mathematica.gr

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

Μαθηματικά Προσανατολισμού

Β΄ Γενικού Ημερησίου Λυκείου

4^{ο} ΘΕΜΑ

Εκφωνήσεις - Λύσεις

των

θεμάτων

Έκδοση 1^{η} (19/11/2014)

Οι απαντήσεις και οι λύσεις
είναι αποτέλεσμα συλλογικής δουλειάς
μελών του Δικτυακού Τόπου **mathematica.gr**
με βάση υλικό που αναρτήθηκε στο mathematica
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=147&t=46869

Συνεργάστηκαν οι:

Γιώργος Απόκης, Γιώργος Βισβίκης, Δημήτρης Ιωάννου
Βασίλης Κακαβάς, Ηλίας Καμπελής, Σωτήρης Λουρίδας,
Στέλιος Μαρίνης, Θανάσης Μπεληγιάννης, Περικλής Παντούλας,
Θανάσης Παπασταθόπουλος, Γιώργος Ρίζος, Μπάμπης Στεργίου,
Κώστας Τηλέγραφος, Χρήστος Τσιφάκης, Σωτήρης Χασάπης

Την αποδελτίωση και σελιδοποίηση έκαναν οι:
Περικλής Παντούλας, Γιώργος Ρίζος, Κώστας Τηλέγραφος

Το **Δελτίο** διατίθεται ελεύθερα
από το δικτυακό τόπο **mathematica.gr**

Θέματα $4^{ης}$ Ομάδας
Μαθηματικά Προσανατολισμού Β΄ Λυκείου

GI_V_MATHP_4_18606 *[παράγραφος 1.5]*

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=(4,-2)$ και $\overrightarrow{OB}=(1,2)$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ είναι κάθετα.

(Μονάδες 4)

β) Αν $\Gamma(\alpha,\beta)$ είναι σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B, τότε:

i) να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{AB}=(-3,4)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(\alpha-4,\beta+2)$.

(Μονάδες 5)

ii) να αποδείξετε ότι: $4\alpha+3\beta=10$.

(Μονάδες 6)

iii) αν επιπλέον τα διανύσματα $\overrightarrow{O\Gamma}$ και $\overrightarrow{AB}$ είναι κάθετα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ:

α) Για να δείξουμε ότι τα διανύσματα είναι κάθετα, αρκεί να δείξουμε ότι το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν. Όντως έχουμε από την αναλυτική έκφραση του εσωτερικού γινομένου:

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(4,-2)\cdot(1,2)=4\cdot 1+(-2)\cdot 2=0,\ \text{άρα}\ \overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}.$$

βi) Αφού τα $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ είναι οι διανυσματικές ακτίνες των A, B, είναι $A(4,-2)$, $B(1,2)$, οπότε

$$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A)=(1-4,2-(-2))=(-3,4)$$

και

$$\overrightarrow{A\Gamma}=(x_\Gamma-x_A,y_\Gamma-y_A)=(\alpha-4,\beta-(-2))=(\alpha-4,\beta+2)$$

ii) Αφού το Γ είναι σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B, τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά και συνεπώς τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ έχουν κοινό φορέα, οπότε η ορίζουσά τους είναι μηδέν. Είναι:

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}-3 & 4\\ \alpha-4 & \beta+2\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow -3(\beta+2)-4(\alpha-4)=0$$

$$\Leftrightarrow -3\beta-6-4\alpha+16=0\Leftrightarrow 4\alpha+3\beta=10$$

ΑΛΛΗ ΛΥΣΗ:

Είναι $\lambda_{AB} = -\frac{4}{3}$, οπότε η ευθεία που διέρχεται από τα A, B έχει εξίσωση

$$y - 2 = -\frac{4}{3}(x - 1) \Leftrightarrow 3y - 6 = -4x + 4 \Leftrightarrow 4x + 3y = 10.$$

Αφού το Γ ανήκει στην ευθεία, οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της, άρα είναι $4\alpha + 3\beta = 10$.

iii) Η διανυσματική ακτίνα του Γ είναι $\overrightarrow{O\Gamma} = (\alpha, \beta)$, οπότε, αφού $\overrightarrow{O\Gamma} \perp \overrightarrow{AB}$, το εσωτερικό τους γινόμενο θα είναι μηδέν.

Οπότε $\overrightarrow{O\Gamma} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow (\alpha, \beta) \cdot (-3, 4) = 0 \Leftrightarrow -3\alpha + 4\beta = 0$

Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} 4\alpha + 3\beta = 10 \\ -3\alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \xrightarrow[\cdot 4]{\cdot 3} \begin{cases} 12\alpha + 9\beta = 30 \\ -12\alpha + 16\beta = 0 \end{cases}$

οπότε, προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε $25\beta = 30 \Leftrightarrow \beta = \frac{6}{5}$

Άρα $4\alpha = 10 - \frac{18}{5} \Leftrightarrow 4\alpha = \frac{32}{5} \Leftrightarrow \alpha = \frac{8}{5}$

GI_V_MATHP_4_18609 *[παράγραφος 1.5]*

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\overrightarrow{AB}=(\lambda,\lambda+1)$, $\overrightarrow{A\Gamma}=(3\lambda,\lambda-1)$, όπου $\lambda\neq 0$ και $\lambda\neq -2$, και Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AM}=(2\lambda,\lambda)$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\alpha}=\left(\frac{2}{\lambda},-\lambda\right)$.

(Μονάδες 8)

γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β), να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ:

α) Αφού το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, η διανυσματική του ακτίνα, θεωρώντας ως σημείο αναφοράς το Α, θα ισούται με το ημιάθροισμα των διανυσματικών ακτίνων των άκρων. Δηλαδή είναι:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}\right)=\frac{1}{2}(4\lambda,2\lambda)=(2\lambda,\lambda)$$

β) Τα διανύσματα $\overrightarrow{AM}$ και $\vec{\alpha}$ θέλουμε να είναι κάθετα, οπότε το εσωτερικό τους γινόμενο θα πρέπει να είναι μηδέν. Έχουμε λοιπόν:

$$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{\alpha}=0\Leftrightarrow(2\lambda,\lambda)\left(\frac{2}{\lambda},-\lambda\right)=0\Leftrightarrow 4-\lambda^2=0\overset{\lambda\neq-2}{\Leftrightarrow}\lambda=2$$

γ) Για $\lambda=2$ έχουμε $\overrightarrow{AB}=(2,3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(6,1)$.

Τότε:

$$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}2 & 3\\ 6 & 1\end{matrix}\right\|\Leftrightarrow(AB\Gamma)=8\ \text{τ.μ.}$$

GI_V_MATHP_4_18610 *[παράγραφος 2.2]*

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x - y - 10\lambda + 16 = 0$ και $\varepsilon_2: 10x + y - 2\lambda - 4 = 0$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους M.

(Μονάδες **7**)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ το σημείο M ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: 8x + y - 6 = 0$.

(Μονάδες **7**)

γ) Αν η ευθεία ε τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία A και B αντίστοιχα, τότε:

i) να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ που διέρχεται από την αρχή O των αξόνων και είναι παράλληλη προς την ευθεία AB.

(Μονάδες **5**)

ii) αν K είναι τυχαίο σημείο της ευθείας ζ, να αποδείξετε ότι $(KAB) = \frac{9}{4}$.

(Μονάδες **6**)

ΛΥΣΗ:

α) Για να δείξουμε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται,αρκεί να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεών τους και να δείξουμε ότι έχει λύση για κάθε τιμή της παραμέτρου λ.

Έχουμε λοιπόν: $\begin{cases} 2x - y - 10\lambda + 16 = 0 \\ 10x + y - 2\lambda - 4 = 0 \end{cases}$.

Προσθέτοντας κατά μέλη είναι $12x = 12\lambda - 12 \Leftrightarrow x = \lambda - 1$,

οπότε, $y = 2\lambda + 4 - 10(\lambda - 1) = -8\lambda + 14$.

Αφού το σύστημά τους δεν είναι αδύνατο, οι ευθείες τέμνονται στο σημείο $M(\lambda - 1, -8\lambda + 14)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

β) Έστω $M(x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}$ οι συντεταγμένες του σημείου $M(\lambda - 1, -8\lambda + 14)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Τότε είναι:

$$\begin{cases} x = \lambda - 1 \\ y = -8\lambda + 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x = 8\lambda - 8 & (1) \\ y = -8\lambda + 14 & (2) \end{cases}$$

Θα απαλείψουμε την παράμετρο λ, προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις.

Οπότε $(1) + (2) \Rightarrow 8x + y - 6 = 0$. Δηλαδή το σημείο M ανήκει στην ευθεία

$$(\varepsilon): 8x + y - 6 = 0 \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}.$$

γi) Η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τεταγμένη 0, οπότε για $y=0$ έχουμε: $8x+0=6 \Leftrightarrow x=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$. Δηλαδή η (ε) τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A\left(\frac{3}{4},0\right)$.

Η (ε) τέμνει τον άξονα $y'y$ σε σημείο με τετμημένη 0, οπότε είναι για $x=0$:

$$8\cdot 0+y=6 \Leftrightarrow y=6.$$

Δηλαδή η (ε) τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $B(0,6)$.

Η ευθεία AB έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{6-0}{0-\frac{3}{4}}=-\frac{6}{\frac{3}{4}}=-8$. Η ζητούμενη ευθεία (ζ) είναι παράλληλη στην AB, οπότε έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης. Δηλαδή $(\zeta)//AB \Leftrightarrow \lambda_\zeta=\lambda_{AB} \Leftrightarrow \lambda_\zeta=-8$. Επιπλέον η (ζ) διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Συνεπώς η εξίσωση της ευθείας (ζ) είναι:

$$y=\lambda_\zeta x \Leftrightarrow y=-8x$$

ii) Έστω $K(x,y)=(x,-8x), x\in\mathbb{R}$ τυχαίο σημείο της (ζ).

Τότε $\overrightarrow{AK}=\left(x-\frac{3}{4},-8x\right)$ και $\overrightarrow{BK}=(x,-8x-6)$ και

$$(KAB)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{BK}\right)\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x-\frac{3}{4} & -8x \\ x & -8x-6\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|-8x^2+6x-6x+\frac{9}{2}+8x^2\right|=\frac{9}{4}$$

Σχόλιο: Το εμβαδόν είναι ανεξάρτητο από την επιλογή του σημείου K, γιατί η ευθεία ζ στην οποία ανήκει το K είναι παράλληλη στην ευθεία AB. Συνεπώς θεωρώντας ως βάση του τριγώνου KAB την AB, για οποιοδήποτε σημείο K της ζ, το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση είναι σταθερό και ίσο με την απόσταση των παράλληλων ευθειών.

GI_V_MATHP_4_18611 *[παράγραφος 2.3]*

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: x-4y-7=0$ και τα σημεία $A(-2,4)$ και $B(2,6)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου M της ευθείας ε το οποίο ισαπέχει από τα σημεία A και B.

(Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου MAB.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $K(x,y)$ για τα οποία ισχύει $(KAB)=(MAB)$ ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις τις: $x-2y-5=0$ και $x-2y+25=0$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ:

α) Η (ε) γράφεται $x-4y-7=0 \Leftrightarrow x=4y+7$.

Επειδή το σημείο M ανήκει στην ευθεία ε, οι συντεταγμένες του θα ικανοποιούν την εξίσωση της ε και συνεπώς θα είναι της μορφής $M(4\alpha+7,\alpha), \alpha\in\mathbb{R}$ και θα ισχύει:

$$(MA)=(MB) \Leftrightarrow \sqrt{(4\alpha+9)^2+(\alpha-4)^2}=\sqrt{(4\alpha+5)^2+(\alpha-6)^2} \Leftrightarrow$$

$$16\alpha^2+72\alpha+81+\alpha^2-8\alpha+16=16\alpha^2+40\alpha+25+\alpha^2-12\alpha+36 \Leftrightarrow$$

$$36\alpha=-36 \Leftrightarrow \alpha=-1$$

Άρα το σημείο M της ευθείας ε το οποίο ισαπέχει από τα σημεία A και B είναι το $M(3,-1)$.

β) Έχουμε $\overrightarrow{AM}=(5,-5)$ και $\overrightarrow{AB}=(4,2)$, οπότε:

$$(MAB)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{AB}\right)\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}5 & -5\\ 4 & 2\end{matrix}\right\|=15 \text{ τ.μ.}$$

γ) Έχουμε τα σημεία $A(-2,4)$, $B(2,6)$, $M(3,-1)$ και $K(x,y)$. Τότε:

- ✓ $\overrightarrow{AK}=(x_K-x_A, y_K-y_A)=(x+2,y-4)$
- ✓ $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A, y_B-y_A)=(4,2)$
- ✓ $(MAB)=15$ και
- ✓ $(KAB)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AB}\right)\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}x+2 & y-4\\ 4 & 2\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|2(x+2)-4(y-4)\right|=$

$$\frac{1}{2}|2x+4-4y+16|=\frac{1}{2}|2x-4y+20|=|x-2y+10|$$

Τότε από την ισότητα των εμβαδών έχουμε $(KAB)=(MAB) \Leftrightarrow |x-2y+10|=15$

Άρα τα σημεία K(x, y) ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις:

$$x-2y-5=0 \quad \text{και} \quad x-2y+25=0$$

GI_V_MATHP_4_18612 *[παράγραφος 2.2]*

Δίνεται η εξίσωση: $x^2+2xy+y^2-6x-6y+8=0$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει γεωμετρικά δύο ευθείες γραμμές ε_1 και ε_2 οι οποίες είναι παράλληλες μεταξύ τους.

(Μονάδες 7)

β) Αν $\varepsilon_1: x+y-2=0$ και $\varepsilon_2: x+y-4=0$, να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ε των ε_1 και ε_2.

(Μονάδες 8)

γ) Αν A είναι σημείο της ευθείας ε_1 με τεταγμένη το 2 και B σημείο της ευθείας ε_2 με τετμημένη το 1, τότε:

i) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B.

(Μονάδες 2)

ii) να βρείτε τις συντεταγμένες δύο σημείων Γ και Δ της ευθείας ε έτσι, ώστε το τετράπλευρο $A\Gamma B\Delta$ να είναι τετράγωνο.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ:

α) Η εξίσωση γράφεται: $x^2+2xy+y^2-6x-6y+8=0 \Rightarrow (x+y)^2-6(x+y)+8=0$.

Θέτοντας $x+y=\omega$ η εξίσωση μετασχηματίζεται στη δευτεροβάθμια $\omega^2-6\omega+8=0$, η οποία έχει διακρίνουσα $\Delta=4$ και ρίζες $\omega=\dfrac{6\pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases}\omega=2\\ \text{ή}\\ \omega=4\end{cases}$. Οπότε $\begin{cases}x+y-2=0\\ \quad\text{ή}\\ x+y-4=0\end{cases}$, οι οποίες είναι οι εξισώσεις δύο ευθειών.

Παρατηρούμε ότι $\lambda_1=\lambda_2=-1$.

Άρα η εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους.

β) Έχουμε $(\varepsilon_1): x+y-2=0$ και $(\varepsilon_2): x+y-4=0$. Θα βρούμε δύο σημεία Η και Θ, ένα σε καθεμία από τις δύο ευθείες. Για $x=0$ σε καθεμία από τις δύο ευθείες, έχουμε:

Το σημείο $H(0,2)\in(\varepsilon_1)$ και το $\Theta(0,4)\in(\varepsilon_2)$.

Το μέσο M του ευθύγραμμου τμήματος ΗΘ έχει συντεταγμένες $\left(\dfrac{x_H+x_\Theta}{2},\dfrac{y_H+y_\Theta}{2}\right)=(0,3)$.

Άρα η μεσοπαράλληλη των $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ διέρχεται από το M και έχει $\lambda=-1$.

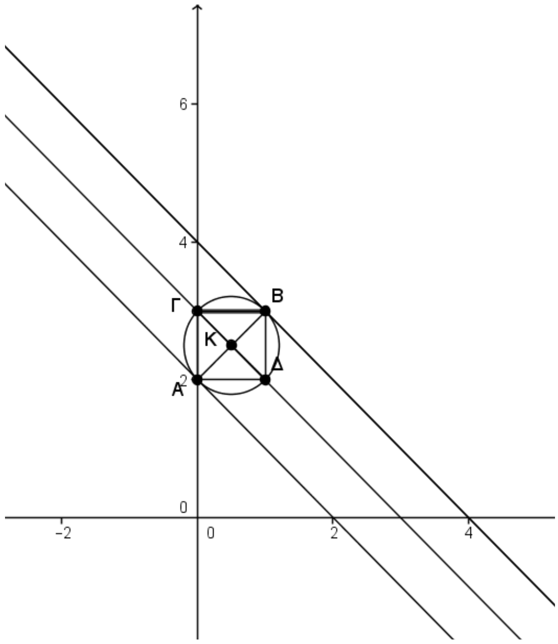
Άρα έχει εξίσωση:

$$y-y_M=\lambda(x-x_M) \Leftrightarrow y-3=-1(x-0) \Rightarrow y-3=-x \Rightarrow x+y-3=0.$$

γ)

i) Για $y=2$ στην $(\varepsilon_1): x+y-2=0$ προκύπτει $x=0$, άρα $A(0,2)$.

Για $x=1$ στην $(\varepsilon_2): x+y-4=0$ προκύπτει $y=3$, άρα $B(1,3)$.



ii) Η πλευρά $A\Delta$ θα σχηματίζει γωνία 45^o με την διαγώνιο AB, άρα $A\Delta // x'x$, οπότε η εξίσωση της είναι $(A\Delta): y=2$ η οποία τέμνει την (ε) στο σημείο $\Delta(1,2)$. Όμοια $\Gamma(0,3)$.

2η ΛΥΣΗ:

Αν $K\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$ το μέσον του AB. Ο κύκλος με κέντρο το $K\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$ και ακτίνα

$R=\left|\overrightarrow{AK}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-0\right)^2+\left(\frac{5}{2}-2\right)^2}=\sqrt{2\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ τέμνει την ευθεία (ε) στα σημεία $\Gamma(0,3)$ και $\Delta(1,2)$.

GI_V_MATHP_4_18613 *[παράγραφος 2.2]*

Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2xy-3\lambda x+3\lambda y+2\lambda^2=0$, με λ διαφορετικό του 0.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει στο επίπεδο, δύο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους, καθεμιά από τις οποίες έχει κλίση ίση με 1.

(Μονάδες 12)

β) Αν το εμβαδόν του τετραγώνου του οποίου οι δύο πλευρές βρίσκονται πάνω στις ευθείες του ερωτήματος α) είναι ίσο με 2, να βρείτε την τιμή του λ.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ:

α) Η δοσμένη εξίσωση γίνεται:

$$x^2+y^2-2xy-3\lambda x+3\lambda y+2\lambda^2=0 \Leftrightarrow (x-y)^2-3\lambda(x-y)+2\lambda^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2-\lambda(x-y)-2\lambda(x-y)+2\lambda^2=0 \Leftrightarrow (x-y)(x-y-\lambda)-2\lambda(x-y-\lambda)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-y-\lambda)(x-y-2\lambda)=0 \Leftrightarrow x-y-\lambda=0 \text{ ή } x-y-2\lambda=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=x-\lambda \text{ ή } y=x-2\lambda.$$

Άρα έχουμε δύο ευθείες την $\varepsilon: y=x-\lambda$ και την $\zeta: y=x-2\lambda$, παράλληλες μεταξύ τους, με συντελεστή διεύθυνσης (κλίση) ίσο με 1.

2η ΛΥΣΗ:

Η εξίσωση γράφεται:

$$x^2+y^2-2xy-3\lambda x+3\lambda y+2\lambda^2=0 \Leftrightarrow (x-y)^2-3\lambda(x-y)+2\lambda^2=0.$$

Θέτοντας $x-y=t$ η εξίσωση μετασχηματίζεται στη δευτεροβάθμια $t^2-3\lambda t+2\lambda^2=0$, η οποία έχει διακρίνουσα $\Delta=(-3\lambda)^2-4\cdot1\cdot2\lambda^2=\lambda^2>0$, αφού $\lambda\neq0$.

Οπότε: $t_{1,2}=\dfrac{3\lambda\pm\lambda}{2}\Rightarrow\begin{cases}t_1=\lambda\\ \text{ή}\\ t_2=2\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(\varepsilon): x-y=\lambda\\(\zeta): x-y=2\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(\varepsilon): x-y-\lambda=0\\(\zeta): x-y-2\lambda=0\end{cases}$

Αφού $\lambda_\varepsilon=\lambda_\zeta=1$, έπεται ότι οι δύο ευθείες είναι παράλληλες.

β) Αφού οι ευθείες (ε) και (ζ) είναι παράλληλες, η πλευρά **α** του τετραγώνου θα είναι ίση με την απόσταση μεταξύ των δύο παράλληλων ευθειών. Για την απόσταση των δύο ευθειών θα βρούμε ένα σημείο πάνω σε μία από τις δύο ευθείες καιι θα πάρουμε την απόστασή του από την άλλη. Το σημείο $A(0,-\lambda)$, που προέκυψε για $x=0$ στην (ε), είναι σημείο της (ε).

Άρα

$$\alpha = d(\varepsilon,\zeta) = d(A,\zeta) = \frac{|0-(-\lambda)-2\lambda|}{\sqrt{2}} = \frac{|-\lambda|}{\sqrt{2}} = \frac{|\lambda|}{\sqrt{2}}.$$

Αλλά $E_{\tau\varepsilon\tau\rho} = 2 \Leftrightarrow \alpha^2 = 2 \Leftrightarrow \frac{\lambda^2}{2} = 2 \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda = 2$ ή $\lambda = -2$.

3η ΛΥΣΗ:

α) Η πρώτη εξίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$$x^2 - 2xy - 3\lambda x + y^2 + 3\lambda y + 2\lambda^2 = 0 \text{ ή } x^2 - 2xy - 3\lambda x + (y+\lambda)(y+2\lambda) = 0 \text{ ή}$$

$$x^2 - (y+\lambda+y+2\lambda)x + (y+\lambda)(y+2\lambda) = 0 \text{ ή } (x-y-\lambda)(x-y-2\lambda) = 0 \text{ ή}$$

$$[(y = x-\lambda) \text{ ή } (y = x-2\lambda)].$$

β) Η ευθεία $y=-x$, που είναι κάθετη στις δύο προηγούμενες παράλληλες ευθείες τις τέμνει στα σημεία $\left(\frac{\lambda}{2},-\frac{\lambda}{2}\right),(\lambda,-\lambda)$ αντίστοιχα.

Επομένως ισχύει $\left(\lambda-\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \left(-\lambda+\frac{\lambda}{2}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^2}{4} = 2 \Leftrightarrow \lambda^2 = 4$, από όπου παίρνουμε $\lambda = 2$ ή $\lambda = -2$.

Παρατήρηση:

Θα μπορούσε το (β) ερώτημα να ήταν:

Αν η πλευρά ρόμβου, του οποίου δύο πλευρές είναι πάνω στις ευθείες του α) ερωτήματος είναι k, με k να είναι δεδομένου μέτρου ευθύγραμμο τμήμα, βρείτε τη τιμή του λ.

GI_V_MATHP_4_18614 *[παράγραφος 2.3]*

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 3x+y+3=0$ και $\varepsilon_2: x+2y-4=0$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής A των ευθειών ε_1 και ε_2.

(Μονάδες 5)

β) Αν η ευθεία ε_1 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο B και η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Γ, τότε:

i) να βρείτε εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία B και Γ.

(Μονάδες 5)

ii) να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $K(x,y)$ για τα οποία ισχύει $(KB\Gamma)=(AB\Gamma)$ ανήκουν σε δύο παράλληλες ευθείες, των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ:

α) Για το σημείο τομής A των δύο ευθειών, λύνουμε το σύστημα εξισώσεων των δύο ευθειών, αφού το A ανήκει και στις δύο ευθείες. Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{cases} 3x+y=-3 \\ x+2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y=-3 \\ -3x-6y=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y=-3 \\ -5y=-15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$$

Επομένως το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 είναι $A(-2,3)$.

β) Το σημείο στο οποίο η ε_1 τέμνει τον άξονα $y'y$ έχει τετμημένη μηδέν. Οπότε για $x=0$ στην ε_1 βρίσκουμε $y=-3$, οπότε $B(0,-3)$. Επίσης, το σημείο στο οποί η ε_2 τέμνει τον άξονα $x'x$ έχει τεταγμένη μηδέν. Οπότε για $y=0$ στην ε_2 βρίσκουμε $x=4$, δηλαδή $\Gamma(4,0)$.

i) Η εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$ είναι:

$$y-y_B=\frac{y_\Gamma-y_B}{x_\Gamma-x_B}(x-x_B) \Leftrightarrow y-(-3)=\frac{0+3}{4-0}(x-0) \Leftrightarrow y+3=\frac{3}{4}x \Leftrightarrow 3x-4y-12=0$$

ii) Επειδή $\overrightarrow{AB}=(2,-6), \overrightarrow{A\Gamma}=(6,-3)$, από τον τύπο εμβαδού τριγώνου με την ορίζουσα βρίσκουμε:

$$E=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot 30=15 \text{ τ.μ.}$$

γ) Είναι $\overrightarrow{KB}=(-x,-3-y), \overrightarrow{K\Gamma}=(4-x,y)$, οπότε:

$$(KB\Gamma)=(AB\Gamma) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{KB},\overrightarrow{K\Gamma}\right)\right|=30 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -x & -3-y \\ 4-x & y \end{vmatrix}\right| = 30 \Leftrightarrow \left|-3x+4y+12\right| = 30 \Leftrightarrow$$

$$\left(3x-4y-12=30 \quad \text{ή} \quad 3x-4y-12=-30\right) \Leftrightarrow$$

$$3x-4y-42=0 \quad \text{ή} \quad 3x-4y+18=0$$

Οπότε τα σημεία $K\left(x,y\right)$ ανήκουν στις ευθείες

$$\left(\zeta_1\right): 3x-4y-42=0 \text{ και } \left(\zeta_2\right): 3x-4y+18=0$$

οι οποίες είναι παράλληλες καθώς $\lambda_{\zeta_1} = \lambda_{\zeta_2} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$.

GI_V_MATHP_4_18615 *[παράγραφος 2.3]*

Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα AB που είναι παράλληλο προς την ευθεία $\varepsilon: y = x$, με $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $x_1 < x_2$.

Αν το σημείο $M(3,5)$ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB και το γινόμενο των τετμημένων των σημείων A και B ισούται με 5, τότε:

α) να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων A και B.

(Μονάδες 13)

β) να αποδείξετε ότι $(OAB) = 4$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 5)

γ) να αποδείξετε ότι τα σημεία $K(x, y)$ για τα οποία ισχύει $(KAB) = 2(OAB)$ ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις τις: $x - y - 2 = 0$ και $x - y + 6 = 0$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ:

α) Οι συντεταγμένες του μέσου ενός ευθυγράμμου τμήματος ισούνται με το ημιάθροισμα των συντεταγμένων των άκρων. Οπότε, αφού το M είναι μέσο του AB έχουμε: $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Έτσι $\frac{x_1 + x_2}{2} = 3 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 6\ (1)$ και $\frac{y_1 + y_2}{2} = 5 \Leftrightarrow y_1 + y_2 = 10\ (2)$

Αφού το γινόμενο των τετμημένων των σημείων A και B ισούται με 5 έχουμε $x_1 x_2 = 5\ (3)$.

Στις σχέσεις $(1),(3)$ έχουμε το άθροισμα και το γινόμενο των x_1, x_2. Συνεπώς τα x_1, x_2 είναι λύσεις της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $w^2 - 6w + 5 = 0 \Leftrightarrow (w-1)(w-5) = 0 \Leftrightarrow w = 1$ ή $w = 5$

Άρα $x_1 = 1$ και $x_2 = 5$ αφού $x_1 < x_2$

Επειδή το AB είναι παράλληλο προς την ευθεία $(\varepsilon): y = x$, αν λ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης του AB θα ισχύει:

$$\lambda = 1 \Leftrightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 1 \Leftrightarrow y_2 - y_1 = 4\ (4) \text{ αφού } x_2 - x_1 = 4$$

Προσθέτοντας την (2) και (4) παίρνουμε $2y_2 = 14 \Leftrightarrow y_2 = 7$ και άρα $y_1 = 3$ από την (4).

Άρα $A(1,3)$ και $B(5,7)$

β) Είναι $\overrightarrow{OA} = (1,3)$ και $\overrightarrow{OB} = (5,7)$ οπότε: $(OAB) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}\right| = 4$.

γ) Είναι $\overrightarrow{AK}=(x-1,y-3)$ και $\overrightarrow{AB}=(4,4)$

Οπότε

$$(KAB)=2(OAB)\Rightarrow \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AB}\right)\right|=8\Leftrightarrow$$

$$\left|\begin{vmatrix} x-1 & y-3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}\right|=16\Leftrightarrow |4x-4-4y+12|=16\Leftrightarrow$$

$$|4x-4y+8|=16\Leftrightarrow 4x-4y+8=16 \text{ ή } 4x-4y+8=-16\Leftrightarrow$$

$$x-y-2=0 \text{ ή } x-y+6=0$$

Άρα τα σημεία $K(x,y)$ ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις $x-y-2=0$ και $x-y+6=0$.

GI_V_MATHP_4_18616 *[παράγραφος 1.5]*

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν:

$$|\vec{\alpha}|=2,\ |\vec{\beta}|=1,\ \left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=60^\circ \text{ και } \vec{\gamma}=\frac{\kappa}{2}\cdot\vec{\alpha}-\vec{\beta},\ \text{όπου } \kappa\in\mathbb{R}.$$

α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

(Μονάδες 3)

β) Αν ισχύει $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=\kappa$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι: $\kappa=-2$.

(Μονάδες 6)

ii) να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

(Μονάδες 8)

iii) να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $3\vec{\alpha}+2\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta}-\vec{\gamma}$ είναι κάθετα.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ:

α) Έχουμε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\text{συν}60^\circ=2\cdot1\cdot\frac{1}{2}=1$

βi) Ισχύει $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=\kappa\Leftrightarrow\vec{\beta}\cdot\left(\frac{\kappa}{2}\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)=\kappa\Leftrightarrow\frac{\kappa}{2}\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-|\vec{\beta}|^2=\kappa\Leftrightarrow\frac{\kappa}{2}\cdot1-1^2=\kappa\Leftrightarrow\kappa=-2$

ii) Για $\kappa=-2$ έχουμε $\vec{\gamma}=-\vec{\alpha}-\vec{\beta}\Rightarrow\vec{\gamma}^2=\left(-\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)^2\Leftrightarrow|\vec{\gamma}|^2=|\vec{\alpha}|^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+|\vec{\beta}|^2\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow|\vec{\gamma}|^2=2^2+2\cdot1+1^2\Leftrightarrow|\vec{\gamma}|^2=7\Leftrightarrow|\vec{\gamma}|=\sqrt{7}$$

iii) Υπολογίζουμε τα $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=\vec{\alpha}\cdot\left(-\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)=-|\vec{\alpha}|^2-\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-2^2-1=-5$

και $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=\vec{\beta}\cdot\left(-\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)=-\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-|\vec{\beta}|^2=-1-1^2=-2$

επομένως

$$\left(3\vec{\alpha}+2\vec{\gamma}\right)\cdot\left(\vec{\beta}-\vec{\gamma}\right)=3\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-3\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}+2\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}-2|\vec{\gamma}|^2=3\cdot1-3(-5)+2(-2)-2\cdot7=0$$

Άρα τα διανύσματα είναι κάθετα.

GI_V_MATHP_4_18617 *[παράγραφος 2.1]*

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{b}$ με μέτρα 2, 6 αντίστοιχα και $\varphi \in [0,\pi]$ η μεταξύ τους γωνία. Επίσης δίνεται η εξίσωση $\left(\vec{\alpha}\vec{b}+12\right)x+\left(\vec{\alpha}\vec{b}-12\right)y-5=0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\varphi \in [0,\pi]$.

(Μονάδες 3)

β) Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$, να αποδείξετε ότι $\vec{b}=3\vec{\alpha}$.

(Μονάδες 7)

γ) Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι $\vec{b}=-3\vec{\alpha}$

(Μονάδες 7)

δ) Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στην διχοτόμο πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων, να αποδείξετε ότι $\vec{b}\perp\vec{\alpha}$

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ:

α) Η (1) είναι στη μορφή $Ax+By+\Gamma=0$ με $A=\vec{\alpha}\vec{b}+12$, $B=\vec{\alpha}\vec{b}-12$ και $\Gamma=-5$

Για να παριστάνει ευθεία, αρκεί $A\neq 0$ ή $B\neq 0$. Δηλαδή $\vec{\alpha}\vec{b}+12\neq 0$ ή $\vec{\alpha}\vec{b}-12\neq 0$.

Δηλαδή $\vec{\alpha}\vec{b}\neq -12$ ή $\vec{\alpha}\vec{b}\neq 12$ που ισχύει.

Άρα η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\varphi \in [0,\pi]$.

β) Αν η ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ δεν θα ορίζεται για αυτή συντελεστής διεύθυνσης.

Οπότε $B=0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{b}-12=0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{b}=12 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}||\vec{b}|\sigma\upsilon\nu\varphi=12 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi=1 \overset{\varphi\in[0,\pi]}{\Leftrightarrow} \varphi=0$. Δηλαδή, τα διανύσματα είναι ομόρροπα και $|\vec{b}|=6=3|\vec{\alpha}|$.

Οπότε $\vec{b}=3\vec{\alpha}$.

γ) Αν η ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ θα έχει συντελεστή διεύθυνσης 0.

Οπότε:

$$A=0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{b}+12=0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{b}=-12 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}||\vec{b}|\sigma\upsilon\nu\varphi=-12 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi=-1 \overset{\varphi\in[0,\pi]}{\Leftrightarrow} \varphi=\pi.$$

Δηλαδή, τα διανύσματα είναι αντίρροπα και $|\vec{b}|=6=3|\vec{\alpha}|$. Οπότε $\vec{b}=-3\vec{\alpha}$.

δ) Η διχοτόμος της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων είναι η ευθεία με εξίσωση $y=x$ (ε).

Οποτε, η ευθεία (1) και η (ε) θα έχουν ίδιο συντελεστή διεύθυνσης. Έχουμε λοιπόν:

$$\lambda_1=\lambda_\varepsilon \Leftrightarrow -\frac{\vec{\alpha}\vec{b}+12}{\vec{\alpha}\vec{b}-12}=1 \Leftrightarrow -\vec{\alpha}\vec{b}-12=\vec{\alpha}\vec{b}-12 \Leftrightarrow 2\vec{\alpha}\vec{b}=0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{b}=0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\perp\vec{b}$$

2η ΛΥΣΗ:

α) Οι συντελεστές των x, y προφανώς δε μηδενίζονται συγχρόνως, άρα η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\varphi \in [0, \pi]$,

β) Ισχύει $\vec{a}\cdot\vec{b} - 12 = 0 \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 12 \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$ άρα τα διανύσματα είναι ομόρροπα και αφού $|\vec{b}| = 3|\vec{a}|$ έχουμε ότι $\vec{b} = 3\vec{a}$.

γ) Ισχύει $\vec{a}\cdot\vec{b} + 12 = 0 \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = -12 \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|$ άρα τα διανύσματα είναι αντίρροπα και αφού $|\vec{b}| = 3|\vec{a}|$ έχουμε ότι $\vec{b} = -3\vec{a}$.

δ) Για την ευθεία ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης, που θα ισούται με την κλίση της διχοτόμου, άρα έχουμε

$$-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b} + 12}{\vec{a}\cdot\vec{b} - 12} = 1 \Rightarrow -\vec{a}\cdot\vec{b} - 12 = \vec{a}\cdot\vec{b} - 12 \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

GI_V_MATHP_4_18618 *[παράγραφος 1.5]*

α) Να εξετάσετε πότε ισχύει καθεμιά από τις ισότητες: $|\vec{u}+\vec{v}|=|\vec{u}|+|\vec{v}|$ και $|\vec{u}+\vec{v}|=\left||\vec{u}|-|\vec{v}|\right|$.

(Μονάδες 10)

β) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν: $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ και $\dfrac{|\vec{\alpha}|}{3}=\dfrac{|\vec{\beta}|}{4}=\dfrac{|\vec{\gamma}|}{7}$.

i) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$ και $\vec{\beta}\uparrow\downarrow\vec{\gamma}$.

(Μονάδες 8)

ii) Να αποδείξετε ότι: $7\vec{\alpha}+3\vec{\gamma}=\vec{0}$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ:

α) $$|\vec{v}+\vec{u}|=|\vec{v}|+|\vec{u}| \Leftrightarrow |\vec{v}+\vec{u}|^2=\left(|\vec{v}|+|\vec{u}|\right)^2 \Leftrightarrow \vec{v}^2+2\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{u}^2=|\vec{v}|^2+2|\vec{v}|\cdot|\vec{u}|+|\vec{u}|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\vec{v}\cdot\vec{u}=2|\vec{v}|\cdot|\vec{u}| \Leftrightarrow \vec{v}\cdot\vec{u}=|\vec{v}|\cdot|\vec{u}|.$$ Άρα $\vec{v},\vec{u}$ ομόρροπα.

Όμοια

$$|\vec{v}+\vec{u}|=\left||\vec{v}|-|\vec{u}|\right| \Leftrightarrow |\vec{v}+\vec{u}|^2=\left(\left||\vec{v}|-|\vec{u}|\right|\right)^2 \Leftrightarrow \vec{v}^2+2\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{u}^2=|\vec{v}|^2-2|\vec{v}|\cdot|\vec{u}|+|\vec{u}|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\vec{v}\cdot\vec{u}=-2|\vec{v}|\cdot|\vec{u}| \Leftrightarrow \vec{v}\cdot\vec{u}=-|\vec{v}|\cdot|\vec{u}|.$$ Άρα $\vec{v},\vec{u}$ αντίρροπα.

βi) **1ος ΤΡΟΠΟΣ**

Αν θέσουμε

$$\frac{|\vec{\alpha}|}{3}=\frac{|\vec{\beta}|}{4}=\frac{|\vec{\gamma}|}{7}=\lambda \text{ τότε } |\vec{\alpha}|=3\lambda,\ |\vec{\beta}|=4\lambda,\ |\vec{\gamma}|=7\lambda$$

Είναι

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{\alpha}+\vec{\beta}=-\vec{\gamma}.$$

Οπότε

$$\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2=\left(-\vec{\gamma}\right)^2 \Leftrightarrow \vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=\vec{\gamma}^2 \Leftrightarrow 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=49\lambda^2-16\lambda^2-9\lambda^2 \Leftrightarrow 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=24\lambda^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=12\lambda^2 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|.$$ Άρα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ ομόρροπα.

Όμοια προκύπτει ότι $\vec{\beta},\vec{\gamma}$ αντίρροπα.

2ος ΤΡΟΠΟΣ

Αν θέσουμε

$$\frac{|\vec{\alpha}|}{3}=\frac{|\vec{\beta}|}{4}=\frac{|\vec{\gamma}|}{7}=\lambda \text{ τότε } |\vec{\alpha}|=3\lambda,\ |\vec{\beta}|=4\lambda,\ |\vec{\gamma}|=7\lambda \quad (1).$$

$$\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\left|-\vec{\gamma}\right| \Leftrightarrow \left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\left|\vec{\gamma}\right| \quad (2).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\left|\vec{\alpha}\right|+\left|\vec{\beta}\right|=3\lambda+4\lambda=7\lambda=\left|\vec{\gamma}\right| \ (3).$$

Από τις (2) και (3) έχουμε ότι $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\left|\vec{\alpha}\right|+\left|\vec{\beta}\right|$, άρα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ ομόρροπα.

Τότε $\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$ με $\lambda>0$ και από τη σχέση $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{\gamma}=-(\lambda+1)\vec{\beta}$.

Αν θέσουμε όπου $\rho=-(\lambda+1)<0$ τότε $\vec{\gamma}=\rho\vec{\beta}$ άρα $\vec{\gamma},\vec{\beta}$ αντίρροπα.

ii) **1ος ΤΡΟΠΟΣ**

Αν θέσουμε $\vec{v}=7\vec{\alpha}$ και $\vec{u}=3\vec{\gamma}$ τότε έχουμε ότι $\vec{v}$, $\vec{u}$ είναι αντίρροπα.

Αφού όμως από τη σχέση $\dfrac{\left|\vec{\alpha}\right|}{3}=\dfrac{\left|\vec{\beta}\right|}{4}=\dfrac{\left|\vec{\gamma}\right|}{7}$ έχουμε ότι $7\left|\vec{\alpha}\right|=3\left|\vec{\gamma}\right|$ προκύπτει $\left|\vec{v}\right|=\left|\vec{u}\right|$

Άρα $\vec{v}$, $\vec{u}$ αντίθετα οπότε $7\vec{\alpha}+3\vec{\gamma}=\vec{0}$.

2ος ΤΡΟΠΟΣ

$$\left|7\vec{\alpha}+3\vec{\gamma}\right|^2=\left(7\vec{\alpha}+3\vec{\gamma}\right)^2=49\left|\vec{\alpha}\right|^2+42\vec{\alpha}\vec{\gamma}+9\left|\vec{\gamma}\right|^2=49\cdot\frac{9}{49}\left|\vec{\gamma}\right|^2-42\frac{3}{7}\left|\vec{\gamma}\right|^2+9\left|\vec{\gamma}\right|^2=0.$$

Άρα $\left|7\vec{\alpha}+3\vec{\gamma}\right|=0 \Leftrightarrow 7\vec{\alpha}+3\vec{\gamma}=\vec{0}$.

GI_V_MATHP_4_18620 *[παράγραφος 2.2]*

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1:(2\lambda-1)x+y-5=0$, $\varepsilon_2:(\lambda^2+3)x-y-15=0$ με $\lambda\in\mathbb{R}$ και το σημείο $A(2,-1)$.

α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ οι ευθείες τέμνονται.

(Μονάδες 7)

β) Αν οι ευθείες τέμνονται στο σημείο A, να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

γ) Έστω $\lambda=2$ και B,Γ τα σημεία που οι ε_1 και ε_2 τέμνουν τον άξονα $y'y$. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ:

α) Η ορίζουσα του συστήματος των (ε_1) και (ε_2) είναι:

$$D=\begin{vmatrix}2\lambda-1 & 1\\ \lambda^2+3 & -1\end{vmatrix}=-2\lambda+1-\lambda^2-3=-\lambda^2-2\lambda-2=-(\lambda+1)^2-1<0 \text{ για κάθε } \lambda\in\mathbb{R}.$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, δηλαδή για κάθε τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ οι ευθείες τέμνονται.

β) Πρέπει οι συντεταγμένες του σημείου A να επαληθεύουν τις εξισώσεις των (ε_1) και (ε_2).

Οπότε έχουμε: $\begin{cases}(2\lambda-1)2-1-5=0\\ 2(\lambda^2+3)+1-15=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4\lambda=8\\ \lambda^2=4\end{cases}\Rightarrow\lambda=2$.

γ) Για $\lambda=2$ είναι: $\varepsilon_1:\ 3x+y-5=0$ και $\varepsilon_2:\ 7x-y-15=0$.

Το σημείο στο οποίο η (ε_1) τέμνει τον άξονα $y'y$ έχει τετμημένη μηδέν. Οπότε για $x=0$ στην (ε_1) βρίσκουμε ότι η (ε_1) τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $B(0,5)$, Αντίστοιχα για $x=0$ στην (ε_2), βρίσκουμε ότι η (ε_2) τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0,-15)$.

Είναι:

$$\overrightarrow{AB}=(0-2,5+1)=(-2,6) \text{ και } \overrightarrow{A\Gamma}=(0-2,-15+1)=(-2,-14),$$

άρα

$$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-2 & 6\\ -2 & -14\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|28+12|=\frac{1}{2}\cdot 40=20\tau.\mu.$$

GI_V_MATHP_4_18621 *[παράγραφος 1.5-2.1]*

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon: 2\kappa x-(1+\kappa)y+1-3\kappa=0$ και $\zeta:(1+3\kappa)x+(\kappa-1)y+2-6\kappa=0$, όπου $\kappa\in\mathbb{R}$.

α) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του κ, ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την αμβλεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες (ε) και (ζ).

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ:

α) Το διάνυσμα $\vec{u}=(-1-\kappa,-2\kappa)$ είναι παράλληλο στην ευθεία (ε) και το διάνυσμα $\vec{v}=(\kappa-1,-3\kappa-1)$ είναι παράλληλο στην ευθεία (ζ).

Έχουμε $\varepsilon\parallel\zeta\Leftrightarrow\vec{u}\parallel\vec{v}\Leftrightarrow\det(\vec{u},\vec{v})=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}-1-\kappa & -2\kappa\\ \kappa-1 & -3\kappa-1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 5\kappa^2+2\kappa+1=0$

η τελευταία εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta=-16$, άρα είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$. Άρα δεν υπάρχει τιμή του πραγματικού κ ώστε να είναι $\varepsilon\parallel\zeta$.

β) Έστω $\omega=(\widehat{\vec{v},\vec{u}})$. Τότε:

$$\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{(-1-\kappa)(\kappa-1)+(-2\kappa)(-3\kappa-1)}{\sqrt{(-1-\kappa)^2+(-2\kappa)^2}\sqrt{(\kappa-1)^2+(-3\kappa-1)^2}}=$$

$$=\frac{5\kappa^2+2\kappa+1}{\sqrt{5\kappa^2+2\kappa+1}\sqrt{10\kappa^2+4\kappa+2}}=\frac{5\kappa^2+2\kappa+1}{\sqrt{2}\left(5\kappa^2+2\kappa+1\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Άρα η οξεία γωνία των διανυσμάτων είναι $\omega=45^0$ και η αμβλεία είναι 135^0. Οπότε και η αμβλεία γωνία των ευθειών (ε) και (ζ) είναι 135^0.

GI_V_MATHP_4_18622 *[παράγραφος 2.3]*

Δίνονται τα σημεία $A\left(1,\frac{-3}{2}\right)$, $B(2,-1)$ και $\Gamma\left(\mu,\frac{\mu-4}{2}\right)$, όπου $\mu\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$ το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την τιμή του μ έτσι, ώστε $\mu\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=-\overrightarrow{AB}$.

(Μονάδες 6)

δ) Για την τιμή του μ που βρήκατε στο ερώτημα γ), να αποδείξετε ότι $(OB\Gamma)=1$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 3)

ΛΥΣΗ:

α) Είναι $\overrightarrow{AB}=\left(2-1,-1+\frac{3}{2}\right)=\left(1,\frac{1}{2}\right)$ και

$$\overrightarrow{B\Gamma}=\left(\mu-2,\frac{\mu-4}{2}+1\right)=\left(\mu-2,\frac{\mu-2}{2}\right).$$

β) Αρκεί να δείξουμε ότι τα σημεία A,B,Γ είναι συνευθειακά.

Πράγματι

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \mu-2 & \frac{\mu-2}{2}\end{vmatrix}=\frac{\mu-2}{2}-\frac{\mu-2}{2}=0,$$

άρα είναι $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{B\Gamma}$ δηλαδή τα σημεία A,B,Γ είναι συνευθειακά.

γ) $$\mu\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=-\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\mu\cdot\left(\mu-2,\frac{\mu-2}{2}\right)=-\left(1,\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow\mu(\mu-2)\left(1,\frac{1}{2}\right)=-\left(1,\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\mu(\mu-2)=-1\Leftrightarrow\mu^2-2\mu+1=0\Leftrightarrow(\mu-1)^2=0\Leftrightarrow\mu=1.$$

δ) Για $\mu=1$ είναι $\Gamma\left(1,\frac{-3}{2}\right)$, δηλαδή το Γ ταυτίζεται με το A.

$$(OB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{O\Gamma}\right)\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}2 & -1\\ 1 & \frac{-3}{2}\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|-3+1\right|=1\tau.\mu$$

GI_V_MATHP_4_18623 *[παράγραφος 2.3]*

Δίνονται τα σημεία $A(3,4)$, $B(5,7)$ και $\Gamma(2\mu+1,3\mu-2)$, όπου $\mu\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ και, στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ δεν είναι συνευθειακά για κάθε τιμή του μ.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι:

i) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ δεν εξαρτάται από το μ.

(Μονάδες 5)

ii) για κάθε τιμή του μ το σημείο Γ ανήκει σε ευθεία ε, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

(Μονάδες 7)

γ) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά γιατί το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ παραμένει σταθερό, ανεξάρτητα από την τιμή του μ;

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ:

α) Είναι $\overrightarrow{AB}=(5-3,7-4)=(2,3)$ και

$$\overrightarrow{A\Gamma}=(2\mu+1-3,3\mu-2-4)=(2\mu-2,3\mu-6)$$

Επειδή $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 2\mu-2 & 3\mu-6\end{vmatrix}=6\mu-12-6\mu+6=-6\neq 0$ τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ δεν είναι παράλληλα, άρα τα σημεία A,B,Γ δεν είναι συνευθειακά.

βi) Είναι: $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}2 & 3\\ 2\mu-2 & 3\mu-6\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|6\mu-12-6\mu+6|=3\tau.\mu$,

άρα το εμβαδόν του $AB\Gamma$ είναι ανεξάρτητο του μ.

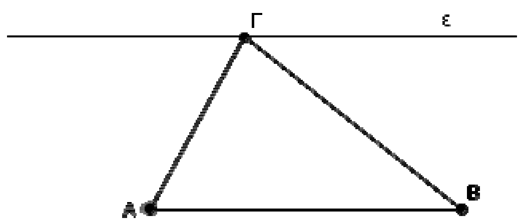
(ii) Αφού $\Gamma(2\mu+1,3\mu-2)$ έχουμε: $\begin{cases}x=2\mu+1\\ y=3\mu-2\end{cases}$ απ'όπου $\mu=\frac{x-1}{2}$

και $y=3\frac{x-1}{2}-2\Rightarrow 2y=3x-3-4\Rightarrow 3x-2y=7$.

Άρα το Γ για οποιαδήποτε τιμή του μ ανήκει στην ευθεία (ε) με εξίσωση $\varepsilon: 3x-2y=7$.

(γ) Παρατηρούμε ότι $\lambda_\varepsilon=\frac{3}{2}=\lambda_{\overrightarrow{AB}}$, οπότε $\varepsilon // AB$.

Άρα για οποιαδήποτε θέση του Γ στην (ε) το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ από το γ έχει σταθερό μήκος, οπότε και το εμβαδόν μένει σταθερό.



GI_V_MATHP_4_20147

Δίνονται τα σημεία $A(\lambda+1,\lambda-1)$, $B(2,2)$ και $\Gamma(4,6)$, $\lambda\in R$.

α) Να βρείτε την μεσοκάθετο του τμήματος $B\Gamma$.

(Μονάδες 7)

β) Αν το σημείο A ισαπέχει από τα σημεία B και Γ , να βρείτε την τιμή του λ .

(Μονάδες 8)

γ) Για $\lambda=4$,να βρείτε σημείο Δ ώστε το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ να είναι ρόμβος.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ:

α) Το μέσο M του τμήματος $B\Gamma$ είναι: $M\left(\frac{2+4}{2},\frac{2+6}{2}\right)$ δηλαδή το $M(3,4)$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $B\Gamma$ είναι: $\lambda_{B\Gamma}=\frac{6-2}{4-2}=2$

Αν δ είναι η μεσοκάθετος του $B\Gamma$ τότε $\lambda_\delta\cdot\lambda_{B\Gamma}=-1\Leftrightarrow\lambda_\delta=-\frac{1}{2}$ και η εξίσωση της δ είναι:

$$y-y_M=\lambda_\delta\left(x-x_M\right)\Leftrightarrow y-4=-\frac{1}{2}(x-3)\Leftrightarrow x+2y=11$$

β) Αφού το A ισαπέχει από τα σημεία B και Γ τότε ανήκει στη μεσοκάθετο του $B\Gamma$ δηλαδή στην ευθεία δ .

Έτσι με $x=\lambda+1$ και $y=\lambda-1$ η δ γίνεται:

$$\lambda+1+2(\lambda-1)=11\Leftrightarrow\lambda=4$$

γ) Αν $\lambda=4$ τότε $A(5,3)$. Για να είναι το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ ρόμβος πρέπει κι αρκεί το M να είναι μέσο της $B\Delta$, άρα $\begin{cases}x_A+x_\Delta=2x_M\\ y_A+y_\Delta=2y_M\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5+x_\Delta=6\\ 3+y_\Delta=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_\Delta=1\\ y_\Delta=5\end{cases}$ οπότε $\Delta(1, 5)$

ΑΛΛΗ ΛΥΣΗ:

Το σημείο Δ πρέπει να ισαπέχει από τα B,Γ, οπότε βρίσκεται στη μεσοκάθετο του $B\Gamma$, άρα έχει συντεταγμένες $\Delta(11-2\alpha,\alpha)$, $\alpha\in R$.

Οπότε $(M\Delta)=(MA)\Leftrightarrow\sqrt{(11-2\alpha-3)^2+(\alpha-4)^2}=\sqrt{(5-3)^2+(3-4)^2}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow(8-2\alpha)^2+(\alpha-4)^2=5\Leftrightarrow\alpha^2-8\alpha+15=0$$

Η εξίσωση δίνει $\alpha=5$, οπότε $\Delta(1,5)$ ή $\alpha=3$ που απορρίπτεται αφού ταυτίζεται με το A

ΣΧΟΛΙΟ: Είναι το 4_18619 (που αποσύρθηκε), με αλλαγμένες τις συντεταγμένες του A .