

**ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ**  
**ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ, ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ, ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ**  
**(ΑΠΟ ΤΗΝ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ)**

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

1. Δίνεται το σύστημα:  $\begin{cases} x - 2y = 8 \\ \alpha x + \beta y = \gamma \end{cases}$  με παραμέτρους  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

α) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους  $\alpha, \beta, \gamma$  ώστε το σύστημα αυτό να έχει μοναδική λύση το ζεύγος  $(2, -3)$ .

β) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους  $\alpha, \beta, \gamma$  ώστε το σύστημα αυτό να είναι αδύνατο.

2. Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκος  $x$  cm, πλάτος  $y$  cm, περίμετρο ίση με 38cm και με την ακόλουθη ιδιότητα:

Αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 2 cm και μειώσουμε το πλάτος του κατά 4 cm, θα προκύψει ένα ορθογώνιο με εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του αρχικού.

α) Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

β) Να βρείτε τις τιμές των διαστάσεων  $x, y$  του ορθογωνίου.

3. α) Να λύσετε αλγεβρικά το σύστημα  $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$ .

β) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τις λύσεις του συστήματος που βρήκατε στο ερώτημα α).

4. Αν  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  και  $(2\sigma\upsilon\nu x + 1) \cdot (5\sigma\upsilon\nu x - 4) = 0$ , τότε:

α) Να αποδείξετε ότι  $\sigma\upsilon\nu x = \frac{4}{5}$ .

β) Να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $x$ .

5. Δίνεται η συνάρτηση,  $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι η  $f(x) \leq 1$ .

β) Είναι το 1 η μέγιστη τιμή της συνάρτησης; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή.

6. α) Να αποδείξετε ότι:  $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sigma\upsilon\nu(\pi + x) = 0$ .

β) Να βρείτε τις τιμές του  $x \in [0, 2\pi)$  για τις οποίες ισχύει  $\sigma\upsilon\nu x = -\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

7. α) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους παρακάτω αριθμούς:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}, \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}, \sigma\upsilon\nu\frac{17\pi}{10}$$

β) Αν  $\pi < x_1 < x_2 < \frac{3\pi}{2}$  να συγκρίνετε τους αριθμούς  $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right)$  και  $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x_2\right)$

8. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu(\pi - 3x) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$ ,  $x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι  $f(x) = 2\eta\mu(3x)$ .

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

9. Έστω γνησίως μονότονη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από τα σημεία  $A(2,3)$  και  $B(4,5)$

α) Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της  $f$ .

β) Αν η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τον άξονα  $x$ 'ς στο  $-2$ , να δείξετε ότι  $f(0) > 0$ .

10. α) Να αποδείξετε ότι:  $\frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} + \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} = \frac{2}{\eta\mu x}$  όπου  $x \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

β) Να λύσετε την εξίσωση:  $\frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} + \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ .

11. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x$ ,  $x \in \mathbb{R}$

α) Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης; Ποια είναι η περίοδος της  $f$ ;

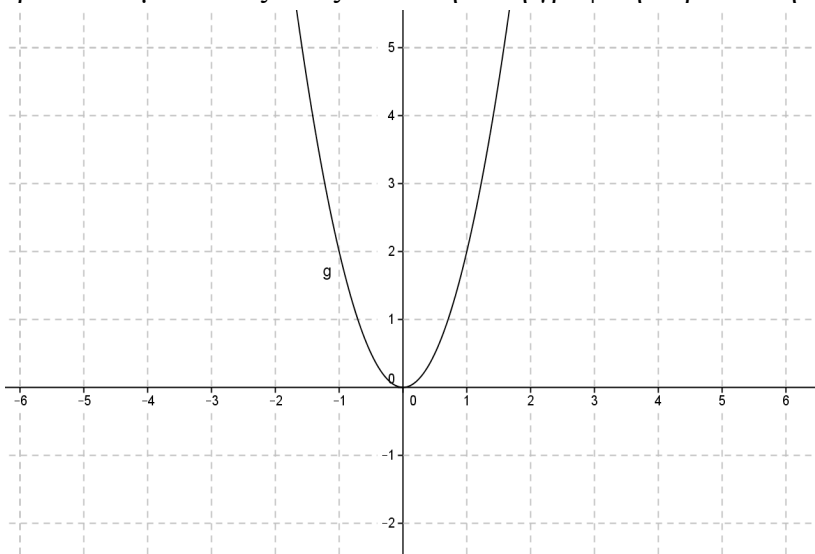
β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $f$  σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

γ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση μπορεί να πάρει την τιμή 1. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

12. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2x^2 - 12x + 19$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  γράφεται στη μορφή:  $f(x) = 2(x-3)^2 + 1$

β) Παρακάτω δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = 2x^2$ . Στο ίδιο σύστημα αξόνων, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  και να εξηγήσετε πώς αυτή προκύπτει μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της  $g$ .

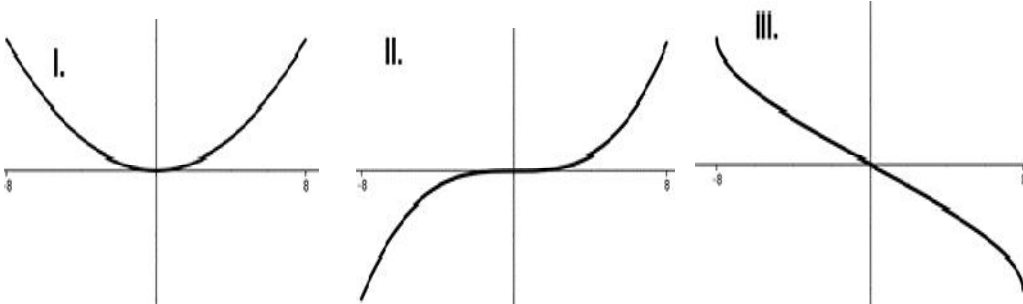


13. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{8-x} - \sqrt{8+x}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

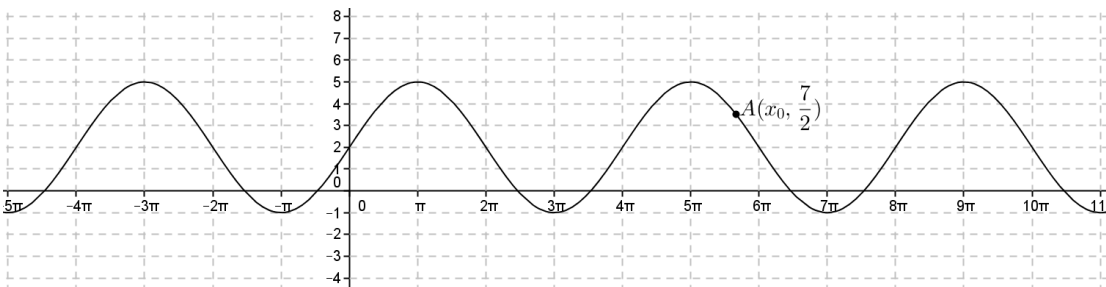
β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση  $f$  είναι άρτια ή περιττή.

γ) Αν η συνάρτησης  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της, να επιλέξετε ποια από τις παρακάτω τρεις προτεινόμενες, είναι η γραφική της παράσταση και στη συνέχεια να υπολογίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.



δ) Να αιτιολογήσετε γραφικά ή αλγεβρικά, γιατί οι συναρτήσεις  $g(x) = f(x) - 3$  και  $h(x) = f(x+3)$  δεν είναι ούτε άρτιες ούτε περιττές.

14. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$  η οποία είναι της μορφής  $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x) + k$ ,  $\rho, \omega, k$  πραγματικές σταθερές.



α) Με βάση τη γραφική παράσταση, να βρείτε:

i. τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $f$ .

ii. την περίοδο  $T$  της συνάρτησης  $f$ .

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές των σταθερών  $\rho, \omega, k$ . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Θεωρώντας γνωστό ότι  $\rho = 3$ ,  $\omega = \frac{1}{2}$ ,  $k = 2$  να προσδιορίσετε αλγεβρικά την τετμημένη  $x_0$  του σημείου  $A$  της γραφικής παράστασης, που δίνεται στο σχήμα.

15. Η Αλίκη και η Αθηνά διασκεδάζουν στη ρόδα του λούνα παρκ. Η απόσταση, σε μέτρα, του καθίσματός τους από το έδαφος τη χρονική στιγμή  $t$  sec δίνεται από τη συνάρτηση

$$h(t) = 8 + 6 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi \cdot t}{30}\right) \text{ και } 0 \leq t \leq 180.$$

α) Να βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το κάθισμα, καθώς και τις στιγμές κατά τις οποίες το κάθισμα βρίσκεται στο ελάχιστο και στο μέγιστο ύψος.

β) Να υπολογίσετε την ακτίνα της ρόδας.

γ) Να βρείτε την περίοδο της κίνησης, δηλαδή το χρόνο στον οποίο η ρόδα ολοκληρώνει μια περιστροφή. Πόσους γύρους έκαναν οι δύο φίλες στο διάστημα από 0 έως 180 sec;

δ) Να μεταφέρετε στην κόλα σας τον πίνακα τιμών και το σύστημα συντεταγμένων που δίνονται παρακάτω και:

i. να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης του ύψους  $h(t)$ .

ii. να σχεδιάσετε στο σύστημα συντεταγμένων το τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $h(t)$  με  $0 \leq t \leq 90$ .

t	0	15	30	45	60	75	90
h(t)							

