

# Γεωμετρία Α Γυμνασίου

## Ορισμοί – Ιδιότητες – Εξηγήσεις

**Ευθεία γραμμή** Ορισμός δεν υπάρχει.  
Η απλούστερη από όλες τις γραμμές.  
Κατασκευάζεται με τον χάρακα (κανόνα) πάνω σε επίπεδο.

1. Δύο σημεία ορίζουν την θέση μόνο μίας ευθείας γραμμής.
2. Μία ευθεία αν επεκταθεί και από τα δύο μέρη παραμένει ευθεία γραμμή.
3. Πάνω της μπορούμε να σηματοδέψουμε άπειρα σημεία.
4. Σαν σχήμα είναι απέραντο δηλαδή δεν έχει αρχή ούτε τέλος.
5. Από ένα σημείο του επιπέδου περνάνε άπειρες ευθείες.
6. Ονομάζεται με ένα (πεζό) γράμμα στην άκρη του ορατού μέρους της.

**Ευθύγραμμο τμήμα** Σε μία ευθεία αν πάρω δύο σημεία ορίζω ένα κομμάτι (τμήμα) από αυτήν.

1. Το ευθύγραμμο τμήμα ονομάζεται με δύο κεφαλαία γράμματα. Τα σημεία Αρχής–Τέλους.
2. Ανάμεσα στα άκρα A και B του τμήματος μπορώ να σηματοδέψω άπειρα σημεία.
3. Ομοίως εξωτερικά και στην προέκταση προς το μέρος του A ή του B .
4. Ένα μόνο σημείο μεταξύ A και B μπορεί να απέχει ίσα από τα άκρα. Το σημείο αυτό ονομάζεται μέσο του ευθυγράμμου τμήματος και ισχύει αν M μέσο του AB τότε  $AM=MB$ .

**Ημιευθεία** Αν σηματοδέψω ένα σημείο πάνω σε μία ευθεία ορίζω δύο μέρη της που το καθένα λέγεται ημιευθεία .

1. Η ημιευθεία έχει αρχή μα δεν έχει τέλος.
2. Ονομάζουμε την αρχή με κεφαλαίο γράμμα και την κατεύθυνση με πεζό. Π.χ. Αχ
3. Ένα σημείο μπορεί να γίνει αρχή για άπειρες ημιευθείες.
4. **Αντικείμενες** είναι δύο ημιευθείες με κοινή αρχή, στην ίδια πάνω ευθεία και αντίθετα κατευθυνόμενες.

**Ευθείες στο επίπεδο:** Αν χαράξω δύο ευθείες πάνω σε επίπεδο τότε ή θα τέμνονται ή δεν θα τέμνονται δηλαδή θα είναι παράλληλες.

1. Στην περίπτωση τεμνομένων ευθειών αν σχηματίζουν 4 ίσες γωνίες (ορθές) γύρω από το σημείο τομής τις λέμε **κάθετες** (Το εξακριβώνουμε με το ορθογώνιο τρίγωνο – γνώμονας).
2. Από σημείο εκτός ευθείας **μία παράλληλη** στην ευθεία μπορώ να χαράξω.
3. Από σημείο εκτός ευθείας **μία κάθετη** στην ευθεία μπορώ να χαράξω. Το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο στη ευθεία λέγεται **απόσταση του σημείου από την ευθεία**.
4. Από σημείο πάνω σε ευθεία **μία κάθετη** στην ευθεία μπορώ να χαράξω.

**Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος:** είναι μία ευθεία γραμμή κάθετη στο μέσο του ευθυγράμμου τμήματος

**Ιδιότητα μεσοκαθέτου:** Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου απέχει ίσα από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος.

**Αντίστροφα:** Αν ένα σημείο εκτός ευθυγράμμου τμήματος απέχει το ίδιο από τα άκρα τότε θα βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετο ευθεία του ευθ. τμήματος.

**Ονομασία γωνίας:** Δύο ημιευθείες με κοινή αρχή ορίζουν ένα επίπεδο που το χωρίζουν σε δύο μέρη. Αυτά τα επίπεδα μέρη είναι οι γωνίες.

**Ορθή** μία από τις γωνίες που σχηματίζουν δύο κάθετες ευθείες. (= με 90 μοίρες)

**Αμβλεία** η μεγαλύτερη της ορθής. ( $> 90^\circ$ )

**Οξεία** η μικρότερη της ορθής. ( $< 90^\circ$ )

**Ευθεία** οι πλευρές είναι αντικείμενες ημιευθείες. (=  $180^\circ$ )

**Διχοτόμος** είναι μία ημιευθεία (με αρχή την κορυφή της γωνίας) που χωρίζει την γωνία σε δύο ίσες γωνίες

### Τρίγωνο

- Ονομασία τριγώνου από τις πλευρές:
  1. Αν και οι τρεις πλευρές του είναι **άνισες** τότε το τρίγωνο λέγεται **σκαληνό**.
  2. Αν μόνο οι δύο πλευρές είναι ίσες λέγεται **ισοσκελές**.
  3. Αν και οι τρεις πλευρές του είναι ίσες λέγεται **ισόπλευρο**.
- Ονομασία τριγώνου από τις γωνίες:
  1. Αν έχει μία μόνο γωνία ορθή ονομάζεται **ορθογώνιο**.
  2. Αν έχει μία μόνο γωνία αμβλεία ονομάζεται **αμβλυγώνιο**.
  3. Αν και οι τρεις γωνίες είναι οξείες ονομάζεται **οξυγώνιο**.  
Το ορθογώνιο που έχει τις πλευρές της ορθής γωνίας του ίσες λέγεται **ισοσκελές ορθογώνιο**.  
Το αμβλυγώνιο που έχει τις πλευρές της αμβλείας γωνίας του ίσες λέγεται **ισοσκελές αμβλυγώνιο**.

**Κύρια στοιχεία** του τριγώνου είναι οι τρεις γωνίες του και οι τρεις πλευρές του.

**Δευτερεύοντα στοιχεία** του τριγώνου είναι τα:

Τρία **ύψη** του, οι τρεις **διάμεσοι** και οι τρεις **διχοτόμοι** των γωνιών του.

- **Ύψος** τριγώνου είναι το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από την κορυφή στην απέναντι πλευρά ή απόσταση της κορυφής από την απέναντι πλευρά.
- **Διάμεσος** είναι το ευθύγραμμο τμήμα από την κορυφή στο μέσο της απέναντι πλευράς
- **Διχοτόμος** γωνία τριγώνου είναι το ευθύγραμμο τμήμα που χωρίζει την γωνία του τριγώνου σε δύο ίσες γωνίες.

### ΠΡΟΣΟΧΗ !

☞ Πρέπει να γνωρίζουμε ότι η απλή γωνία έχει για πλευρές ημιευθείες και διχοτόμο πάλι ημιευθεία ενώ η γωνία του τριγώνου έχει πλευρές και διχοτόμο ευθύγραμμο τμήματα.

☞ Το ύψους – διχοτόμος – διάμεσος της κορυφής των ίσων πλευρών ισοσκελούς τριγώνου είναι το ίδιο ευθύγραμμο τμήμα. Όμοια και στο ισόπλευρο.

☞ Τα ύψη των οξείων γωνιών ορθογωνίου τριγώνου συμπίπτουν με τις κάθετες πλευρές. Ενώ το ύψη των οξείων γωνιών αμβλυγωνίου τριγώνου βρίσκονται εκτός του τριγώνου.

**Εφεξής** λέγονται δύο γωνίες που έχουν:

1. Κοινή κορυφή
2. Κοινή την μία πλευρά τους
3. Δεν έχουν κανένα άλλο κοινό σημείο

### **Παρατήρηση:**

☞ Διαδοχικές λέγονται τρεις και περισσότερες γωνίες όταν είναι ανά δύο εφεξής.

☞ Για να προσθέσω (ενώσω σχηματικά) δύο γωνίες πρέπει να τις κάνω εφεξής ενώ για τρεις και περισσότερες διαδοχικές.

**Παραπληρωματικές** λέγονται δύο γωνίες με άθροισμα  $180^{\circ}$

**Συμπληρωματικές** λέγονται δύο γωνίες με άθροισμα  $90^{\circ}$

**Κατακορυφήν** λέγονται δύο γωνίες που οι πλευρές της μίας είναι αντικείμενες ημιευθείες των πλευρών της άλλης.. Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.

**Αν δύο ευθείες παράλληλες τέμνονται από τρίτη ευθεία** οι σχηματιζόμενες γωνίες **εντός** των παραλλήλων και **εναλλάξ** της τέμνουσας είναι **ίσες**.

**Αντίστροφα:** Αν δύο ευθείες που τέμνονται από τρίτη σχηματίζουν **εντός** (των δύο πρώτων) **εναλλάξ** (της τέμνουσας – τρίτης) γωνίες που είναι **ίσες** τότε οι **δύο πρώτες ευθείες είναι παράλληλες**.

Σε τρίγωνο και οι τρεις γωνίες μαζί δίνουν άθροισμα 180 μοιρών δηλαδή

$$\text{Αν } \triangle \text{ΑΒΓ τριγώνου τότε } \mathbf{A + B + \Gamma = 180^\circ}$$

**Παρατήρηση:**

☞ Η ισότητα αυτή μας δίνει να καταλάβουμε γιατί δεν μπορώ να έχω τρίγωνο με δύο ορθές ή δύο αμβλείες γωνίες.

☞ Οι γωνίες του ισοπλευρού τριγώνου είναι όλες ίσες με 60 μοίρες.

☞ Οι οξείες γωνίες του ορθογώνιου και ισοσκελούς είναι ίσες με 45 μοίρες η καθεμία.

## **ΚΥΚΛΟΣ**

**Ορισμός:** Κύκλος είναι το επίπεδο γεωμετρικό σχήμα (σύνολο σημείων) του οποίου τα σημεία ισαπέχουν από ένα χαρακτηριστικό σημείο το κέντρο. Η απόσταση αυτή (του κάθε σημείου από το κέντρο) ονομάζεται ακτίνα.

1. **Χορδή:** είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα με τα άκρα πάνω στον κύκλο.
2. **Τόξα:** είναι ένα κομμάτι από τον κύκλο.
3. **Διάμετρος:** είναι μία χορδή που περνά από το κέντρο του κύκλου.
4. **Κυκλικός δίσκος:** Είναι ο κύκλος και το εσωτερικό επίπεδο μέρος.

**Παρατήρηση:** ☞ Δύο σημεία του κύκλου ορίζουν δύο τόξα και μία χορδή.  
☞ Αν τα τόξα είναι ίσα η χορδή τότε έγινε διάμετρος *άρα η διάμετρος χωρίζει τον κύκλο σε δύο ίσα μέρη*

### **5. Θέση μίας ευθείας και κύκλου.**

**Α.** Η ευθεία **τέμνει** τον κύκλο άρα η απόσταση του κέντρου από την ευθεία είναι μικρότερη της ακτίνας.

**Β.** Η ευθεία **εφάπτεται** του κύκλου άρα η απόσταση του κέντρου από την ευθεία είναι ίση με την ακτίνα.

**Γ.** Κανένα από τα δύο παραπάνω άρα η απόσταση του κέντρου από την ευθεία είναι μεγαλύτερη της ακτίνας.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟΝ ΟΓΚΟ

1. Να βρεθεί ο όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις μήκος 6,4 m πλάτος 25 dm και ύψος 3850 mm. (απ.  $61,6 \text{ m}^3$ )
2. Να βρεθεί ο όγκος κύβου με ακμή 28dm σε α]  $\text{m}^3$ , β]  $\text{dm}^3$ , γ]  $\text{cm}^3$   
(απ.  $21,952\text{m}^3$ ,  $21.952\text{dm}^3$ ,  $21.952.000\text{cm}^3$ )
3. Το εμβαδόν μίας έδρας κύβου είναι 64 τετραγωνικά μέτρα. Να βρεθεί ο όγκος του. ( $V=512 \text{ m}^3$ )
4. Σε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο το μήκος είναι 70 dm, το πλάτος 5 m. Αν ο όγκος είναι  $217 \text{ m}^3$ , να βρεθεί το ύψος του. (ύ-  
ψος=6,2 μέτρα)
5. Ένα δοχείο λαδιού σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου και με διαστάσεις 2,9μέτρα μήκος, 1,5 μέτρα πλάτος και 0,72 μέτρα ύψος είναι γεμάτο. Πόσα λίτρα λάδι έχει και πόσο κοστίζει το λάδι αν το ένα λίτρο κοστίζει 1725 δραχμές; (απ. 3.132 l και 5.402.700 δραχμές)
6. Ένα βάθρο σε σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου και με διαστάσεις μήκος 1,8 m , πλάτος 1,2 m και ύψος 8,5 dm, θα κτιστεί με τσιμεντόλιθους διαστάσεων 37cm, 15 cm , 17 cm. Πόσους τσιμεντόλιθους θα χρειαστούμε; (απ. 195 τσιμεν/θολ)
7. Οι νόμοι προβλέπουν χώρο για μία σχολική αίθουσα  $8 \text{ m}^3$  για κάθε άτομο. Με μέγιστο αριθμό 34 μαθητών να βρεθεί το κατάλληλο μήκος για την αίθουσα αν το πλάτος της είναι 6,5 m και το ύψος της 3,5 m. (απ. 11,956 m)
8. Μία γυάλα για ψάρια σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου και με διαστάσεις μήκος 80 cm, πλάτος 45cm και ύψος νερού 60 cm. α] Να βρεθεί όγκος της. β] Αν προσθέσουμε ακόμη 120 λίτρα νερό κατά πόσο θα υπερυψωθεί; (απ.  $216\text{dm}^3$ , 33,33 cm περίπου)
9. Ένας συνεταιρισμός κρασιού έχει στις δεξαμενές του 184.800 λίτρα κρασί. Για να το μεταφέρει σε άλλο χώρο μίσθωσε ένα ειδικό όχημα μεταφοράς με χωρητικότητα 15,4 κυβικά μέτρα. Αν το κάθε δρομολόγιο χρεώνεται 7000 δραχμές, πόσα θα τους κοστίσει η μεταφορά συνολικά; (απ. 84.000 δραχμές )
10. Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις: μήκος 10 cm, πλάτος 5 cm και ύψος 13,2 cm. Αν αυξήσουμε τις διαστάσεις της βάσης κατά 0,1 dm πόσο πρέπει να ελαττώσουμε το ύψος ώστε ο όγκος να παραμείνει σταθερός; (απ. 3,2 cm )
11. Ένας κύβος έχει ακμή α. να βρείτε πόσο αυξάνετε ο όγκος του αν:  
α] διπλασιάσουμε την ακμή.  
β] τριπλασιάσουμε την ακμή. (απ. 8-πάσιος, 27-πλάσιος)

## Ασκήσεις στο εμβαδόν.

1. Να βρεθεί η περίμετρος και το εμβαδόν ορθογωνίου παραλληλογράμμου με μήκος 0,68m και πλάτος 50cm. (απ.  $P=2,36 \text{ m}$ ,  $E=0,34 \text{ m}^2$ )

2. Η περίμετρος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι 1,28 km και το μήκος του 360m. Να βρεθούν , το πλάτος του και το εμβαδόν του σχήματος.  
(απ. Πλάτος=280m,  $E=100800m^2$ )
3. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος 7,8 m και εμβαδόν 50,7 m<sup>2</sup>. Να βρεθεί το πλάτος και η περίμετρος του ορθογωνίου.  
(απ. Πλάτος 6,5m, Περίμετρος=28,6m)
4. Να βρεθεί το εμβαδόν ενός τετραγώνου που έχει περίμετρο 36,8m. (απ.  $E=84,64m^2$ )
5. Ένα ορθογώνιο έχει εμβαδόν όσο και ένα τετράγωνο με πλευρά 20 μέτρα. Αν το μήκος του ορθογωνίου είναι 25 μέτρα, να βρεθεί το πλάτος του ορθογωνίου. (απ. 16 μέτρα)
6. Ένα χαλί με μήκος 65dm και πλάτος 3,4 m πουλήθηκε αντί 25.480 δραχμές το μέτρο. Πόσο κόστισε η αγορά του;  
( απ. 563.108 δραχμές)
7. Μία σχολική αίθουσα έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου με διαστάσεις μήκος 6 μέτρα και πλάτος 3,6 μέτρα. Θέλουμε να στρώσουμε την αίθουσα με τετράγωνα πλακάκια πλευράς 40 cm. Πόσα πλακάκια θα χρειαστούμε και πόσα χρήματα θα πληρώσουμε αν το ένα πλακάκι έχει 856 δραχμές;  
(απ. 135 πλακάκια, 115.560 δραχμές)
8. Ένα αγρόκτημα σε σχήμα ορθογωνίου έχει μήκος 48,5 μέτρα και πουλήθηκε 250.000 χιλιάδες το στρέμμα κόστισε συνολικά 1.455.000 δραχμές. Να βρεθεί το εμβαδόν του αγροκτήματος και το πλάτος του.  
(απ.  $E=5820 m^2$ , μήκος=120 m)
9. Αγρόκτημα σχήματος ορθογωνίου με μήκος 120 m και εμβαδόν 6240 m<sup>2</sup> .Στο ένα άκρο του χωραφιού χωρίζουμε ένα τετράγωνο πλευράς ίσης με το πλάτος του ορθογωνίου. Πόσο είναι το εμβαδόν του χωραφιού που απομένει;  
(απ. 3.536 m<sup>2</sup>)
10. Σε οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου το μήκος είναι τετραπλάσιο από το πλάτος και η περίμετρος του είναι 80 μέτρα. Να βρεθεί η αξία του οικοπέδου αν το ένα μέτρο κοστίζει 45.000 δραχμές.  
(απ.  $E=256m^2$ , 11.520.000 drx)
11. Σε μία οικοδομική περιοχή σχήματος τετραγώνου με πλευρά 70 m πρόκειται να κατασκευαστεί πεζοδρόμιο πλάτους 150 cm. Πόσες πλάκες θα χρειαστεί ο εργολάβος για το πεζοδρόμιο αν ξέρουμε ότι η κάθε πλάκα είναι σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις 50 cm και 30 cm.  
(απ. 2.860 πλάκες)
12. Να υπολογίσετε σε τετραγωνικά μέτρα το εμβαδόν ενός ορθογωνίου, στο οποίο το μήκος του είναι τριπλάσιο από το πλάτος του και η περίμετρός του είναι **88 dam**.  
(απ.  $E = 36.300 m^2$ )