

Σύνολα

Ορισμός συνόλου (κατά Cantor):

Σύνολο είναι κάθε συλλογή αντικειμένων, που προέρχεται από το μυαλό μας ή την εμπειρία μας, είναι καλά ορισμένο και τα αντικείμενα ξεχωρίζουν το ένα από το άλλο, δηλαδή είναι διαφορετικά.

Τα αντικείμενα αυτά ονομάζονται στοιχεία ή μέλη του συνόλου.

Γνωστά μας σύνολα:

\mathbb{N} σύνολο φυσικών αριθμών

\mathbb{Q} σύνολο ρητών αριθμών

\mathbb{Z} σύνολο ακεραίων αριθμών

\mathbb{R} σύνολο πραγματικών αριθμών

Πώς παρουσιάζεται το σύνολο;

1) Με αναγραφή των στοιχείων π.χ.

$A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ το σύνολο των ψηφίων

$B = \{10,11,12,13,14, \dots, 99\}$ το σύνολο των διψήφιων αριθμών

$N = \{0,1,2,3,4,5, \dots\}$ το σύνολο των φυσικών αριθμών.

Αν θέλω να εκφραστώ «Ο αριθμός 5 είναι φυσικός» για συντομία συμβολίζω $5 \in \mathbb{N}$, το σύμβολο \in (αρχαίο ελληνικό ε) διαβάζεται «ανήκει ή είναι».

2) Με περιγραφή των στοιχείων π.χ.

$Q = \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \text{ όπου } \alpha \in \mathbb{Z}, \beta \in \mathbb{Z}, \beta \neq 0 \text{ και } \text{ΜΚΔ}(\alpha, \beta) = 1 \right\}$ για το σύνολο των ρητών

$R^+ = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$ για το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών.

3) Ίσα σύνολα λέγονται αυτά που τα στοιχεία του ενός είναι ακριβώς ίδια με τα στοιχεία του άλλου. Συμβολίζω $A = B$ π.χ.

$A = \{1,2,3,4,5,6\}$ και $B = \{2,1,6,5,4,3\}$

4) Το σύνολο χωρίς στοιχεία ονομάζεται **καινό σύνολο** και συμβολίζεται με \emptyset ή $\{\}$

Η έννοια της συνάρτησης

Στην καθημερινή μας ζωή παρατηρούμε το φαινόμενο:

- Δύο μεγέθη να βρίσκονται σε **εξάρτηση** μεταξύ τους.
- Αυτό σημαίνει ότι όταν μεταβάλλει ποσότητα το ένα μέγεθος, προκαλεί αναγκαστική μεταβολή και στο άλλο κατά κάποιο συγκεκριμένο τρόπο.

Παραδείγματα

- Ένα όχημα γεμίζει βενζίνη, θα πληρώσει χρήματα ανάλογα με τα λίτρα που θα ρίξει.

x: Λίτρα	1	2	3	5	7	8	10	14	15
y: Χρήματα	0,85 €	1,70 €	2,55 €	4,25 €	5,95 €	6,80 €	8,50 €	11,90 €	12,75 €

- Κατά καιρούς ακούμε στην τηλεόραση για τις αυξήσεις στους μισθούς των εργαζομένων. Αυτή τη χρονιά ανακοινώθηκε αύξηση 3%. Πόσα επιπλέον χρήματα θα πάρουν μισθωτοί με μισθό 700, 800, 900, 1000, 1200, 1500, 2000, 2500, 3000 €;

x: μισθός	700	800	900	1000	1200	1500	2000	2500	3000
αύξηση y = 3% · x	21 €	24 €	27 €	30 €	36 €	45 €	60 €	75 €	90 €

- Ένας μαθητής που βελτιώνει την απόδοση του στο 2^ο διδακτικό τρίμηνο, λέμε «ότι αυτό εξαρτάτε από το περισσότερο διάβασμα», ή ότι «η απόδοσή του είναι **συνάρτηση** του χρόνου διαβάσματος».

Συνάρτηση καλείται η σχέση με την οποία:

κάθε τιμή μιας μεταβλητής x, αντιστοιχίζεται σε **μία μόνο** τιμή μιας μεταβλητής y.

Άρα συνάρτηση (function) είναι μία διαδικασία αντιστοίχισης τιμών μεταξύ δύο μη κενών συνόλων A και B όπου, **κάθε** στοιχείο του A έχει ένα και **μοναδικό αντίστοιχο** στο B.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι «**η μεταβλητή y εκφράζεται ως συνάρτηση της μεταβλητής x**» π.χ. $y = 2 \cdot x$ (οι τιμές-αριθμοί- που θα παίρνει το y θα είναι οι διπλάσιες των αντιστοίχων αριθμών του x)

Το σύνολο των αριθμών του x, (**ορίσματα**) ονομάζεται A ή **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης.

Το σύνολο των αριθμών του y, (**τιμές**) ονομάζεται B ή **σύνολο τιμών** της συνάρτησης.

Παρατηρήσεις & παραδείγματα:

Για να οριστεί καλά μία συνάντηση πρέπει να δοθούν το πεδίο ορισμού A και ο αλγεβρικός τύπος που μας καθορίζει τον τρόπο αντιστοίχισης τιμών.

π.χ. $f : A \rightarrow B$

$: x \rightarrow y = 4 \cdot x$ όπου $A = \{2, 4, 6, 8, 9, 12\}$ μπορούμε να υπολογίσουμε το σύνολο με τις τιμές B .

στο παράδειγμα η συνάντηση, κάθε αριθμός του A “πεδίου ορισμού” τον αντιστοιχίζει στον τετραπλάσιό του, δηλαδή

$$A \ni 2 \rightarrow 4 \cdot 2 = 8 \in B \quad A \ni 6 \rightarrow 4 \cdot 6 = 24 \in B \quad A \ni 9 \rightarrow 4 \cdot 9 = 36 \in B$$

$$A \ni 4 \rightarrow 4 \cdot 4 = 16 \in B \quad A \ni 8 \rightarrow 4 \cdot 8 = 32 \in B \quad A \ni 12 \rightarrow 4 \cdot 12 = 48 \in B$$

Αυτή η εργασία γίνεται καλλίτερα με το να σχηματίσουμε πίνακα τιμών,

Πίνακας τιμών συνάρ- τησης	x	2	4	6	8	9	12
	y	8	16	24	32	36	48

Το σύνολο $B = \{8, 16, 24, 32, 36, 48\}$ είναι το πεδίο τιμών της συνάρτησης.

- Τα ζεύγη αριθμών (x, y) : $(2, 8)$ ή $(4, 16)$ κ.λ.π. μπορώ να τα τοποθετήσω σε σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων να σχηματίσω σημεία όπου $x \in A$ (τεταγμένη του σημείου - οριζόντιος άξονας $x'x$) και $y \in B$ (τεταγμένη του σημείου - κατακόρυφος άξονας $y'y$).

Να συμπληρωθούν οι παρακάτω πίνακες τιμών:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = 2x$											

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = -2x$											

x	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10
$y = 0,5x$											

x	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10
$y = -0,5x$											

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2$											
$y = x^2 + 3$											

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = -x^2$											
$Y = -x^2 + 3$											

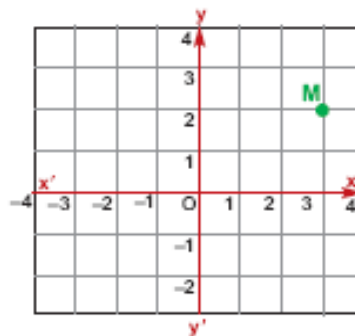
x				
$y = 6x - 18$	-48	-36	-24	-18

x	-5		-3		-1		0
$y = -5x + 20$		-5		5		10	

x		5		3		2	
$y = 0,8x - 10$	-14		-12,4		-10,8		-10

Καρτεσιανές συντεταγμένες - Γραφική παράσταση συνάρτησης.

1. Ένα ζεύγος δύο αξόνων x' και y' που τέμνονται κάθετα στο μηδέν, ονομάζεται **ορθογώνιο σύστημα αξόνων**.
2. Όταν το σύστημα αξόνων έχει και τους δύο άξονες μετρημένους με την ίδια μονάδα μέτρησης, λέγεται **κανονικό σύστημα αξόνων**.
3. Αν συντρέχουν και οι δύο παραπάνω προϋποθέσεις ονομάζεται **ορθοκανονικό σύστημα αξόνων**.
4. Ο **οριζόντιος** άξονας x' καλείται **άξονας τετμημένων**.
5. Ο **κατακόρυφος** y' λέγεται **άξονας τεταγμένων**.
6. Ένα σύστημα αξόνων χωρίζει το επίπεδο σε 4 μέρη. Το καθένα από αυτά λέγεται **τεταρτημόριο**.
7. Κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών (x, y) ονομάζεται **διατεταγμένο ζεύγος ή ζεύγος συντεταγμένων**, όπου:
 - Ο αριθμός x (**τετμημένη**) αντιστοιχεί σε συγκεκριμένο αριθμό του οριζόντιου άξονα x' ,
 - ο y (**τεταγμένη**) σε συγκεκριμένο αριθμό του κατακόρυφου y' .
8. Κάθε ζεύγος αριθμών (x, y) παριστάνει **ένα μοναδικό σημείο** πάνω στο επίπεδο που ορίζει το σύστημα των αξόνων.

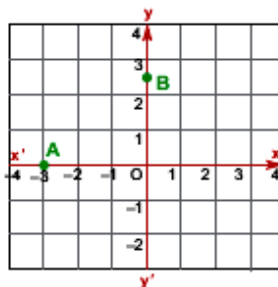


Παρατηρήσεις

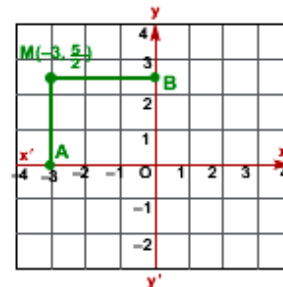
1. Οι συντεταγμένες σημείου είναι θετικοί ή αρνητικοί αριθμοί, ανάλογα με το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται το σημείο. Στο διπλανό σχήμα σημειώνονται τα πρόσημα της τετμημένης και της τεταγμένης σε κάθε τεταρτημόριο.



2. Σε κάθε σημείο του επιπέδου αντιστοιχεί σε ένα μόνο ζεύγος (x, y) συντεταγμένων και αντίστροφα, κάθε ζεύγος αριθμών (x, y) αντιστοιχεί σε μόνο ένα σημείο του επιπέδου.



1. Σημελώνουμε με A το σημείο του άξονα x' που αντιστοιχεί στον αριθμό -3 και με B το σημείο του άξονα y' που αντιστοιχεί στον αριθμό $\frac{5}{2}$.



2. Από τα σημεία A και B φέρνουμε παράλληλες προς τους άξονες y' και x' αντίστοιχα, που τέμνονται στο σημείο M, που είναι το ζητούμενο με συντεταγμένες $M(-3, \frac{5}{2})$.

9. **Γραφική παράσταση** μιας συνάρτησης (όπου το μέγεθος y εκφράζεται ως συνάρτηση ενός άλλου μεγέθους x) ονομάζεται το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που έχουν συντεταγμένες τα ζεύγη τιμών (x, y)

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης δίνει «ενορατική εικόνα» της σχέσης που συνδέει τις μεταβλητές y και x .

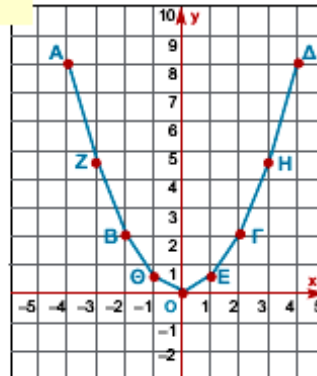
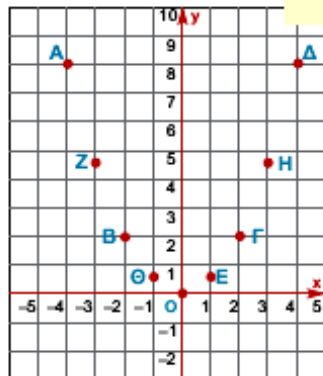
Πως σχηματίζουμε μία γραφική παράσταση.

- Φτιάχνουμε πίνακα τιμών με βάση τον τύπο της συνάρτησης.
- Παριστάνουμε τα ζεύγη τιμών (x, y) σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, ενώνοντας τα αντίστοιχα σημεία.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8

Τα σημεία τώρα είναι περισσότερα και η τεθλασμένη γραμμή που σχηματίζεται μοιάζει με καμπύλη.

συνάρτηση $y = \frac{1}{2} x^2$



Εφαρμογή – Βασική άσκηση

Δίνονται τα σημεία $A(2, 3)$ και $B(10, 9)$. Να υπολογίσετε την απόστασή τους AB .

Σχηματίζουμε σε σύστημα τα σημεία $A(2, 3)$ και $B(10, 9)$ και μετά το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ όπως στο σχήμα δίπλα.

Το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $(10, 3)$, οπότε $A\Gamma = 10 - 2 = 8$ και $B\Gamma = 9 - 3 = 6$.

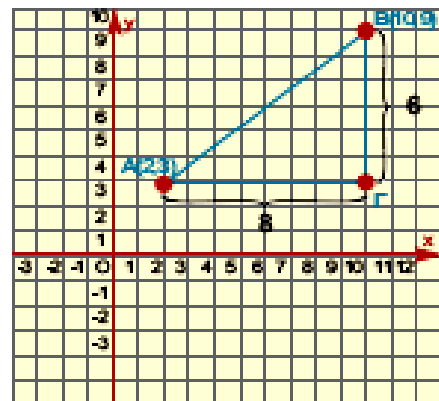
Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε ότι:

$$AB^2 = A\Gamma^2 + B\Gamma^2 = 8^2 + 6^2$$

$$AB^2 = 64 + 36 \text{ ή}$$

$$AB^2 = 100 \text{ ή}$$

$$AB = 10$$



Γενικότερα απόστασή δύο σημείων A και B υπολογίζεται από τον τύπο:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Ανάλογα ποσά

Δύο ποσά λέγονται **ανάλογα** όταν, πολλαπλασιάζοντας τις τιμές του ενός ποσού με έναν οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό, πολλαπλασιάζονται και οι τιμές του άλλου με τον **ίδιο αριθμό**.

Παράδειγμα:

- Το εμβαδόν ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου με βάση 5 και ύψος 7 υπολογίζεται από τον τύπο $E_1 = \text{βάση} \cdot \text{ύψος} = 5 \cdot 7 = 35$.
- Αν η βάση του διπλασιαστεί του και γίνει 10, τότε θα γίνει διπλό και το εμβαδόν του, δηλαδή $E_2 = 10 \cdot 7 = 70$.
- Όμοια, αν τριπλασιαστεί, τετραπλασιαστεί κ.λ.π. η βάση του, θα τριπλασιαστεί, τετραπλασιαστεί και το εμβαδόν του αντίστοιχα.

Άρα τα ποσά **βάση** και **εμβαδόν** του παραλληλογράμμου είναι **ανάλογα** (προϋπόθεση να παραμένει σταθερό το ύψος).

Παρατήρηση.

- Δύο ποσά x και $y = 2 \cdot x$ είναι **ανάλογα**, τότε ο **λόγος** των αντίστοιχων τιμών τους παραμένει **σταθερός**, δηλαδή για κάθε ζεύγος τιμών x και y , ισχύει $\frac{x}{y} = 2$.
- Γενικότερα στη θέση του 2 μπορώ να βάλω a , όπου a σταθερός πραγματικός μη μηδενικός αριθμός.

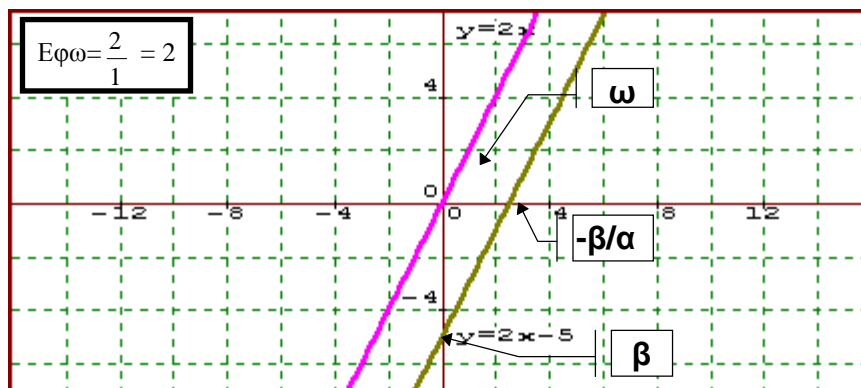
Η συνάρτηση $y = ax$

- 1) Η γραφική παράσταση της $y = a \cdot x$ είναι μία **ευθεία γραμμή** που περνά από την **αρχή των αξόνων** $O(0,0)$
- 2) Για να χαραχθεί χρειαζόμαστε ένα ακόμη σημείο εκτός του $O(0,0)$ (δύο σημεία ορίζουν μία ευθεία π.χ. το σημείο $A(1, a)$ για $x = 1$).
- 3) Η ευθεία σχηματίζει με τον ημιάξονα Ox μία γωνία ω της οποίας η εφαπτόμενη ονομάζεται υπολογίζεται $\epsilon\omega = a$.
- 4) Ο αριθμός a καλείται **κλίση ή συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας**, αφού δηλώνει τη διεύθυνση που έχει η ευθεία.
- 5) Στη συνέχεια, τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = a \cdot x$ θα τη λέμε ευθεία και τη συμβολίζουμε, **$\epsilon: y = a \cdot x$** .

Παράδειγμα: $\epsilon_1: y = 2x, x \in \mathbb{R}$ (ο x είναι πραγματικός), δηλαδή πεδίο ορισμού το σύνολο \mathbb{R}

Πίνακας τιμών

x	0	1	Περνά από τα σημεία: O(0,0) την αρχή των αξόνων A(1,2) που βρίσκω για ένα τυχαίο $x=1$
y	0	2	



Παρατηρήσεις

- Για $a = 1$, η ευθεία $y = 1 \cdot x = x$ ονομάζεται διχοτόμος της $1^{ης} - 3^{ης}$ γωνίας,
- Για $a = -1$ η ευθεία $y = -x$ ονομάζεται διχοτόμος $2^{ης} - 4^{ης}$ γωνίας ή τεταρτημόριου.

Η συνάρτηση $y = ax + \beta$, $\beta \neq 0$

Η γραφική παράσταση της $y = ax + \beta$ είναι μία ευθεία γραμμή, **παράλληλη** της $y = ax$, που **δεν περνά** από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$

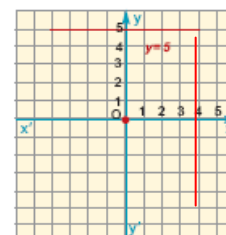
1) Για να χαραχθεί χρειαζόμαστε δύο σημεία. Προτιμώ τα δύο τα σημεία που τέμνει τους άξονες και τα βρίσκω:

- Για $x=0$, έχω $y = \beta$, το σημείο τομής με τον άξονα $y'y$ $A(0,\beta)$
- Για $y=0$, έχω $x = -\frac{\beta}{\alpha}$, το σημείο τομής με τον άξονα $x'x$ $B(-\frac{\beta}{\alpha},0)$

2) Η ευθεία σχηματίζει με τον ημιάξονα Ox' μία γωνία ω της οποίας η εφαπτόμενη ονομάζεται κλίση της ευθείας και παρατηρώ ότι, η $y=ax+\beta$ είναι παράλληλη της $y=ax$, καθώς και κάθε άλλης με συντελεστή διεύθυνσης τον ίδιο αριθμό a .

Παράδειγμα: $f(x)=2 \cdot x - 5$, $x \in \mathbb{R}$ ή με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} . Τη σχηματίζω από τα σημεία $A(0, -5)$ και $B(5/2, 0)$. Είναι παράλληλη της $y = 2x$, της $y=2x+5$, της $y = 2x + 1$, και κάθε ευθείας με μορφή $y=2x+c$, όπου $c \in \mathbb{R}$ και κλίση $a = 2$.

- Η ευθεία $y = c$ είναι κάθετη στον $y'y$ στο σημείο c π.χ. $y = 5$
- Η ευθεία $x = c$ είναι κάθετη στον $x'x$ στο σημείο c π.χ. $x = 4$



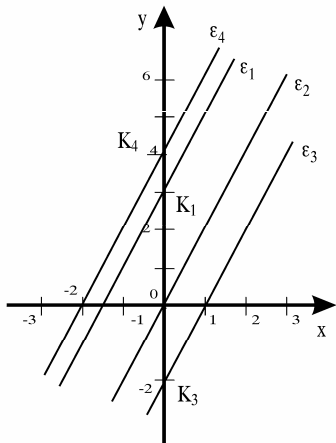
Εφαρμογή:

1. Ποια από όλες τις παρακάτω ευθείες έχει τύπο $y = 2 \cdot x$ και γιατί;

.....

2. Γενικά:

- Δύο ευθείες με τύπους $y = a_1x$ και $y = a_2x + \beta$ είναι παράλληλες τότε $a_1 = a_2$ και αντίστροφα. γιατί;
- Οι ευθείες $y = ax + \beta$ και $y = ax + \gamma$ με a, β, γ πραγματικούς είναι παράλληλες και γιατί;
- Ποιες από αυτές είναι παράλληλη στην $y = ax$
- Οι ευθείες $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ και ϵ_4 που είναι αντίστοιχα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το \mathbb{R}



$$\left. \begin{aligned} y &= 2x + 3 \\ y &= 2x \\ y &= 2x - 2 \\ y &= 2x + 4 \end{aligned} \right\}$$

Τα σημεία τομής των ευθειών με τον άξονα yy' είναι αντίστοιχα τα $K_1(0, 3)$, $O(0, 0)$, $K_3(0, -2)$ και $K_4(0, 4)$.

Γίνεται φανερό:

- πως μηδενίζοντας το x στον τύπο της γραμμικής συναρτήσεως, βρίσκουμε πού τέμνει η ευθεία τον άξονα

yy' (κατακόρυφο).

- Έτσι για να σχεδιάσουμε την ευθεία $y = ax + \beta$ όταν έχουμε τη γραφική παράσταση της $y = ax$ αρκεί να βρούμε πάνω στον άξονα yy' το σημείο με τεταγμένη β και απ' αυτό να φέρουμε παράλληλη προς την $y = ax$.

Μία άλλη μορφή της $y = a \cdot x + \beta$ είναι $a \cdot x + \beta \cdot y = \gamma$

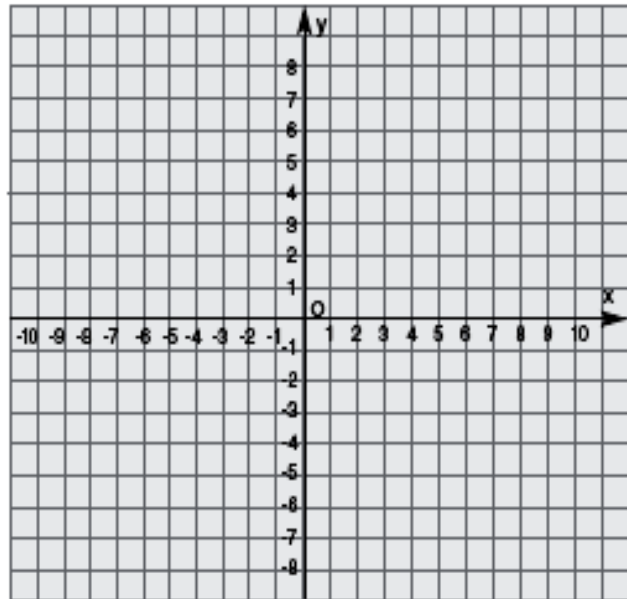
- Η εξίσωση $12x + 3y = 15$ γράφεται $3y = -12x + 15$ ή $y = -4x + 5$ και είναι η ευθεία με κλίση $a = -4$.
- Η εξίσωση $0x + 3y = 15$ ή $y = 5$ και είναι ευθεία παράλληλη στον $x'x$. Ενώ η ευθεία $y = 0$ είναι ο άξονας $x'x$.
- Η εξίσωση $12x + 0y = 15$ ή $12x = 15$ ή $x = 15/12$ είναι ευθεία παράλληλη στον $y'y$. Ενώ ευθεία $x = 0$ είναι ο άξονας $y'y$.

Σημεία τομής της ευθείας $a \cdot x + \beta \cdot y = \gamma$ με τους άξονες (πρέπει $a \neq 0$ και $\beta \neq 0$)

- Για $x = 0$ βρίσκω $y = \gamma/\beta$, το σημείο τομής με τον άξονα $y'y$ $A(0, \gamma/\beta)$
- Για $y = 0$, βρίσκω $x = \gamma/a$, το σημείο τομής με τον άξονα $x'x$ $B(\gamma/a, 0)$.

Φύλλο εργασίας

1. Στο διπλανό σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:
 $y = 2x$, $y = 2x + 1$, $y = 2x + 3$,
 $y = 2x - 3$ και $y = 2x - 5$.



2. Τι κοινό χαρακτηριστικό έχουν και οι πέντε αυτές ευθείες;

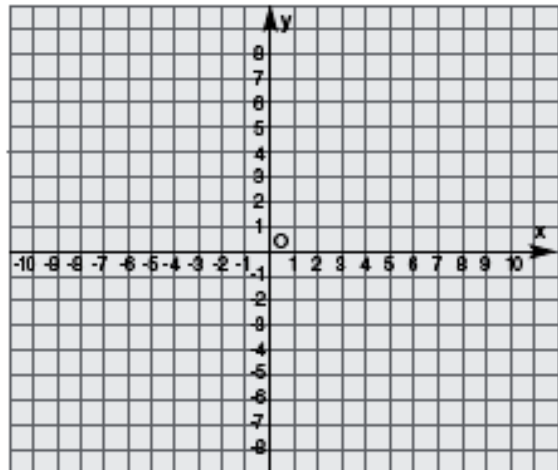
.....

Συμπέρασμα:

Όλες οι ευθείες με εξίσωση της μορφής $y = 2x + \beta$, όπου το β μεταβάλλεται, είναι

3. Γενικά, όλες οι ευθείες με εξισώσεις $y = ax + \beta$, όπου το a είναι σταθερός αριθμός και το β μεταβάλλεται είναι

4. Στο διπλανό σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:
 $y = 2x + 3$, $y = 3x + 3$, $y = -2x + 3$,
 $y = -x + 3$ και $y = x + 3$.



5. Τι κοινό χαρακτηριστικό έχουν και οι πέντε αυτές ευθείες;

.....

Συμπέρασμα: Όλες οι ευθείες με εξίσωση της μορφής $y = ax + 3$, όπου το a μεταβάλλεται,

6. Γενικά, όλες οι ευθείες με εξισώσεις $y = ax + \beta$, όπου το β είναι σταθερός αριθμός και το a μεταβάλλεται,

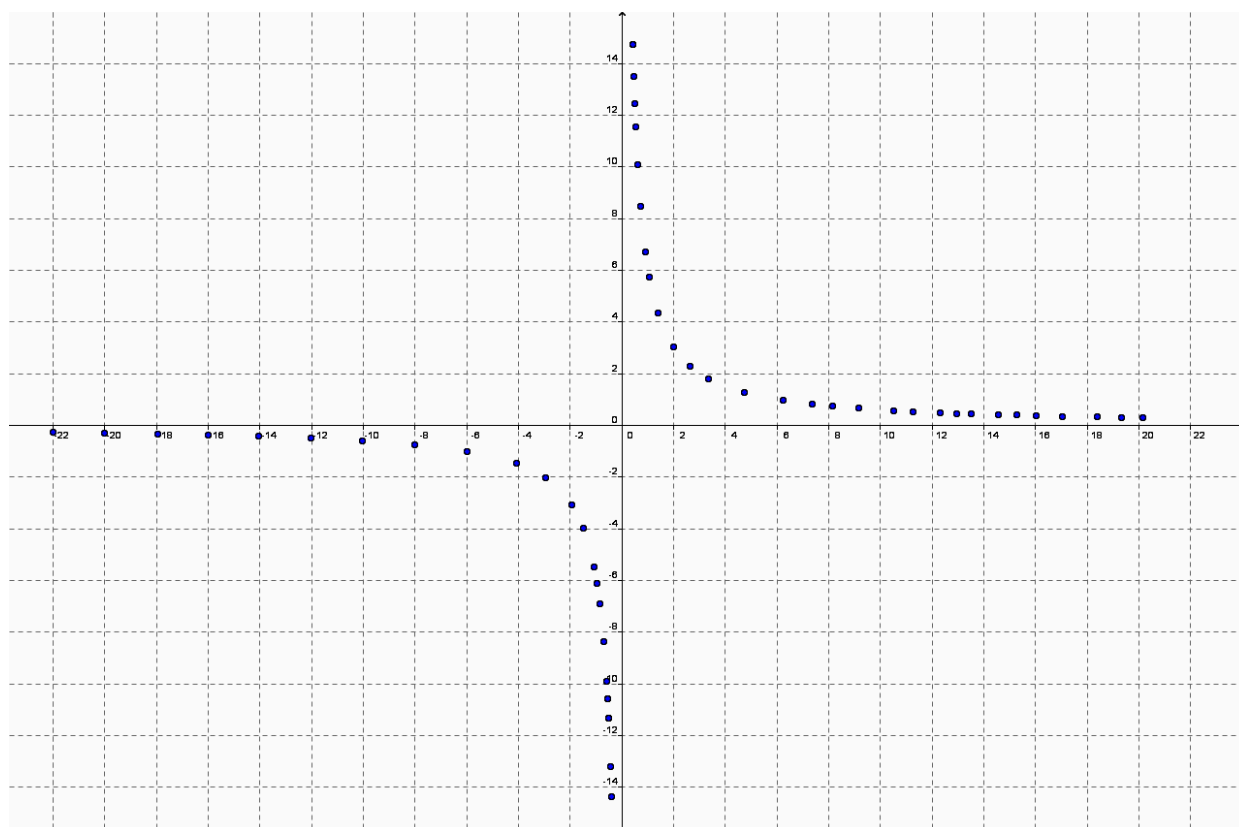
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $y = \frac{6}{x}$,

$x \neq 0$.

Πίνακας τιμών με 5 θετικά και 5 αρνητικά ορίσματα και να υπολογιστούν οι αντίστοιχες τιμές:

x											
y											



Τα σημεία σχηματίζουν καμπύλη με δύο κλάδους που ονομάζουμε **υπερβολή**.