο τύπος για την προβολή διανύσματος σε διάνυσμα είναι:

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha} \quad (1).$$

Ισχύει ότι: $\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta} \Leftrightarrow \pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}=\kappa\cdot\vec{\beta},\ \kappa\in\mathbb{R}$

Άρα $\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}=\kappa\cdot\vec{\beta}=(2\kappa,4\kappa)$

Έτσι από την (1) έχουμε:

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha} \Leftrightarrow (1,7)(2,4)=(2,4)(2\kappa,4\kappa)$$

$$\Leftrightarrow 1\cdot 2+4\cdot 7=2\cdot 2\kappa+4\cdot 4\kappa \Leftrightarrow 30=20\kappa \Leftrightarrow \kappa=\frac{3}{2}$$

Επομένως $\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}=(3,6)$.

β) Θέλουμε να αναλύσουμε το $\vec{\alpha}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, από τις οποίες, η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\beta}$.

Δηλαδή $\vec{\alpha}=\vec{u}+\vec{v} \quad (2)$

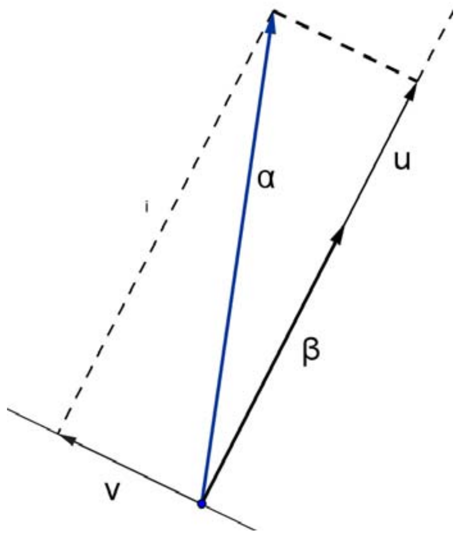
Όπως φαίνεται από το σχήμα η συνιστώσα $\vec{u}$ είναι η η προβολή του $\vec{\alpha}$ πάνω στο $\vec{\beta}$,

δηλαδή $\vec{u}=\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}=(3,6)$

Άρα από τη σχέση (2)

$(1,7)=\vec{v}+(3,6) \Leftrightarrow \vec{v}=(1,7)-(3,6)=(-2,1)$

Επομένως $\vec{\alpha}=(-2,1)+(3,6)=(1,7)$.



GI_V_MATHP_2_20052

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=1$, $(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})\cdot\vec{\beta}=7$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-1$.

α) Να υπολογίσετε τα $\vec{\alpha}^2$ και $|\vec{\beta}|$

(Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την προβολή του $\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$ στο διάνυσμα $\vec{\beta}$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ:

α) Είναι: $\vec{\alpha}^2=|\vec{\alpha}|^2=1$ και

$$(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})\cdot\vec{\beta}=7\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+2\vec{\beta}^2=7\Leftrightarrow-1+2\left|\vec{\beta}^2\right|=7\Leftrightarrow|\vec{\beta}|^2=4\Leftrightarrow|\vec{\beta}|=2$$

β) Είναι $|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|^2=(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})^2=\vec{\alpha}^2+4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+4\vec{\beta}^2=1-4+16=13$

Έτσι $|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|=\sqrt{13}$

γ) Ισχύει: $\vec{\beta}\cdot\text{προβ}_{\vec{\beta}}(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})=(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})\cdot\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\beta}\cdot\text{προβ}_{\vec{\beta}}(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})=7\ (1)$

Όμως $\text{προβ}_{\vec{\beta}}(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})//\vec{\beta}\Leftrightarrow\text{προβ}_{\vec{\beta}}(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})=\lambda\vec{\beta},\lambda\in R\ (2)$

$$(1)\overset{(2)}{\Rightarrow}\lambda\vec{\beta}^2=7\Rightarrow4\lambda=7\Leftrightarrow\lambda=\frac{7}{4}$$

Από τη $(2)\Rightarrow\text{προβ}_{\vec{\beta}}(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})=\frac{7}{4}\vec{\beta}$

GI_V_MATHP_2_20053

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}| = 4$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -8$.

α) Να υπολογίσετε την γωνία $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\beta} + 2\vec{\alpha} = \vec{0}$

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ:

α) Είναι: $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|} = \dfrac{-8}{2\cdot 4} = \dfrac{-8}{8} = -1$. Επομένως $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = 180^0$.

β) Αφού $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = 180^0$ θα είναι: $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ αντίρροπα, οπότε λόγω της υπόθεσης $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}|$

θα είναι $\vec{\beta} = -2\vec{\alpha} \Leftrightarrow \boxed{\vec{\beta} + 2\vec{\alpha} = \vec{0}}$.

GI_V_MATHP_2_20054

Θεωρούμε τα σημεία $\mathrm{P},\Lambda,\mathrm{K}$ και M του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση $5\overrightarrow{\mathrm{P}\Lambda}=2\overrightarrow{\mathrm{PK}}+3\overrightarrow{\mathrm{PM}}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία K,Λ και M είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 10)

β) Για τα παραπάνω σημεία K,Λ και M να δείξετε ότι ισχύει:

$$2\overrightarrow{\mathrm{A}\Lambda}+3\overrightarrow{\mathrm{B}\Lambda}+2\overrightarrow{\mathrm{MB}}=\overrightarrow{\mathrm{AK}}+\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\overrightarrow{\mathrm{BK}}$$

όπου A και B είναι σημεία του επιπέδου.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ:

α) Ισχύει: $5\overrightarrow{\mathrm{P}\Lambda}=2\overrightarrow{\mathrm{PK}}+3\overrightarrow{\mathrm{PM}}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{\mathrm{P}\Lambda}+3\overrightarrow{\mathrm{P}\Lambda}=2\overrightarrow{\mathrm{PK}}+3\overrightarrow{\mathrm{PM}}$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{\mathrm{P}\Lambda}-2\overrightarrow{\mathrm{PK}}=3\overrightarrow{\mathrm{PM}}-3\overrightarrow{\mathrm{P}\Lambda}\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{\mathrm{P}\Lambda}-\overrightarrow{\mathrm{PK}}\right)=3\left(\overrightarrow{\mathrm{PM}}-\overrightarrow{\mathrm{P}\Lambda}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{\mathrm{K}\Lambda}=3\overrightarrow{\Lambda\mathrm{M}}\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{K}\Lambda}=\frac{3}{2}\overrightarrow{\Lambda\mathrm{M}}$$

Επομένως $\overrightarrow{\mathrm{K}\Lambda}//\overrightarrow{\Lambda\mathrm{M}}$. Επιπλέον έχουν ένα κοινό σημείο το Λ.

Άρα τα σημεία K,Λ και M είναι συνευθειακά.

β) Αν P σημείο αναφοράς τότε

$$2\overrightarrow{\mathrm{A}\Lambda}+3\overrightarrow{\mathrm{B}\Lambda}+2\overrightarrow{\mathrm{MB}}=\overrightarrow{\mathrm{AK}}+\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\overrightarrow{\mathrm{BK}}\quad(1)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{\mathrm{P}\Lambda}-\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right)+3\left(\overrightarrow{\mathrm{P}\Lambda}-\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right)+2\left(\overrightarrow{\mathrm{PB}}-\overrightarrow{\mathrm{PM}}\right)=\overrightarrow{\mathrm{PK}}-\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PM}}-\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PK}}-\overrightarrow{\mathrm{PB}}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{\mathrm{P}\Lambda}-2\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{P}\Lambda}-3\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PB}}-2\overrightarrow{\mathrm{PM}}-\overrightarrow{\mathrm{PK}}+\overrightarrow{\mathrm{PA}}-\overrightarrow{\mathrm{PM}}+\overrightarrow{\mathrm{PA}}-\overrightarrow{\mathrm{PK}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{\mathrm{P}\Lambda}-3\overrightarrow{\mathrm{PM}}-2\overrightarrow{\mathrm{PK}}=\vec{0}$$

$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{\mathrm{P}\Lambda}=3\overrightarrow{\mathrm{PM}}+2\overrightarrow{\mathrm{PK}}$ που ισχύει.

Επομένως ισχύει και η αρχική σχέση (1).

GI_V_MATHP_2_20055

Θεωρούμε τα σημεία $A(\alpha+1,3), B(\alpha,4)$ και $\Gamma(-4,5\alpha+4)$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B\Gamma}$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε για ποια τιμή του α, τα A, B, Γ είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 10)

γ) Αν $\alpha=1$, να βρείτε αριθμό λ ώστε: $\overrightarrow{A\Gamma}=\lambda\overrightarrow{AB}$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ:

α) $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A)=(\alpha-\alpha-1,4-3)=(-1,1)$ και

$\overrightarrow{B\Gamma}=(x_\Gamma-x_B,y_\Gamma-y_B)=(-4-\alpha,5\alpha+4-4)=(-4-\alpha,5\alpha)$.

β) Τα A, B, Γ είναι συνευθειακά αν και μόνο αν

$$\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{B\Gamma}\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B\Gamma}\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -4-\alpha & 5\alpha\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow -5\alpha-(-4-\alpha)=0$$

$$\Leftrightarrow -4\alpha+4=0\Leftrightarrow\alpha=1.$$

γ) Για $\alpha=1$ είναι $A(2,3)$, $B(1,4)$ και $\Gamma(-4,9)$

Άρα $\overrightarrow{A\Gamma}=(x_\Gamma-x_A,y_\Gamma-y_A)=(-4-2,9-3)=(-6,6)$.

Έτσι έχουμε: $\overrightarrow{A\Gamma}=\lambda\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow(-6,6)=\lambda(-1,1)\Leftrightarrow(-6,6)=(-\lambda,\lambda)\Leftrightarrow\begin{cases}-6=-\lambda\\ 6=\lambda\end{cases}\Leftrightarrow\lambda=6$.

GI_V_MATHP_2_20056

Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{2}$, $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \frac{5\pi}{6}$ και $\vec{u} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$.

α) Να υπολογίσετε τα γινόμενα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \cdot \vec{u}$.

(Μονάδες 16)

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}$

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ:

α) Είναι:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = 2 \cdot \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6} = 2 \cdot \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{6\pi - \pi}{6}\right) =$$

$$= 2 \cdot \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -2 \cdot \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} = -\cancel{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = -\sqrt{6}$$

Επομένως: $\boxed{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -\sqrt{6}}$.

Επίσης: $\vec{\beta} \cdot \vec{u} = \vec{\beta} \cdot \left(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}\right) = \vec{\beta} \cdot \vec{\alpha} + 2\left(\vec{\beta}\right)^2 = -\sqrt{6} + 2\left(\sqrt{2}\right)^2 = 4 - \sqrt{6}$

Επομένως: $\boxed{\vec{\beta} \cdot \vec{u} = 4 - \sqrt{6}}$

β) Κατά τα γνωστά έχουμε:

$$|\vec{u}|^2 = |\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}|^2 = \left(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}\right)^2 = \left(\vec{\alpha}\right)^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \left(2\vec{\beta}\right) + \left(2\vec{\beta}\right)^2 = |\vec{\alpha}|^2 + 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 4|\vec{\beta}|^2 =$$

$$= 2^2 + 4(-\sqrt{6}) + \left(\sqrt{2}\right)^2 = 4 - 4\sqrt{6} + 2 = 6 - 4\sqrt{6}$$

Επομένως: $\boxed{|\vec{u}| = \sqrt{6 - 4\sqrt{6}}}$.

GI_V_MATHP_2_20057

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=1, |\vec{\beta}|=2, (\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$. Να υπολογίσετε τα εξής:

α) το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και κατόπιν την τιμή της παράστασης $\vec{\alpha}^2+\vec{\alpha}(2\vec{\beta})$

(Μονάδες 10)

β) το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$ και $\vec{\beta}+2\vec{\alpha}$

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ:

α) Είναι:

$$\vec{\alpha}\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=1\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=1$$

Ακόμα

$$\vec{\alpha}^2+\vec{\alpha}(2\vec{\beta})=|\vec{\alpha}|^2+2(\vec{\alpha}\vec{\beta})=1+2\cdot 1=3$$

β) Υπολογίζουμε πρώτα τα: $(\vec{\alpha}-2\vec{\beta})(\vec{\beta}+2\vec{\alpha})$, $|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|, |\vec{\beta}+2\vec{\alpha}|$.

Είναι:

$$(\vec{\alpha}-2\vec{\beta})(\vec{\beta}+2\vec{\alpha})=\vec{\alpha}\vec{\beta}+2|\vec{\alpha}|^2-2|\vec{\beta}|^2-4\vec{\alpha}\vec{\beta}=-3\cdot 1+2\cdot 1-2\cdot 4=-9$$

$$|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|^2=(\vec{\alpha}-2\vec{\beta})^2=|\vec{\alpha}|^2-4\vec{\alpha}\vec{\beta}+4|\vec{\beta}|^2=1-4\cdot 1+4\cdot 4=13 \text{. Άρα } |\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|=\sqrt{13}$$

$$|\vec{\beta}+2\vec{\alpha}|^2=(\vec{\beta}+2\vec{\alpha})^2=|\vec{\beta}|^2+4\vec{\alpha}\vec{\beta}+4|\vec{\alpha}|^2=4+4\cdot 1+4\cdot 1=12 \text{. Άρα } |\vec{\beta}+2\vec{\alpha}|=\sqrt{12}$$

Επομένως

$$\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha}-2\vec{\beta},\vec{\beta}+2\vec{\alpha})=\frac{(\vec{\alpha}-2\vec{\beta})(\vec{\beta}+2\vec{\alpha})}{|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}||\vec{\beta}+2\vec{\alpha}|}=\frac{-9}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{12}}=\frac{-9\sqrt{13}\cdot\sqrt{3}}{13\cdot 3\cdot 2}=-\frac{3\sqrt{39}}{26}$$

GI_V_MATHP_2_20058

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=\left(-1,\sqrt{3}\right)$, $\vec{\beta}=\left(\sqrt{3},3\right)$. Να υπολογίσετε

α) τη γωνία $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$

(Μονάδες 10)

β) το διάνυσμα $\vec{u}=\vec{\alpha}^{2}\vec{\beta}-\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)^{2}\vec{\alpha}$.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ:

α) Υπολογίζουμε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-1\cdot\sqrt{3}+3\sqrt{3}=2\sqrt{3}$,

$$\left|\vec{\alpha}\right|=\sqrt{1+3}=2 \text{ και } \left|\vec{\beta}\right|=\sqrt{3+9}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

επομένως

$$\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|}=\frac{2\sqrt{3}}{2\cdot2\sqrt{3}}=\frac{1}{2} \text{ άρα η γωνία είναι } 60^{\circ}.$$

β) Ισχύει:

$$\vec{\alpha}^{2}=\left|\vec{\alpha}\right|^{2}=2^{2}=4 \text{ και } \left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)^{2}=\left|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right|^{2}=\left(2\sqrt{3}\right)^{2}=12$$

άρα

$$\vec{u}=4\vec{\beta}-12\vec{\alpha}=4\left(\sqrt{3},3\right)-12\left(-1,\sqrt{3}\right)=\left(4\sqrt{3}+12,12-12\sqrt{3}\right).$$

GI_V_MATHP_2_20059

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-1,3),\vec{\beta}=\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το θετικό αριθμό x για τον οποία τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}=(x^2,x-1)$ είναι κάθετα.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ:

α) Έχουμε $\vec{u}=(-1,3)-2\left(-2,-\frac{1}{2}\right)=(-1,3)+(4,1)=(3,4)$

β) Ισχύει $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow 3x^2+4(x-1)=0\Leftrightarrow 3x^2+4x-4=0$.

Το τριώνυμο έχει $\Delta=64$ και ρίζες $x=-2<0,x=\frac{2}{3}>0$ από τις οποίες δεκτή είναι η $x=\frac{2}{3}$.

GI_V_MATHP_2_20060

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,-1)$ και $\vec{\beta}=(3,0)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u}=4\vec{\alpha}-\frac{1}{3}\vec{\beta}$

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{\vec{u}^2}{5}$ και διέρχεται από το σημείο $A\left(1,\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+2\right)$

Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ:

α) Είναι: $\vec{u}=4\vec{\alpha}-\frac{1}{3}\vec{\beta}=4\cdot(1,-1)-\frac{1}{3}\cdot(3,0)=(4,-4)-(1,0)=(3,-4)$

β) Είναι: $\left|\vec{u}\right|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

Άρα $\frac{\vec{u}^2}{5}=\frac{\left|\vec{u}\right|^2}{5}=\frac{5^2}{5}=5$

Ακόμη $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=(1,-1)\cdot(3,0)=1\cdot 3-1\cdot 0=3-0=3$,

Συνεπώς $A(1,5)$

Επομένως η ευθεία που αναζητούμε περνάει από το σημείο $A(1,5)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=5$.

Εφαρμόζουμε τον τύπο $\varepsilon: y-y_0=\lambda(x-x_0)$

Έτσι $\varepsilon: y-5=5\cdot(x-1)\Leftrightarrow y-5=5x-5$

Δηλαδή $\varepsilon: y=5x$

GI_V_MATHP_2_20061

Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ με τρεις κορυφές τα σημεία $Α(1,1)$, $Γ(4,3)$ και $Δ(2,3)$.

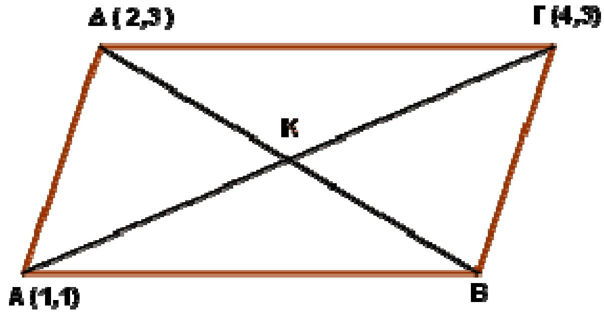
α) Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του $ΑΒΓΔ$.

(Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής $Κ$ των διαγωνίων $ΑΓ$ και $ΒΔ$, καθώς και τις συντεταγμένες της κορυφής $Β$.

(Μονάδες 16)

ΛΥΣΗ:



α) Είναι $\overrightarrow{ΑΔ}=(2-1,3-1)=(1,2)$ και $\overrightarrow{ΔΓ}=(4-2,3-3)=(2,0)$

Έτσι $(ΒΓ)=(ΑΔ)=\left|\overrightarrow{ΑΔ}\right|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ και $(ΑΒ)=(ΔΓ)=\left|\overrightarrow{ΔΓ}\right|=\sqrt{2^2+0^2}=\sqrt{4}=2$

β) Το σημείο $Κ$ είναι μέσο του $ΑΓ$, επομένως οι συντεταγμένες του σημείου είναι:

$Κ\left(\frac{x_Α+x_Γ}{2},\frac{y_Α+y_Γ}{2}\right)$, άρα $Κ\left(\frac{1+4}{2},\frac{1+3}{2}\right)=Κ\left(\frac{5}{2},2\right)$

Έστω $Β(x,y)$, άρα $\overrightarrow{ΑΒ}=(x-1,y-1)$

Είναι

$\overrightarrow{ΑΒ}=\overrightarrow{ΔΓ}\Leftrightarrow(x-1,y-1)=(2,0)\Leftrightarrow x-1=2\Leftrightarrow x-1=2$ και $y-1=0\Leftrightarrow x=3$ και $y=1$

Επομένως $Β(3,1)$

GI_V_MATHP_2_20062

Δίνονται τα σημεία $A(1,-2), B(2,3)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα A, B.

(Μονάδες 11)

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $OK\Lambda$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων και K, Λ είναι τα σημεία τομής της ευθείας με τους άξονες $x'x, y'y$ αντίστοιχα.

(Μονάδες 14)

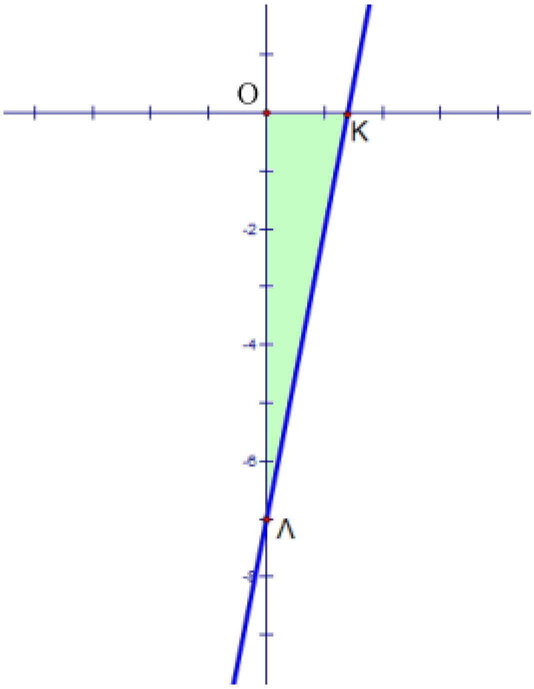
ΛΥΣΗ:

α) Αφού $x_A \neq x_B$, ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης για το AB και είναι ίσος με $\lambda = \dfrac{3-(-2)}{2-1} = 5$.

Η ευθεία διέρχεται από το B άρα θα έχει εξίσωση: $(\varepsilon): y-3 = 5(x-2) \Leftrightarrow y = 5x-7$

β) Για $x=0$ έχουμε $y=-7$ και για $y=0$ έχουμε $x=\dfrac{7}{5}$ άρα $K\left(\dfrac{7}{5},0\right)$ και $\Lambda(0,-7)$.

Το εμβαδόν επομένως είναι $(OK\Lambda) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{7}{5}\cdot 7 = \dfrac{49}{10}$ τ.μ.



GI_V_MATHP_2_20063

Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα AB με μέσο M και $A(1,-2), M(-2,5)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου B.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου ε του AB καθώς και τα κοινά της σημεία με τους άξονες.

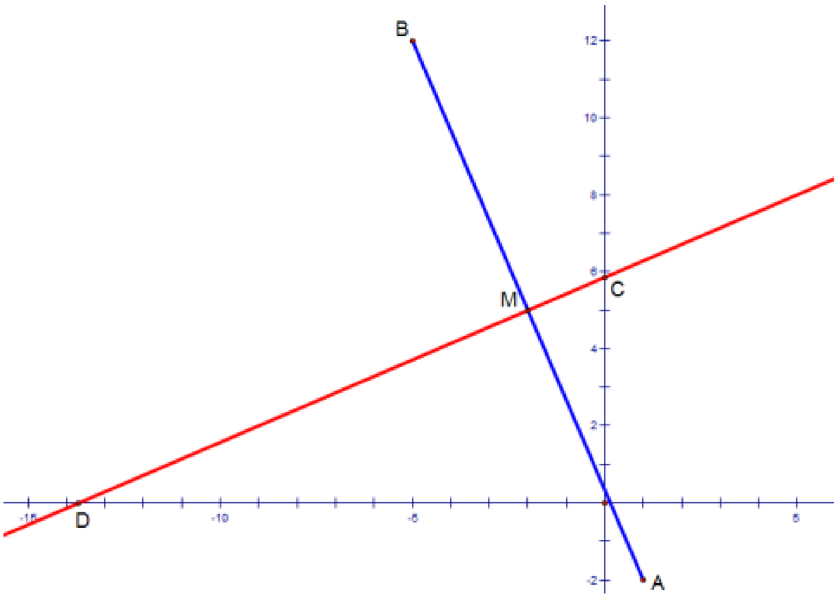
(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ:

α) Αν $B(x,y)$ τότε ισχύουν $\begin{cases} \frac{x+1}{2}=-2 \\ \frac{y-2}{2}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=-4 \\ y-2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=12 \end{cases}$ άρα $B(-5,12)$.

β) Για το AB ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης $\lambda_{AB}=\frac{12-(-2)}{-5-1}=-\frac{7}{3}$ άρα η κάθετη θα έχει $\lambda=\frac{3}{7}$ και αφού διέρχεται από το M θα έχει εξίσωση $(\epsilon): y-5=\frac{3}{7}(x+2) \Leftrightarrow y=\frac{3}{7}x+\frac{41}{7}$.

Για $x=0$ έχουμε $y=\frac{41}{7}$ και για $y=0$ έχουμε $x=-\frac{41}{3}$ άρα $C\left(0,\frac{41}{7}\right)$ και $D\left(-\frac{41}{3},0\right)$.



GI_V_MATHP_2_20065

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: x+y+2=0$ και το σημείο $A(5,1)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η_1, η οποία διέρχεται από το A και είναι κάθετη προς την ευθεία ε.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η_2, η οποία διέρχεται από το A και είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών η_1 και η_2 και την απόστασή του από την αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ:

α) Επειδή $\lambda_\varepsilon=-1$ και $\eta_1 \perp \varepsilon$, η ευθεία η_1 έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1=1$ και επειδή διέρχεται από το σημείο A έχει εξίσωση:

$$\eta_1: y-1=1(x-5) \Leftrightarrow y=x-4$$

β) Επειδή η ευθεία η_2 είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2=0$ και επειδή διέρχεται από το σημείο A έχει εξίσωση:

$$\eta_2: y=y_A \Leftrightarrow y=1.$$

γ) Επειδή και η η_1 και η η_2 διέρχονται από το A προφανώς το σημείο τομής τους είναι το $A(5,1)$. Η απόσταση του A από την αρχή των αξόνων είναι: $(OA)=\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{26}$.

GI_V_MATHP_2_20066

Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με κορυφές τα σημεία $Α(3,1)$, $Β(-1,1)$ και $Γ(2,4)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς $ΑΓ$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις του ύψους $ΒΔ$ και της διαμέσου $ΑΜ$.

(Μονάδες 18)

ΛΥΣΗ:

α) Ο συντελεστής διεύθυνσης της $ΑΓ$ είναι $λ_{ΑΓ}=\dfrac{4-1}{2-3}=-3$, οπότε

$$ΑΓ: y-y_Α=λ_{ΑΒ}(x-x_Α)\Leftrightarrow y-1=-3(x-3)\Leftrightarrow y-1=-3x+9\Leftrightarrow y=-3x+10.$$

β) Η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται το ύψος $ΒΔ$ είναι κάθετη στην $ΑΓ$ και διέρχεται από το σημείο $Β$, οπότε $λ_{ΒΔ}\cdot λ_{ΑΓ}=-1\Leftrightarrow λ_{ΒΔ}=\dfrac{1}{3}$ και

$$ΒΔ: y-y_Β=λ_{ΒΔ}(x-x_Β)\Leftrightarrow y-1=\frac{1}{3}(x+1)\Leftrightarrow y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}\Leftrightarrow x-3y+4=0.$$

Το μέσο $Μ$ της $ΒΓ$ έχει συντεταγμένες: $x_Μ=\dfrac{-1+2}{2}=\dfrac{1}{2}$ και $y_Μ=\dfrac{1+4}{2}=\dfrac{5}{2}$

δηλαδή $Μ\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{2}\right)$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της $ΑΜ$ είναι $λ_{ΑΜ}=\dfrac{\frac{5}{2}-1}{\frac{1}{2}-3}=-\dfrac{3}{5}$, οπότε

$$ΑΜ: y-y_Α=λ_{ΑΜ}(x-x_Α)\Leftrightarrow y-1=-\frac{3}{5}(x-3)\Leftrightarrow 5y-5=-3x+9\Leftrightarrow 3x+5y=14$$

GI_V_MATHP_2_20068

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $Α(-5,4)$, $Β(-1,6)$, $Γ(4,1)$ και σημείο Μ της πλευράς ΑΒ για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Μ.

(Μονάδες 9)

γ) Αν το σημείο Μ έχει συντεταγμένες $\left(4,-\frac{9}{2}\right)$, να υπολογίσετε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Γ, Μ.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ:

α) Είναι: $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A)=(-1-(-5),6-4)=(4,2)$.

β) Έστω $M(x_M,y_M)$. Τότε έχουμε

$$\overrightarrow{AM}=(x_M-x_A,y_M-y_A)=(x_M+5,y_M-4)$$

Άρα $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow(x_M+5,y_M-4)=\frac{1}{4}(4,2)\Leftrightarrow(x_M+5,y_M-4)=\left(1,\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_M+5=1\\ y_M-4=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M=-4\\ y_M=\frac{9}{2}\end{cases}.\ \text{Άρα } M\left(-4,\frac{9}{2}\right).$$

γ) Επειδή $x_M=x_Γ$ για την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Μ, Γ δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης, η ευθεία αυτή είναι κατακόρυφη με εξίσωση $ΜΓ: x=4$.

GI_V_MATHP_2_20069

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,-3)$ και $\vec{\beta}=\left(1,\frac{1}{2}\right)$.

α) Να βρείτε την προβολή του $\vec{\alpha}$ πάνω στο $\vec{\beta}$.

(Μονάδες 10)

β) Να αναλύσετε το $\vec{\alpha}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη με το $\vec{\beta}$.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ:

α) Η προβολή του διανύσματος $\vec{\alpha}$ πάνω στο $\vec{\beta}$ είναι παράλληλη στο $\vec{\beta}$, άρα ισχύει

$\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}=\lambda\cdot\vec{\beta} \quad (1)$

Επίσης ισχύει: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\left(\lambda\cdot\vec{\beta}\right) \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\lambda\cdot\vec{\beta}^2 \Leftrightarrow$.

$$\Leftrightarrow \lambda=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\vec{\beta}^2}=\frac{2\cdot1-3\cdot\frac{1}{2}}{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}} \Leftrightarrow \lambda=\frac{2}{5}$$

Άρα $\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}=\lambda\cdot\vec{\beta}=\frac{2}{5}\cdot\left(1,\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)$.

β) Έστω $\vec{x},\vec{y}$ οι δύο ζητούμενες συνιστώσες του $\vec{\alpha}$.

Οπότε ισχύει $\vec{\alpha}=\vec{x}+\vec{y}$, $\vec{x}\perp\vec{y}$ και $\vec{x}\parallel\vec{\beta}$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $\vec{x}=\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}=\left(\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)$

και $\vec{y}=\vec{\alpha}-\vec{x}=(2,-3)-\left(\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)=\left(\frac{8}{5},-\frac{16}{5}\right)$.

GI_V_MATHP_2_20070

Έστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα του επιπέδου για τα οποία ισχύουν

$$3|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|=9,\ 2|\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|=1 \text{ και } \left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{3}.$$

α) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}=2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ:

α) Έστω $3|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|=9$ (1) και $2|\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|=1$ (2) οι δοθείσες σχέσεις. Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε: $5|\vec{\alpha}|=10 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|=2$ και από την (1) για $|\vec{\alpha}|=2$ βρίσκουμε $|\vec{\beta}|=3$.

Επιπλέον από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου έχουμε:

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=2\cdot3\cdot\frac{1}{2}=3$$

β) Αρχικά θα υπολογίσουμε το τετράγωνο του μέτρου για το διάνυσμα $\vec{u}$. Έχουμε:

$$\vec{u}=2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\Rightarrow|\vec{u}|=|2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}|\Rightarrow$$
$$|\vec{u}|^2=|2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}|^2\Rightarrow$$
$$|\vec{u}|^2=\left(2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right)^2\Rightarrow$$
$$|\vec{u}|^2=4\vec{\alpha}^2-12\hat{\vec{\alpha}\vec{\beta}}+9\vec{\beta}^2\Rightarrow$$
$$|\vec{u}|^2=4|\vec{\alpha}|^2-12\hat{\vec{\alpha}\vec{\beta}}+9|\vec{\beta}|^2\Rightarrow$$
$$|\vec{u}|^2=4\cdot2^2-12\cdot3+9\cdot3^2\Rightarrow$$
$$|\vec{u}|^2=61\Rightarrow$$
$$|\vec{u}|=\sqrt{61}$$

GI_V_MATHP_2_20071

Θεωρούμε τα σημεία $A(1+2\alpha, 4\alpha-2)$ και $B(5\alpha+1, -\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{Z}$.

α) Να γράψετε το $\overrightarrow{AB}$ συναρτήσει του α και να βρείτε το α ώστε $|\overrightarrow{AB}| = 10$.

(Μονάδες 12)

β) Έστω $\alpha = 2$. Να βρείτε σημείο M του άξονα $x'x$ ώστε το τρίγωνο MAB να είναι ισοσκελές με βάση την AB.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ:

α) Είναι $\overrightarrow{AB} = (5\alpha+1-1-2\alpha, -\alpha-4\alpha+2) = (3\alpha, 2-5\alpha)$ και

$$|\overrightarrow{AB}| = 10 \Leftrightarrow \sqrt{(3\alpha)^2 + (2-5\alpha)^2} = 10 \Leftrightarrow 9\alpha^2 + 4 - 20\alpha + 25\alpha^2 = 100 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 34\alpha^2 - 20\alpha - 96 = 0 \Leftrightarrow 17\alpha^2 - 10\alpha - 48 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει λύσεις $\alpha = 2$, $\alpha = -\dfrac{24}{17} \notin \mathbb{Z}$. Άρα $\alpha = 2$.

β) Για $\alpha = 2$ έχουμε $A(5,6)$ και $B(11,-2)$. Έστω $M(x,0)$ ώστε $MA = MB$.

Οπότε: $(MA)^2 = (MB)^2 \Leftrightarrow (x-5)^2 + (-6)^2 = (x-11)^2 + 2^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 + 36 = x^2 - 22x + 125 \Leftrightarrow 12x = 64 \Leftrightarrow x = \frac{16}{3},$$

άρα $M\left(\dfrac{16}{3}, 0\right)$.

GI_V_MATHP_2_20072

Θεωρούμε μια ευθεία (ε) και ένα σημείο $A(6,-1)$ εκτός της (ε).

Έστω $M(2,1)$ η προβολή του A στην (ε). Να βρείτε:

α) Την εξίσωση της ευθείας (ε).

(Μονάδες 13)

β) Το συμμετρικό του A ως προς την (ε).

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ:

α) Επειδή $\lambda_{AM} = \dfrac{1-(-1)}{2-6} = -\dfrac{1}{2}$ και $AM \perp (\varepsilon)$ είναι $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{AM} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = 2$.

Άρα $(\varepsilon): y - y_M = \lambda_\varepsilon (x - x_M) \Leftrightarrow y - 1 = 2(x-2) \Leftrightarrow y = 2x - 3$

β) Έστω $B(x_B, y_B)$ το συμμετρικό του A ως προς την (ε).

Τότε ισχύει

$$\frac{6+x_B}{2} = 2 \Leftrightarrow x_B = -2 \text{ και } \frac{-1+y_B}{2} = 1 \Leftrightarrow y_B = 3 \ .$$

Άρα $B(-2,3)$.

GI_V_MATHP_2_20073

Δίνονται τα σημεία $A(2,3)$, $B(-1,5)$ και $\Gamma(-2,-4)$.

α) Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το συμμετρικό Δ του B ως προς το μέσο M της $A\Gamma$.

(Μονάδες 10)

γ) Τι σχήμα είναι το $AB\Gamma\Delta$; Να αιτιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ:

α) Επειδή $\lambda_{A\Gamma}=\frac{-4-3}{-2-2}=\frac{7}{4}$ και $\lambda_{AB}=\frac{5-3}{-1-2}=-\frac{2}{3}$, οι AB, $A\Gamma$ δεν είναι παράλληλες, άρα τα σημεία A,B,Γ δεν είναι συνευθειακά και σχηματίζουν τρίγωνο.

Αλλιώς: $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\neq 0$.

β) Το μέσο M της $A\Gamma$ έχει συντεταγμένες: $x_M=\frac{2-2}{2}=0$ και $y_M=\frac{3-4}{2}=-\frac{1}{2}$ δηλαδή $M\left(0,-\frac{1}{2}\right)$. Έστω $\Delta(x_\Delta,y_\Delta)$ το συμμετρικό του B ως προς το μέσο M της $A\Gamma$.

Τότε ισχύει

$$\frac{-1+x_\Delta}{2}=x_M \Leftrightarrow x_\Delta=1 \text{ και } \frac{5+y_\Delta}{2}=y_M \Leftrightarrow \frac{5+y_\Delta}{2}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow y_\Delta=-6.$$

Άρα $\Delta(1,-6)$.

γ) Το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο γιατί οι διαγώνιοί του $A\Gamma$ και $B\Delta$ έχουν κοινό μέσο το M, δηλαδή διχοτομούνται.

GI_V_MATHP_2_20140

Δίνεται τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $A(3,2), B(-3,1), \Gamma(4,0)$

α) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς AB

(Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους $\Gamma\Delta$, καθώς και την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκεται αυτό.

(Μονάδες 16)

ΛΥΣΗ:

α) $(AB): y\text{-}2=\dfrac{1-2}{-3-3}(x-3) \Leftrightarrow y-2=\dfrac{1}{6}(x-3) \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{6}x+\dfrac{3}{2}$

β) Η ΑΒ έχει συντελεστή $\lambda_{AB}=\dfrac{1}{6}$, επομένως η $\Gamma\Delta$ ως κάθετη στην ΑΒ

θα έχει συντελεστή $\lambda_{\Gamma\Delta}=-6$ και αφού διέρχεται από το Γ θα έχει εξίσωση :

$$y-0=-6(x-4) \Leftrightarrow y=-6x+24$$

Το μήκος του ύψους $\Gamma\Delta$ είναι ίσο με την απόσταση $d(\Gamma, AB)$

Είναι $\Gamma(4,0)$ και $(AB): x-6y+9=0$

Επομένως $(\Gamma\Delta)=d(\Gamma,AB)=\dfrac{|4-6\cdot 0+9|}{\sqrt{1^2+6^2}}=\dfrac{13}{\sqrt{37}}=\dfrac{13\sqrt{37}}{37}$

Σχόλιο: Είναι η GI_V_MATHP_2_20067, που αποσύρθηκε, με διορθωμένη εκφώνηση.

GI_V_MATHP_2_20148

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=\vec{i}-2\vec{j}$, $\vec{\beta}=2\vec{i}-5\vec{j}$ και $\vec{\gamma}=(7,3)$

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ είναι μη συγγραμμικά ανά δύο .

(Μονάδες 10)

β) Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ:

α) Είναι $\vec{\alpha}=(1,-2)$, $\vec{\beta}=(2,-5)$ και $\vec{\gamma}=(7,3)$

Επομένως έχουν συντελεστές διεύθυνσης :

$$\lambda_{\vec{\alpha}}=\frac{-2}{1}=-2\ ,\quad \lambda_{\vec{\alpha}}=\frac{-5}{2}=-\frac{5}{2}\quad \text{και}\quad \lambda_{\vec{\alpha}}=\frac{3}{7}\ \text{ αντίστοιχα.}$$

Αφού οι συντελεστές διεύθυνσης είναι ανά δύο διαφορετικοί, τότε τα διανύσματα είναι μη συγγραμμικά ανά δύο.

β) Θέλουμε να γράψουμε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ στη μορφή:

$$\vec{\gamma}=\kappa\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}\quad \text{με}\ \kappa,\mu\in\mathbb{R}$$

Επομένως $(7,3)=\kappa(1,-2)+\mu(2,-5)\Leftrightarrow(7,3)=(\kappa,-2\kappa)+(2\mu,-5\mu)$

$$\Leftrightarrow(7,3)=(\kappa+2\mu,-2\kappa-5\mu)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\kappa+2\mu=7\\-2\kappa-5\mu=3\end{cases}\overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow}\begin{cases}2\kappa+4\mu=14 & (1)\\-2\kappa-5\mu=3 & (2)\end{cases}$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει $\mu=-17$ και με αντικατάσταση $\kappa=41$, άρα $\vec{\gamma}=41\vec{\alpha}-17\vec{\beta}$.

GI_V_MATHP_2_18556

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{3}$ και $|\vec{\alpha}|=\sqrt{2}$, $|\vec{\beta}|=2\sqrt{2}$

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

(Μονάδες 8)

β) Αν τα διανύσματα $2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ είναι κάθετα να βρείτε την τιμή του κ.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ:

α) Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=2\cdot\sqrt{2}^2\cdot\frac{1}{2}=2$

β) $\left(2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\perp\left(\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\Leftrightarrow\left(2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\cdot\left(\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)=0\Leftrightarrow 2\kappa\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\kappa\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\kappa|\vec{\alpha}|^2+2\cdot 2+\kappa\cdot 2+|\vec{\beta}|^2=0\Leftrightarrow 2\kappa\sqrt{2}^2+2\cdot 2+\kappa\cdot 2+\left(2\sqrt{2}\right)^2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\kappa+4+2\kappa+8=0\Leftrightarrow 6\kappa=-12\Leftrightarrow\kappa=-2.$$

γ) Είναι

$$\left|2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2=\left(2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2=\left(2\vec{\alpha}\right)^2+2\cdot 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=4|\vec{\alpha}|^2+4\vec{\alpha}\vec{\beta}+|\vec{\beta}|^2=4\sqrt{2}^2+4\cdot 2+\left(2\sqrt{2}\right)^2=$$

$$=4\cdot 2+4\cdot 2+4\cdot 2=24$$

Τότε είναι $\left|2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\sqrt{24}=\sqrt{4\cdot 6}=2\cdot\sqrt{6}$