

Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων

Όταν θέλουμε να συγκρίνουμε δύο ευθύγραμμα τμήματα, υπολογίζουμε τη διάφορα ή το λόγο των μηκών τους.

- Στην περίπτωση του λόγου υπολογίζουμε πόσες φορές το ένα τμήμα είναι μεγαλύτερο από το άλλο.

Παράδειγμα: Αν $AB = 12\text{m}$ και $B\Gamma = 6\text{m}$ τότε $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{12\text{m}}{6\text{m}} = 2$ ο αριθμός 2 λέγεται

λόγος του AB προς το $B\Gamma$

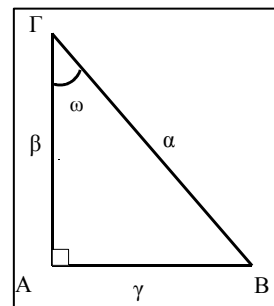
- Ο **λόγος** δυο ευθυγράμμων τμημάτων **δεν εξαρτάται από τη μονάδα** με την οποία θα μετρηθούν.
- Βασική προϋπόθεση να μετρηθούν με την ίδια μονάδα .

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας στο ορθογώνιο τρίγωνο

Ημίτονο μιας οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου λέγεται:

ο λόγος της απέναντι κάθετης πλευράς προς την υποτείνουσά του.

$$\eta\mu\Gamma = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{Υποτείνουσα}}$$



Συνημίτονο μιας οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου λέγεται:

ο λόγος της προσκείμενης κάθετης πλευράς προς την υποτείνουσά του.

$$\sigma\upsilon\eta\Gamma = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{Υποτείνουσα}}$$

Εφαπτόμενη μιας οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου λέγεται:

ο λόγος της απέναντι κάθετης πλευράς προς την προσκείμενη κάθετη πλευράς.

$$\epsilon\phi\Gamma = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\text{απέναντι κλάθετη}}{\text{προσκείμενη κάθετη}}$$

Παρατηρήσεις:

1. Επειδή οι κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι μικρότερες από την υποτείνουσα, ισχύουν οι σχέσεις: $0 < \eta\mu\omega < 1$ και $0 < \sigma\upsilon\eta\omega < 1$.
2. Όταν αυξάνεται μια οξεία γωνία, αυξάνεται και το ημίτονό της.
3. Όταν αυξάνεται μια οξεία γωνία, ελαττώνεται το συνημίτονο της.

Σχέσεις μεταξύ των τριγωνομετρικών αριθμών.

A. Αν Γ είναι μια οξεία γωνία, τότε από στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

$$\eta\mu\Gamma = \frac{\gamma}{\alpha} \quad \sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\text{Άρα } \eta\mu^2\Gamma + \sigma\upsilon\nu^2\Gamma = \frac{\gamma^2}{\alpha^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{\gamma^2 + \beta^2}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2} = 1 \text{ γιατί από Πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει}$$

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \text{ άρα}$$

$$\eta\mu^2\Gamma + \sigma\upsilon\nu^2\Gamma = 1$$

ΠΡΟΣΟΧΗ! $\eta\mu^2\Gamma = (\eta\mu\Gamma)^2 \neq \eta\mu\Gamma^2$.

B. Γνωρίζουμε ότι $\epsilon\phi\Gamma = \frac{\gamma}{\beta}$ έχουμε $\frac{\eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu\Gamma} = \frac{\gamma}{\alpha} : \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta} = \epsilon\phi\Gamma$ άρα

$$\epsilon\phi\Gamma = \frac{\eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu\Gamma}$$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί των αξιοσημείωτων γωνιών $45^\circ, 30^\circ, 60^\circ$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

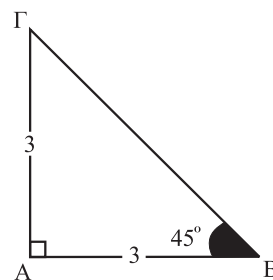
Συμπληρώστε τον διπλανό πίνακα.

Εργαζόμενοι στις παρακάτω εφαρμογές

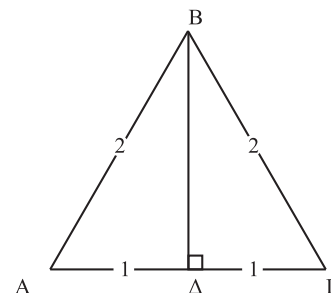
ω	30°	45°	60°
$\eta\mu\omega$			
$\sigma\upsilon\nu\omega$			
$\epsilon\phi\omega$			

Εφαρμογές:

- Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με κάθετες πλευρές 3 cm. Να υπολογίσετε:
 - την υποτείνουσά του
 - τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας των 45° και να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα.



- Στο διπλανό σχήμα να εντοπίσετε γωνίες:
 - 60° και β) 30° .
 Στη συνέχεια να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς και να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα.



Φύλλο εργασίας

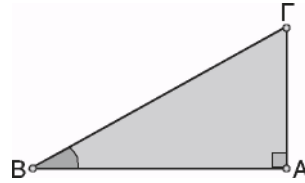
Τριγωνομετρία

Όνοματεπώνυμο: Ημερομηνία /.../200...

Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, $A=90^\circ$ (ορθή), λέμε ότι:

Η πλευρά $B\Gamma$ είναι η υποτείνουσα.

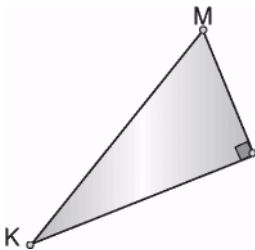
Οι πλευρές AB και $A\Gamma$ είναι οι κάθετες πλευρές και μάλιστα:



- Η πλευρά AB είναι η προσκείμενη κάθετη στη γωνία B .
- Η πλευρά $A\Gamma$ είναι η απέναντι κάθετη στη γωνία B .

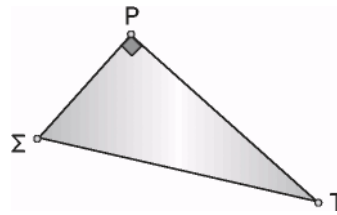
Να συμπληρώσετε τις φράσεις:

Στο τρίγωνο $K\Lambda M$



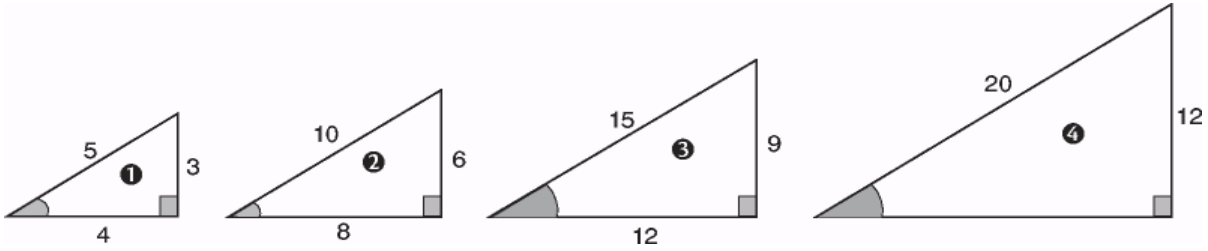
- Η υποτείνουσα είναι η.....
- Η προσκείμενη κάθετη πλευρά στη γωνία K είναι η
- Η απέναντι κάθετη πλευρά στη γωνία K είναι η
- Η απέναντι κάθετη πλευρά τη γωνία M είναι η

Στο τρίγωνο $P\Sigma T$



- Η υποτείνουσα είναι η
- Η πλευρά $P\Sigma$ είναι στη γωνία T .
- Η πλευρά PT είναι στη γωνία T .
- Η πλευρά $P\Sigma$ είναι στη γωνία Σ .

2. Στα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα οι σημειωμένες οξείες γωνίες είναι ίσες.



Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Τρίγωνο	Υποτείνουσα	Απέναντι	Προσκειμένη	Απέναντι κάθετη υποτείνουσα	Προσκειμένη κάθετη υποτείνουσα
		κάθετη			
1					
2					
3					
4					

3. Παρατηρούμε ότι σε όλα τα ορθογώνια τρίγωνα που έχουν μια οξεία γωνία θ ,

α) Ο λόγος $\frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}$ είναι ο ίδιος.

Ο λόγος αυτός ονομάζεται

β) Ο λόγος $\frac{\text{προσκειμένη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}$ είναι ο ίδιος.

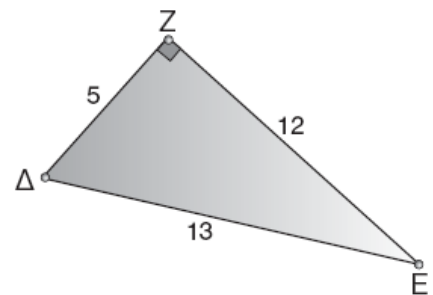
Ο λόγος αυτός ονομάζεται

4. Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο του διπλανού σχήματος.

Να συμπληρώσετε τους αριθμούς:

$\eta\mu\hat{E} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$ $\sigma\upsilon\nu\hat{E} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$

$\eta\mu\hat{\Delta} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$ $\sigma\upsilon\nu\hat{\Delta} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$



Ασκήσεις

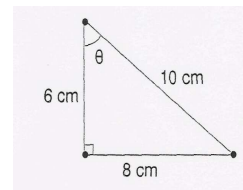
1. Να κυκλώσετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

A) Όταν μία οξεία γωνία αυξάνεται, τότε η εφαπτομένη της:

A. αυξάνεται B. μειώνεται Γ. μένει σταθερή

B) Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο η $\epsilon\phi\theta$

A. $\frac{6}{10}$ B. $\frac{8}{6}$ Γ. $\frac{6}{8}$ Δ. $\frac{8}{10}$



2. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($A = 90^\circ$) έχει $AB = 3\text{cm}$ και $B\Gamma = 50\text{mm}$ βρεθούν οι εφαπτόμενες των οξείων γωνιών του.

3. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($A = 90^\circ$) έχει $B\Gamma = 20\text{cm}$ και $AB = 12\text{cm}$ βρεθούν οι εφαπτόμενες των οξείων γωνιών του.

4. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($A = 90^\circ$) έχει $A\Gamma = 20\text{m}$ και γωνία $B = 32^\circ$. Να υπολογισθεί το μήκος της AB.

5. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($A = 90^\circ$) έχει $AB = 12\text{cm}$ και $B = 25^\circ$. Να υπολογισθεί το μήκος της AΓ.

6. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($A = 90^\circ$) με $AB = 60\text{m}$ και $\epsilon\phi B = \frac{3}{4}$. Να υπολογίσετε:

I) το μήκος της πλευράς AΓ. II) το μήκος της πλευράς BΓ.

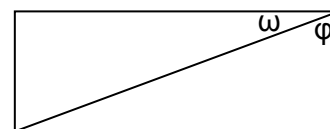
7. Να κατασκευάσετε (σχέδιο) οξεία γωνία ω με:

α) $\epsilon\phi\omega = \frac{3}{7}$ β) $\epsilon\phi\phi = 0,7$ γ) $\epsilon\phi\theta = 0,75$.

8. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($A = 90^\circ$) με $AB = 25\text{cm}$ και $A\Gamma = 5\text{cm}$. Να υπολογιστούν οι οξείες γωνίες του τριγώνου.

9. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($A = 90^\circ$) με $AB = 120\text{m}$ και $\epsilon\phi B = 0,75$. Να βρεθεί η περίμετρος του τριγώνου.

10. Ένας δρόμος έχει ανηφορική κλίση 10%. Να βρεθεί η οριζόντια απόσταση που πρέπει να διαλύσουμε για να ανεβούμε ύψος 80m.



11. Στο διπλανό ορθογώνιο με πλευρές 40m και 25m να υπολογίσετε τις γωνίες ϕ και ω .

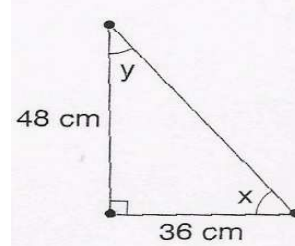
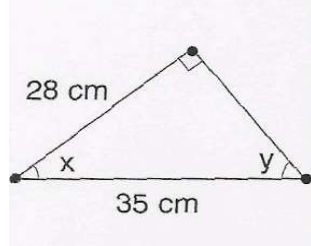
12. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ABΓ η μία από τις δύο ίσες γωνίες του είναι 32° . Αν το ύψος της βάσης είναι 6cm να βρεθούν:

α) η βάση του τριγώνου, β) το εμβαδό του τριγώνου.

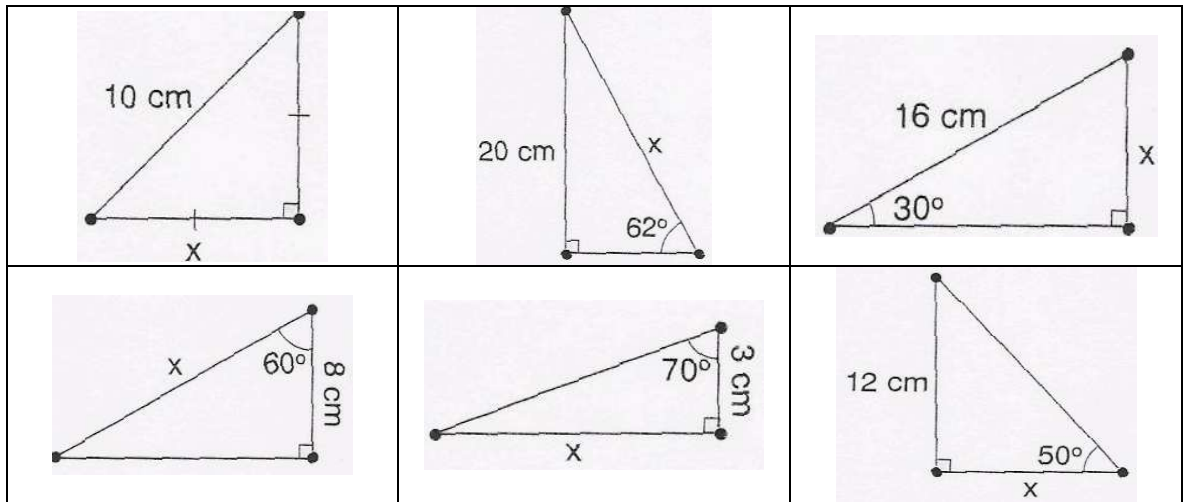
13. Η υποτείνουσα BΓ ενός ορθογώνιου τριγώνου ABΓ, είναι 50cm και η πλευρά AB είναι 30cm. Να υπολογιστούν τα ημίτονα και συνημίτονα των οξείων γωνιών του.

14. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με υποτείνουσα $B\Gamma = 20\text{cm}$ και $\eta\mu\Gamma = 0,8$ να υπολογιστούν τα: $\eta\mu B$, $\text{csc} B$ και $\text{csc} \Gamma$.

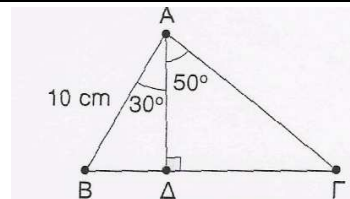
15. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς στα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα.



16. Να υπολογίσετε την πλευρά x στα παρακάτω τρίγωνα:



17. Στο διπλανό τρίγωνο να υπολογίσετε τα μήκη
 α) ΒΔ, ΑΔ, ΔΓ
 β) το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ



18. Σε ορθογώνιο τρίγωνο με Πυθαγόρεια τριάδα 5-12-13 και ω ή ϕ τις οξείες γωνίες:

- Να υπολογίσετε το $\sin \omega$ και την $\epsilon\phi\omega$ όταν το $\eta\mu\omega = \frac{5}{13}$ (όμοια $\eta\mu\omega = \frac{12}{13}$)
- Να υπολογίσετε το $\eta\mu\phi$ και την $\epsilon\phi\phi$ όταν το $\sin\phi = \frac{5}{13}$ (όμοια $\sin\phi = \frac{12}{13}$)
- Να υπολογίσετε το $\eta\mu\omega$ και την $\sin\omega$ όταν το $\epsilon\phi\omega = \frac{5}{12}$ (όμοια $\epsilon\phi\phi = \frac{12}{5}$)

19. Σε ορθογώνιο τρίγωνο με Πυθαγόρεια τριάδα 6-8-10 και ω ή ϕ τις οξείες γωνίες:

- Να υπολογίσετε το $\sin\omega$ και την $\epsilon\phi\omega$ όταν το $\eta\mu\omega = 0,6$ (όμοια $\eta\mu\omega = 0,8$)
- Να υπολογίσετε το $\eta\mu\phi$ και την $\epsilon\phi\phi$ όταν το $\sin\phi = 0,8$ (όμοια $\sin\phi = 0,6$)
- Να υπολογίσετε το $\eta\mu\phi$ και την $\sin\phi$ όταν το $\epsilon\phi\omega = 0,8$ (όμοια $\epsilon\phi\phi = 0,6$)