**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΚΟΠΩΝ ΠΑΣΧΑ**

**(Από Τράπεζα Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας – ΤΘΔΔ)**

**1.**

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A(-5,4)$, $B(-1,6)$, $\Gamma(4,1)$ και σημείο Μ της πλευράς ΑΒ για το οποίο ισχύει $\overline{AM}=\frac{1}{4}\overline{AB}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overline{AB}$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Μ.

(Μονάδες 9)

γ) Αν το σημείο Μ έχει συντεταγμένες $\left(-4,\frac{9}{2}\right)$, να υπολογίσετε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Γ, Μ.

(Μονάδες 10)

**2.**

Θεωρούμε το σημείο *Μ(-3, -2)* και ευθεία που διέρχεται από το Μ και τέμνει τους αρνητικούς ημιάξονες στα σημεία Α, Β.

α) Να αποδείξετε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης $\lambda$ της ευθείας είναι αρνητικός.

(Μονάδες 10)

β) Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ.

i. Να αποδείξετε ότι $E(\lambda)\geq 12$ για κάθε $\lambda<0$.

(Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που σχηματίζει με τους ημιάξονες τρίγωνο με ελάχιστο εμβαδόν.

(Μονάδες 5)

**3.**

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2\chi-\psi-10\lambda+16=0$ και $\varepsilon_2: 10\chi+\psi-2\lambda-4=0$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου $\lambda$ οι ευθείες $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$ τέμνονται, και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους *Μ*

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου $\lambda$ το σημείο $M$ ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: 8\chi+\psi-6=0$

(Μονάδες 7)

γ) Αν η ευθεία $\varepsilon$ τέμνει τους άξονες $\chi'\chi$ και $\psi'\psi$ στα σημεία $A$ και $B$ αντίστοιχα, τότε:

i) να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $\zeta$ που διέρχεται από την αρχή $O$ των αξόνων και είναι παράλληλη προς την ευθεία $AB$

(Μονάδες 5)

ii) αν $K$ είναι τυχαίο σημείο της ευθείας $\zeta$, να αποδείξετε ότι $(KAB)=\frac{9}{4}$

(Μονάδες 6)

**4.**

Δίνεται η εξίσωση: $\chi^2+2\chi\psi+\psi^2-6\chi-6\psi+8=0$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει γεωμετρικά δύο ευθείες γραμμές $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$ οι οποίες είναι παράλληλες μεταξύ τους.

(Μονάδες 7)

β) Αν $\varepsilon_1: \chi+\psi-2=0$ και $\varepsilon_2: \chi+\psi-4=0$, να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης $\varepsilon$ των $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$

(Μονάδες 8)

γ) Αν $A$ είναι σημείο της ευθείας $\varepsilon_1$ με τεταγμένη το 2 και $B$ σημείο της ευθείας $\varepsilon_2$ με τετμημένη το 1, τότε:

i) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων $A$ και $B$

(Μονάδες 2)

ii) να βρείτε τις συντεταγμένες δύο σημείων $\Gamma$ και $\Delta$ της ευθείας $\varepsilon$ έτσι, ώστε το τετράπλευρο $A\Gamma B\Delta$ να είναι τετράγωνο.

(Μονάδες 8)

**5.**

Δίνεται η εξίσωση : $x^2+y^2+10y+16=0 \quad (1)$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(1)$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(0,-5)$ και ακτίνα $\rho=3$.

(Μονάδες 12)

β) Από τις ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων να προσδιορίσετε εκείνες που εφάπτονται του παραπάνω κύκλου.

(Μονάδες 13)

**6.**

Σε καρτεσιανό επίπεδο $Oxy$ θεωρούμε κύκλο $C$ που διέρχεται από το σημείο $A(3,10)$ και έχει κέντρο το $K(4,8)$.

α) Να αποδείξετε ότι $C:(x-4)^2+(y-8)^2=5$, και έπειτα να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $\varepsilon$ που διέρχεται από τα σημεία $O$ και $K$.

(Μονάδες 13)

β) Από τα σημεία του κύκλου $C$ να βρείτε τις συντεταγμένες:

i) του σημείου που απέχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 6)

ii) του σημείου που απέχει τη μεγαλύτερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 6)

**7.**

Δίνονται οι εξισώσεις

$$(x+y-1)(x+y+1)=2xy \quad (1) \quad \text{και} \quad (\lambda-1)x+(2\lambda+3)y+2\lambda-5=0 \quad (2) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο $C$ με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho=1$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (2) παριστάνει ευθεία. Κατόπιν να αποδείξετε ότι οι ευθείες που προκύπτουν από την (2) για τις διάφορες τιμές του $\lambda$ διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 10)

γ) Έστω Α και Β τα σημεία τομής του κύκλου $C$ με τους θετικούς ημιάξονες $Ox$ και $Oy$ αντίστοιχα. Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ, ώστε η ευθεία ΑΒ να προκύπτει από την εξίσωση (2).

(Μονάδες 7)

**8.**

Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-(\lambda-1)x-(\lambda-7)y+\lambda=0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του λ, με $\lambda \neq 5$, παριστάνει κύκλο. Κατόπιν να βρείτε τι παριστάνει η εξίσωση, όταν $\lambda=5$.

(Μονάδες 12)

β) Έστω $C_1$, $C_2$ οι κύκλοι που προκύπτουν από την παραπάνω εξίσωση όταν $\lambda = 3$ και $\lambda = 9$ αντίστοιχα.

i. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι $C_1$ και $C_2$ εφάπτονται εξωτερικά.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε το σημείο επαφής των κύκλων.

(Μονάδες 7)

**9.**

Δίνεται η εξίσωση: $y^4 - 16x^2 = 0$, $(1)$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(1)$ παριστάνει δύο παραβολές $C_1$: $y^2=4x$ και $C_2$: $y^2=-4x$ και να βρείτε για καθεμιά από αυτές την εστία και τη διευθετούσα της.

(Μονάδες 13)

β) Αν $E_1$ και $E_2$ είναι οι εστίες των παραβολών $C_1$ και $C_2$ αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα $E_1E_2$

(Μονάδες 12)

**10.**

Σε καρτεσιανό επίπεδο $Oxy$ θεωρούμε κύκλο $C_1$ ο οποίος έχει το κέντρο του στην ευθεία $\varepsilon: x - y - 1 = 0$

Έστω επίσης $A(5,3)$ και $B(1,5)$ δύο σημεία του κύκλου $C_1$

α) Να αποδείξετε ότι $C_1: (x-1)^2 + y^2 = 25$

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής $C_2$ που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και εστία το κέντρο του κύκλου $C_1$

(Μονάδες 7)

γ) Αν $M_1$ και $M_2$ είναι τα σημεία τομής των $C_1$ και $C_2$, τότε:

i) να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$ της παραβολής $C_2$ στα σημεία αυτά.

(Μονάδες 5)

ii) να αποδείξετε ότι οι $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$ τέμνονται σε σημείο που ανήκει στον κύκλο $C_1$

(Μονάδες 4)