Επανάληψη γνωστών μαθηματικών εννοιών
Ρητοί Αριθμοί

Φυσικοί Αριθμοί είναι οι 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ... και συμβολίζονται με το γράμμα **N** δηλαδή N = {0,1,2,3,4,...} *το σύνολο των Φυσικών Αριθμών*. (Τα {} λέγονται άγκιστρα και συμβολίζουν το σύνολο).

Οι αριθμοί 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ... (*δηλαδή Φυσικοί εκτός μηδενός*) ονομάζονται **θετικοί αριθμοί**. Συνήθως μπροστά τους βάζω το **σύμβολο +,** αλλά η παράληψή του δεν είναι λάθος και το προτιμάμε συνήθως.

Οι αριθμοί .... -11, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1 (*δηλαδή φυσικοί που έχουν μπροστά τους το σύμβολο* **–**) ονομάζονται **αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί**.

Το **σύνολο των ακεραίων** είναι οι παρακάτω αριθμοί , συμβολίζονται με το **Z**

.... -11, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1 0 1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...

Αρνητικοί ακέραιοι Θετικοί ακέραιοι

Μηδέν

δηλαδή Z = {....-4,-3,-2,-1, 0, +1,+2,+3,+4,....}

Πρακτικά δεχόμαστε ότι οι αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί εκφράζουν το αντίθετο από ότι εκφράζουν οι φυσικοί (*θετικοί ακέραιοι αριθμοί*).

Παράδειγμα: *αν μιλάμε για ύψος -3 μέτρα, εννοούμε 3 μέτρα βάθος.*

Ρητοί λέγονται οι αριθμοί που μπορούν να γραφούν με μορφή κλάσματος.

(**αυστηρότερος ορισμός:** Το σύνολο των Ρητών αποτελείται από αριθμούς της μορφής $\frac{\alpha}{\beta}$ ή α:β όπου α ακέραιος, β ακέραιος αλλά όχι μηδέν και Μ.Κ.Δ.(α, β) = 1 δηλαδή τα α, β αριθμοί πρώτοι μεταξύ τους).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: $-3 = \frac{-3}{1}$, $\frac{2}{3}$, $2{,}25 = \frac{9}{4}$, το $\frac{4}{8}$ το παρουσιάζουμε με $\frac{1}{2}$

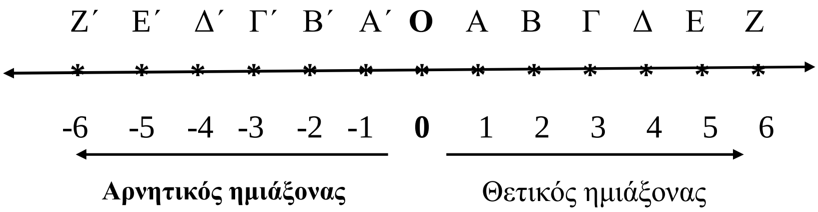
- Το **+ ή –** μπροστά σε ένα ρητό αριθμό λέγεται πρόσημο του αριθμού.

  Το + συμβολίζει ότι ο αριθμός είναι θετικός δηλαδή μεγαλύτερος (πάνω) του μηδενός.

  Το - συμβολίζει ότι ο αριθμός είναι αρνητικός δηλαδή μικρότερος (κάτω) του μηδενός.
- **Δύο ή περισσότεροι** αριθμοί με το ίδιο πρόσημο λέγονται **ομόσημοι**.
- **Μόνο δύο** αριθμοί με διαφορετικό πρόσημο λέγονται **ετερόσημοι**.

<u>Άξονας ακεραίων</u> .

Σε ευθεία γραμμή λαμβάνω σημεία Ο(όμικρον) και Α στην τύχη, άρα όρισα ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ με μέγεθος τυχαίο. Κατασκευάζω διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα αριστερά και δεξιά του ΟΑ και **όλα ίσα με το ΟΑ**. Στο Ο τοποθετώ από κάτω τον αριθμό μηδέν στο Α το 1, στο Β το 2, κλπ ενώ στο Α’ το -1, Β΄το -2 κλπ. Η βαθμολογημένη αυτή ευθεία γραμμή λέγεται άξονας των ακεραίων.



Όμοια αλλά περισσότερο δυσκολότερα ορίζεται και ο άξονας των ρητών αριθμών, γιατί στα άπειρα σημεία το τμήματος ΑΒ πρέπει να τοποθετηθούν όλα τα κλάσματα.

Απόλυτη τιμή ρητού αριθμού

Παρατηρώ το Δ και το Δ’ απέχουν το ίδιο το Όμικρον, άρα και τα 4 και -4 από το 0 (μηδέν).

Πόσο απέχουν; 4(τέσσερα) διαστήματα το καθένα. **Η απόσταση αυτή ονομάζεται απόλυτη τιμή του αριθμού.** Συμβολίζεται με (| |) δύο κατακόρυφες γραμμούλες που μέσα τους γράφω τον αριθμό.

Παράδειγμα: |3|=3, |-3|=3, $\left|\frac{-2}{3}\right| = \frac{2}{3}$, |2,34|=2,34, |-2,34|=2,34 και |0|=0

Παρατηρούμε από τα παραδείγματα:

1. Η απόλυτη τιμή ενός θετικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός.
2. Η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετος του αριθμός.
3. Η απόλυτη τιμή του μηδενός είναι το μηδέν.
4. Η απόλυτη τιμή κάθε ρητού αριθμού είναι πάντα θετικός αριθμός.(μπορώ να σκέφτομαι κρυφά στο μυαλό μου τη φράση «**ο αριθμός χωρίς το πρόσημο**»)

Η απόλυτη τιμή ενός αριθμού λέγεται και **μέτρο**. (Γιατί βρίσκεται από το μέτρημα της απόστασής του από το μηδέν)

Αντίθετοι αριθμοί

Δύο αριθμοί με ίδια απόλυτη τιμή αλλά διαφορετικό πρόσημο λέγονται αντίθετοι.

Παραδείγματα: το 5 έχει αντίθετο το -5, το -12 έχει αντίθετο το 12, -2,25 έχει το 2,25

<u>Παρατηρούμε από τα παραδείγματα:</u>

1. Ο αντίθετος ενός αριθμού βρίσκεται στον άλλο ημιάξονα και σε ίση απόσταση από το μηδέν. Γενικά το αντίθετο του ρητού αριθμού χ είναι το -χ και το αντίθετο του -χ είναι το χ.
2. **Δύο αντίθετοι** αριθμοί θα είναι πάντα **ετερόσημοι** και **έχουν την ίδια απόλυτη τιμή.**

Σύγκριση Ρητών αριθμών

Μεταξύ δύο ρητών αριθμών μεγαλύτερος είναι αυτός που βρίσκεται δεξιότερα στον άξονα.

1. Μεταξύ δύο **θετικών** μεγαλύτερος είναι αυτός με την **μεγαλύτερη απόλυτη τιμή**.
2. Μεταξύ δύο **αρνητικών** μεγαλύτερος είναι αυτός με την **μικρότερη απόλυτη τιμή.**
3. Μεταξύ δύο **ετεροσήμων** μεγαλύτερος πάντα είναι ο θετικός.
4. Το 0 είναι μεγαλύτερο κάθε αρνητικού και μικρότερο κάθε θετικού.

Πράξεις ρητών αριθμών

Πρόσθεση	Ομοσήμων	Βάζω το κοινό πρόσημο και προσθέτω τιμές.
	Ετεροσήμων	Βάζω το πρόσημο του μεγαλύτερου σε τιμή αριθμού και αφαιρώ τιμές.

Παραδείγματα:

(+3)+(+7)= +10, $(-\frac{2}{5})+(-\frac{1}{5})= -\frac{3}{5}$, 0+(-3)= -3, $(+\frac{2}{3})+0= \frac{2}{3}$

(-7)+(+2,5)= -4,5 $(-\frac{2}{5})+(+\frac{1}{5})= -\frac{1}{5}$, 5+(-8)=-3, -7+(-3)= -10

Αφαίρεση Αντί για αφαίρεση προσθέτω στον μειωτέο **(α)** τον αντίθετο του αφαιρετέου **(β)**

α - β = α + (-β)

Παραδείγματα: 7-5=7+(-5)..., -2-(-4) =-2+(+4)=..., $\frac{2}{5}-(+\frac{1}{5})=\frac{2}{5}+(-\frac{1}{5})=$...

Πολλαπλασιασμός	Ομοσήμων	βάζω + και πολ/ζω τιμές.
	Ετεροσήμων	βάζω - και πολ/ζω τιμές.

Σε πολλούς παράγοντες για να βρω το πρόσημο μετράω μόνο τα - και αγνοώ τα +

- αν το πλήθος των - είναι άρτιο (ζυγό) τότε βάζω +
- αν το πλήθος των - είναι περιττό (μονό) τότε βάζω -

και μετά πολλαπλασιάζω όλες τις τιμές

Παραδείγματα:

$(-2)\bullet(-5)= +10$, $-2\bullet(+3)= -6$, $+2\bullet(+4)= +8= 8$

$\frac{2}{5}\bullet(+\frac{1}{5})= +\frac{2}{25}$, $+\frac{2}{5}\bullet(-\frac{1}{5})= -\frac{2}{25}$, $(-\frac{2}{5})\bullet(-\frac{1}{5})= +\frac{2}{25}$

$(-2)\bullet(+3)\bullet(-1)\bullet(-5)\bullet(+2)= -60$, $0\bullet(-23456)=0$, $+3456\bullet 0= 0$

<u>Διαίρεση</u> Πολλαπλασιάζω τον διαιρετέο (**α**) με τον αντίστροφο του διαιρέτη (**β**).

$α:β = \frac{α}{β} = α\bullet\frac{1}{β}$ όπου β δεν είναι μηδέν

<u>Τι πρέπει να γνωρίζω σχετικά με τις πράξεις:</u>

1. Η αντιμεταθετική ιδιότητα (αλλαγή θέσης στους όρους της πράξης) ισχύει για τις πράξει πρόσθεση και πολλαπλασιασμό μόνο.
2. Για να προσθέσω πολλού θετικούς και αρνητικούς αριθμούς προσθέτω πρώτα όλους τους θετικούς βάζοντας πρόσημο στο άθροισμα +, μετά όλους τους αρνητικούς βάζοντας - και τέλος εκτελώ πρόσθεση μεταξύ των δυο ετεροσήμων.
3. Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν πάντα άθροισμα μηδέν. π.χ. $(+5)+(-5)=0$
4. Αντίστροφοι λέγονται δύο αριθμοί που έχουν γινόμενο **ένα** π.χ. 7 και $\frac{1}{7}$. Οι αντίστροφοι αριθμοί είναι ομόσημοι.
5. Το Μηδέν (0) στην πρόσθεση λέγεται «**ουδέτερο**» γιατί όπου προστίθεται δεν αλλάζει το άθροισμα, ενώ στον πολλαπλασιασμό είναι «**απορροφητικό**» δηλαδή κάνει όλο το γινόμενο μηδέν, π.χ.: $α + 0 = α$ και $α \cdot 0 = 0$ για κάθε α.
6. Το ένα (1) είναι ουδέτερο στον πολλαπλασιασμό, $α\cdot 1 = 1\cdot α = α$.
7. Διαίρεση με διαιρέτη μηδέν δεν γίνεται.
8. Προσεταιριστική ιδιότητα ισχύει στις πράξεις πρόσθεση και πολλαπλασιασμός όπου μπορώ να έχω περισσότερους από δύο όρους: $(α+β)+γ = α+(β+γ)$ ή $(α\cdot β)\cdot γ = α\cdot(β\cdot γ)$
9. Επιμεριστική ιδιότητα $(α \pm β)\cdot γ = α\cdot γ \pm β\cdot γ$

Δ Υ Ν Α Μ Ε Ι Σ

Ορισμός: Αν α ρητός αριθμός και ν Φυσικός αριθμός τότε ισχύει:

$$\alpha^{\nu} = \begin{cases} \alpha & \text{αν } \nu = 1 \\ \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \ldots \alpha & \text{αν } \nu\text{-φορές αν } \nu > 1 \\ 1 & \text{αν } \nu = 0 \text{ και } \alpha \neq 0 \end{cases}$$

ειδικά αν ν φυσικός, δηλαδή -ν αρνητικός ακέραιος ισχύει:

$$\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}} \text{ ή } \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu} \text{ και α, β όχι μηδέν}$$

Ιδιότητες:

Όπου ν, μ ακέραιοι αριθμοί και $\alpha, \beta \neq 0$ ρητοί αριθμοί

α] $\alpha^{\nu} \cdot \alpha^{\mu} = \alpha^{\nu+\mu}$, $(\alpha^{\nu}/\alpha^{\mu} =)\ \alpha^{\nu} : \alpha^{\mu} = \alpha^{\nu-\mu}$

β] $\alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu} = (\alpha \cdot \beta)^{\nu}$, $\alpha^{\nu}/\beta^{\nu} = (\alpha/\beta)^{\nu}$ ή $\alpha^{\nu} : \beta^{\nu} = (\alpha : \beta)^{\nu}$

γ] $(\alpha^{\nu})^{\mu} = \alpha^{\nu\mu}$

Πρέπει να γνωρίζω σχετικά με την προτεραιότητα των πράξεων:

Σε μία αριθμητική παράσταση εκτελώ πράξεις με την παρακάτω **σειρά:**

- **Δυνάμεις**
- **Πολλαπλασιασμός ή διαίρεση**
- **Πρόσθεση ή αφαίρεση**

I] Εάν υπάρχουν και παρενθέσεις εκτελώ τις πράξει μέσα στις παρενθέσεις με την παραπάνω σειρά μέχρι η παρένθεση να μετατραπεί σε ένα αριθμό και μετά συνεχίζω τις πράξεις εκτός παρένθεσης.

*II] Εάν έχω και άλλες εσωτερικές παρενθέσεις ή αγκύλες ή άγκιστρα αρχίζω την απαλοιφή από **μέσα προς τα έξω**, εφαρμόζοντας την (I).*

- **Απλούστευση**

Για να απαλείψω μία παρένθεση εξετάζω το πρόσημο πού έχει μπροστά της. Αν έχει:

- \+ ή τίποτα την απαλείφω μαζί με το + γράφοντας τους εσωτερικούς όρους όπως είναι.
- \- την απαλείφω μαζί με το - γράφοντας τους εσωτερικούς όρους αντίθετους.

Φύλλο εργασίας

Άρρητοι Αριθμοί - Πραγματικοί Αριθμοί.

Ονοματεπώνυμο: ……………………………………………………………… Ημερομηνία ……. /…./200…

1. Γνωρίζουμε ότι το τετράγωνο ενός αριθμού είναι ίσο με το γινόμενο του αριθμού αυτού με τον εαυτό του. Δηλαδή $\alpha^2 = \alpha \cdot \alpha$.

Για παράδειγμα $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$ ή $7^2 = 7 \cdot 7 = 49$, ή $1{,}2^2 = 1{,}2 \cdot 1{,}2 = 1{,}44$.

Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

5^2 = …………………………..	0^2 = …………………………..	1^2 = …………………………..
9^2 = ………………………………	$1{,}5^2$= …………………………	$2{,}1^2$= …………………………
$0{,}3^2$ = ………………………..	$(^3/_{10})^2$ = ………………………..	$(^5/_7)^2$= ………………………..

2. Μερικές φορές την παραπάνω εργασία πρέπει να την κάνουμε αντίστροφα! Για παράδειγμα μπορείτε να βρείτε ποιος αριθμός **(θετικός ή μηδέν)** πρέπει να τοποθετηθεί στη θέση των κενών στις παρακάτω ισότητες;

$(……..)^2 = 4$	$(……..)^2 = 9$	$(……..)^2 = 25$
$(……..)^2 = 36$	$(……..)^2 = 81$	$(……..)^2 = 100$
$(……..)^2 = 0$	$(……..)^2 = 1$	$(……..)^2 = 0{,}16$
$(……..)^2 = 0{,}09$	$(……..)^2 = {}^9/_{16}$	$(……..)^2 = {}^1/_9$

ΟΡΙΣΜΟΣ:

Αν έχουμε έναν αριθμό α (θετικό ή μηδέν), τότε ονομάζουμε **τετραγωνική ρίζα** του α και συμβολίζεται $\sqrt{\alpha}$ τον θετικό ή μηδέν αριθμό χ , **ώστε $\chi^2 = \alpha$**.

Δηλαδή: Αν $\chi^2 = \alpha$, με $\alpha \geq 0$ και $\chi \geq 0$, τότε $\chi = \sqrt{\alpha}$.

3. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες όπως φαίνεται στο παράδειγμα.

Παράδειγμα: είναι $7^2 = 49$ οπότε $\sqrt{49} = 7$

α) είναι $(......)^2 = 25$ οπότε $\sqrt{25} =$ .... β) είναι $(......)^2 = 64$ οπότε $\sqrt{64} =$ ....

γ) είναι $(......)^2 = 1$ οπότε $\sqrt{1} =$ .... δ) είναι $(......)^2 = 0$ οπότε $\sqrt{0} =$ ....

4. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες όπως φαίνεται στο παράδειγμα.

Παράδειγμα: είναι $\sqrt{100} = 10$ γιατί $10^2 = 100$

α) είναι $\sqrt{81} =$ .... γιατί $(......)^2 =$ .... β) είναι $\sqrt{64} =$ .... γιατί $(......)^2 =$ ....

γ) είναι $\sqrt{0} =$ .... γιατί $(......)^2 =$ .... δ) είναι $\sqrt{36} =$ .... γιατί $(......)^2 =$ ....

ε) είναι $\sqrt{0,09} =$ ...... γιατί $(......)^2 =$ .... στ) είναι $\sqrt{\frac{25}{9}} =$ .... γιατί $(......)^2 =$ ....