

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΧΡΙΣΤΟΥΓΕΝΝΩΝ

(Από Τράπεζα Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας – ΤΘΔΔ)

1.

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία : $2|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ$

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2$

β) Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$

2.

Σε τρίγωνο ABΓ είναι: $\overline{AB} = (-4, -6)$, $\overline{AG} = (2, -8)$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος \overline{AM} όπου AM είναι η διάμεσος του τριγώνου ABΓ.

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία A είναι οξεία.

γ) Αν στο τρίγωνο ABΓ επιπλέον ισχύει $A(3,1)$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του B και Γ.

3.

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

β) Αν τα διανύσματα $2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $k\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ είναι κάθετα να βρείτε την τιμή του k.

γ) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

4.

Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1 : x - 2y - 8 = 0$, $\varepsilon_2 : 2x - 4y + 10 = 0$ και το σημείο A της ε_1 που έχει τετμημένη το 4 .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A .

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε η οποία διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στην ευθεία ε_1

γ) Αν B είναι το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 , τότε να βρείτε τις συντεταγμένες του B .

5.

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : x - 8y + 16 = 0$ και $\varepsilon_2 : 2x + y + 15 = 0$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο M.

Αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνουν τον άξονα $y'y$ στα σημεία A και B αντίστοιχα, τότε:

α) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων M, A και B

β) αν K είναι το μέσο του τμήματος AB, να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος \overline{MK}

6.

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : x - 3y + 5 = 0$ και $\varepsilon_2 : 3x + y - 5 = 0$

α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες μεταξύ τους.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής A των ευθειών ε_1 και ε_2

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο A και την αρχή O των αξόνων.

7.

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 3x + y + 3 = 0$ και $\varepsilon_2 : x + 2y - 4 = 0$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής A των ευθειών ε_1 και ε_2

β) Αν η ευθεία ε_1 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο B και η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Γ, τότε:

i) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων B και Γ.

ii) να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία B και Γ έχει εξίσωση την $3x - 4y - 12 = 0$

8.

Δίνονται τα διανύσματα $\overline{AB} = (\kappa^2 - 6\kappa + 9, \kappa - 3)$ και $\overline{AG} = (1, 6)$, όπου $\kappa \in \mathcal{R}$

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\overline{AB} \cdot \overline{AG}$

β) Να βρείτε τις τιμές του κ , ώστε τα διανύσματα \overline{AB} και \overline{AG} να είναι κάθετα.

γ) Για $\kappa = 1$ να βρείτε το διάνυσμα \overline{BG} .

9.

Έστω $M(3,5)$ το μέσο ευθυγράμμου τμήματος AB με $A(1,1)$.

α) Να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες του σημείου B .

ii) την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B .

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου K του άξονα $x'x$ έτσι, ώστε να ισχύει $(KA) = (KB)$.

10.

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και E, Z σημεία τέτοια ώστε: $\overline{AE} = \frac{2}{5} \cdot \overline{A\Delta}$ και $\overline{AZ} = \frac{2}{7} \cdot \overline{A\Gamma}$

α) Να γράψετε τα διανύσματα \overline{EZ} και \overline{ZB} ως γραμμικό συνδυασμό \overline{AB} και $\overline{A\Delta}$.

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία B, Z και E είναι συνευθειακά.

11.

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν:

$|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 1, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ$ και $\vec{\gamma} = \frac{\kappa}{2} \cdot \vec{\alpha} - \vec{\beta}$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$,

α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

β) Αν ισχύει $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = \kappa$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι: $\kappa = -2$

ii) να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$

iii) να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $3\vec{\alpha} + 2\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$ είναι κάθετα.

12.

α) Να εξετάσετε πότε ισχύει καθεμιά από τις ισότητες: $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$ και $|\vec{u} + \vec{v}| = \left| |\vec{u}| - |\vec{v}| \right|$

β) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν: $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $\frac{|\vec{\alpha}|}{3} = \frac{|\vec{\beta}|}{4} = \frac{|\vec{\gamma}|}{7}$.

i) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \uparrow\downarrow \vec{\gamma}$

ii) Να αποδείξετε ότι: $7\vec{\alpha} + 3\vec{\gamma} = \vec{0}$