Θεωρία για τα μονώνυμα-πολυώνυμα

1. Εκφράσεις στις οποίες συνδυάζονται πράξεις μεταξύ αριθμών και μεταβλητών (γραμμάτων) τις ονομάζουμε **αλγεβρικές παραστάσεις**. Πχ. $-3x+4\psi^2$, $\frac{2}{3}x^4\alpha^3$, $\frac{x+y}{3z\sqrt{\alpha}}$

2. Αν σε μία αλγεβρική παράσταση αντικαταστήσω τις μεταβλητές με αντίστοιχες τιμές (αριθμούς) και εκτελέσω τις πράξεις ο αριθμός που θα βρω (αποτέλεσμα) λέγεται **αριθμητική τιμή τις αλγεβρικής παράστασης**.
Π.χ. $A = 3x+2\psi^2$ για $x=-2$ και $\psi=-1$ έχω $A = 3(-2)+2(-1)^2= -6+2= -4$

3. Μία αλγεβρική παράσταση **λέγεται κλασματική** αν σε αυτή υπάρχει τουλάχιστον ένα κλάσμα στον παρανομαστή του οποίου υπάρχει μεταβλητή, π.χ. $\frac{-5x}{2ay}$. Για να έχει έννοια το κλάσμα πρέπει πάντα ο παρανομαστής να είναι διάφορος το μηδενός δηλαδή στο παράδειγμα πρέπει $2ay \neq 0$.

4. Μία αλγεβρική παράσταση **λέγεται άρρητη** αν σε αυτή υπάρχει μία τουλάχιστον τετραγωνική ρίζα στο υπόρριζο της οποίας υπάρχει μία τουλάχιστον μεταβλητή με εκθέτη μονό ακέραιο, π.χ. $3\sqrt{\chi^3}$ ή $2\sqrt{\chi}$, ($2\sqrt{3}\,\chi$ δεν είναι άρρητη). Για να έχει έννοια η παράσταση το υπόριζο πρέπει να είναι θετικό ή μηδέν δηλαδή στα παραδείγματα $\chi \geq 0$.

5. Μια αλγεβρική παράσταση λέγεται **ακέραια** όταν δεν είναι κλασματική αλλά ούτε και άρρητη.

6. **Μονώνυμο** ονομάζεται η αλγεβρική παράσταση που έχει μοναδική πράξη μεταξύ αριθμού και μιας ή περισσότερων μεταβλητών τον πολλαπλασιασμό, π.χ. $2\alpha\beta^2$, $\frac{2}{3}x^4\alpha^3$, $2\sqrt{3}x^2y^3$

7. Το μονώνυμο αποτελείται από τον **συντελεστή** που είναι μοναδικός αριθμητικός παράγοντας (συνήθως γράφεται και πρώτος) και το **κύριο μέρος** που είναι γινόμενο από μεταβλητές .

Μονώνυμα	Συντελεστής	Κύριο μέρος
$2\alpha\beta^2$	**2**	$\boldsymbol{\alpha\beta^2}$
$\frac{2}{3}x^4\alpha^3$	$\frac{2}{3}$	$\boldsymbol{x^4\alpha^3}$
$2\sqrt{3}x^2y^3$	$\boldsymbol{2\sqrt{3}}$	$\boldsymbol{x^2y^3}$

8. Δύο ή και περισσότερα μονώνυμα με ίδιο το κύριο μέρος λέγονται **όμοια,** π.χ. $\frac{2}{3}x^4\alpha^3$, $5\chi^4\alpha^3$. Δύο ή και περισσότερα όμοια μονώνυμα λέγονται **ίσα** όταν έχουν ίσους (ή ισοδύναμους) αριθμούς για συντελεστή, π.χ. $5x^4\alpha^3 = \frac{10}{2}x^4\alpha^3$.

Παρατήρηση.
Ο αριθμός **0** (μηδέν) μπορεί να θεωρηθεί μονώνυμο με οποιοδήποτε κύριο μέρος

π.χ. $0\cdot x^2 = 0\cdot x^4\alpha^2\beta^5 = \ldots$, ενώ ο συντελεστής **1** παραλείπεται και γράφουμε μόνο το κύριο μέρος π.χ. $1\cdot x^2\alpha^3 = x^2\alpha^3$

9. Αυτό που μας ενδιαφέρει περισσότερο στα μονώνυμα είναι οι εκθέτες των μεταβλητών. Αν είναι φυσικοί αριθμοί **το μονώνυμο λέγεται ακέραιο,**

π.χ. $\frac{2}{3}\chi^4\alpha^3$,

ενώ αν είναι αρνητικοί το μονώνυμο λέγεται **κλασματικό,**

π.χ. $\frac{2}{3}x^4\alpha^{-3} = \frac{2x^4}{\alpha^3}$ με απαραίτητη προϋπόθεση $\alpha \neq 0$.

10. Βαθμός ενός μονώνυμου είναι ο ακέραιος αριθμός που θα βρω αν προσθέσω όλους τους εκθέτες του κυρίου μέρους.

- Δηλαδή το μονώνυμο $\frac{2}{3}x^4\psi^3$ είναι βαθμού **7ου** από το 4+3=7, ενώ είναι βαθμού **4ου ως προς x** και **3ου ως προς ψ.**

11. Άθροισμα όμοιων μονώνυμων.

- **«Προσθέτω τους συντελεστές και ακολούθως γράφω το ίδιο κύριο μέρος».**
- Γίνεται με βάση την επιμεριστική ιδιότητα, π.χ. $2\alpha\beta^3+5\alpha\beta^3 = (2+5)\alpha\beta^3 = 7\alpha\beta^3$.
- **Η πρόσθεση όμοιων μονώνυμων λέγεται αναγωγή ομοίων όρων.**

12. Πολλαπλασιασμός μονώνυμων.

- Πολ/ζω πρώτα τους συντελεστές, μετά το κύριο μέρος. (Στις ίδιες μεταβλητές με βάση την ιδιότητα των δυνάμεων $\boldsymbol{\alpha^\nu \cdot \alpha^\mu = \alpha^{\nu+\mu}}$).

Π. χ. $\frac{2}{3}\chi^4\alpha^3\cdot 6\chi^2\alpha y = \frac{2}{3}\cdot 6\cdot\chi^4\chi^2\cdot\alpha^3\alpha\cdot y = 4\chi^{4+2}\alpha^{3+1}y = 4\chi^6\alpha^4 y$

13. Διαίρεση μονώνυμων.

- Διαιρώ πρώτα τους συντελεστές και μετά το κύριο μέρος με βάση την ιδιότητα των δυνάμεων $\boldsymbol{\alpha^\nu : \alpha^\mu = \alpha^{\nu-\mu}}$.

Π. χ. $6\chi^4\alpha^3 : (3\chi^2\alpha y) = (6:3)\ (\chi4 : \chi2)\ (\alpha^3 : \alpha)\ (1 : y) = \chi^{4-2}\alpha^{3-1}y^{-1} = 2\chi^2\alpha^2 y^{-1}$

14. Το **άθροισμα ανόμοιων μονώνυμων** είναι μία αλγεβρική παράσταση που λέγεται **πολυώνυμο.**

- Τα μονώνυμα που το αποτελούν λέγονται **όροι**.

15. Δύο πολυώνυμα λέγονται ίσα όταν η διαφορά τους μας δώσει αποτέλεσμα μηδέν.

- Τα μονώνυμα του ενός πρέπει να είναι ίσα (ένα προς ένα) με τα μονώνυμα του άλλου.

16. Τα πολυώνυμα τα ονομάζουμε με ένα γράμμα (συνήθως κεφαλαίο) και εντός παρενθέσεων την μεταβλητή ή τις μεταβλητές

π.χ. $P(x)=x^3+3x^2-5x+7$, $Q(x,y)=-2x^2y^3+xy$

17. Πολυώνυμα με μορφή Π(x)=c, όπου c πραγματικός αριθμός, λέγονται **σταθερά πολυώνυμα**.

- Ειδικά το Π(x)=0 λέγεται **μηδενικό πολυώνυμο**.

18. Αν σε ένα πολυώνυμο υπάρχουν δύο ή περισσότερα όμοια μονώνυμα, τότε τα αντικαθιστούμε με το αλγεβρικό άθροισμά τους.

- Η εργασία αυτή λέγεται **αναγωγή όμοιων όρων**.

π.χ. $\underline{\underline{x^2}}-\underline{5x^3}+\underline{\underline{3x^2}}+\underline{x^3}+\underset{..}{\underline{x}} = -4x^3+4x^2+x$ (αναγωγή όμοιων όρων)

<u>Πράξεις με πολυώνυμα</u>

<u>Πρόσθεση:</u>

A(x)+B(x): τα γράφουμε το ένα δίπλα στο άλλο και κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

Π.χ. $(4x^2+3x+8)+(x^2+4x-2) = \underline{4x^2}+\underline{\underline{3x}}+8+\underline{x^2}+\underline{\underline{4x}}-2 = 5x^2+7x+6$

<u>Αφαίρεση:</u>

A(x) – B(x): προσθέτουμε στον μειωτέο-A(x) τον αντίθετο του αφαιρετέου-B(x)

Π.χ. $(4x^2+3x+2)-(x^2+4x-2) = 4x^2+3x+2-x^2-4x+2 = 3x^2-x+4$ στην ουσία εκτελούμε απαλοιφή παρενθέσεων και γράφουμε τους όρους με σειρά από τη μεγαλύτερη δύναμη προς τη μικρότερη (διάταξη κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x)

<u>Πολλαπλασιασμός:</u>

(α) Μονώνυμου με πολυώνυμο *(Επιμεριστική ιδιότητα),*

πολ/ζουμε το μονώνυμο με κάθε όρο του πολυωνύμου.

Π.χ. $(-2x)\cdot(x^2-2x+1)=-2x^3+4x^2-2x$,

(β) Πολυωνύμου με πολυώνυμο *(Πολ/ζω κάθε μονώνυμο του πρώτου με όλα τα μονώνυμα του δεύτερου)*

Π.χ. $(x^2-1)\cdot(2x^2-x+1) = \underbrace{\boxed{[\, x^2\cdot(2x^2-x+1) +(-1)\cdot(2x^2-x+1)]}}_{\text{περιττή εργασία}} =$
$2x^4-x^3+x^2-2x^2+x-1$

Προσοχή! *Κατά την απαλοιφή παρενθέσεων ισχύει ο γνωστός τρόπος που χρησιμοποιούμε και σους αριθμούς*

Ασκήσεις στα μονώνυμα

1. Στον παρακάτω πίνακα να συμπληρωθεί η στήλη με το βαθμό του μονώνυμου:

$3x^3$	
$4x^3\psi^4$	
$3x^2x^{-3}\psi$	
$3x\psi z \cdot {}^1/_3 x^{-1}\psi^{-1}z^{-1}$	
$4x \cdot \sqrt{x^3}$	
73	

2. Να γίνει αντιστοίχηση μεταξύ ομοίων μονώνυμων:

$2\alpha^4\beta$	$\sqrt{\frac{7}{3}}\alpha\beta$
$-\frac{3}{5}\alpha^3\beta$	$2\sqrt{9}\beta^3\alpha$
$\frac{1}{3}\beta^4\alpha$	$2\beta^{-1}\alpha^3\beta^2$, $\alpha\neq 0$
$\frac{4}{7}\alpha\beta$	$3\alpha^{-5}\beta^4\alpha^6$
$\sqrt{7}\alpha\beta^3$	$-4\beta\alpha^4$

3. Γι ποιες τιμές της μεταβλητής χ έχει έννοια (ορίζεται) στο R η καθεμία από τις αλγεβρικές παραστάσεις:

Αλγεβρική παράσταση	**Τιμές ή διάστημα του R**
$\frac{2}{\chi-5}$	
$\frac{2+\chi}{\sqrt{\chi-3}}$	
$2\chi\sqrt{\chi-7}$	
$(\chi^2+1)(\sqrt{\chi^2+1}$	
$5\chi^{-1}\sqrt{\chi+5}+1$	
$\frac{7\chi+1}{\chi^2+1}$	

4. Να γίνει αντιστοίχιση μεταξύ αλγεβρικής παράστασης και τύπου αυτής.

$\frac{2(x^2+y^2)}{7x}$	Κλασματική
$\sqrt{3}x^2+x+1$	Ακέραια
$\frac{\sqrt{5}x^2+1}{\sqrt{5}x}$	Άρρητη
$\sqrt{\frac{x-5}{7}}$	Κλασματική
$x^2+\frac{1}{2}x$	Ακέραια

5. Να γίνουν οι παρακάτω προσθέσεις μονώνυμων:

$-3x^5+2x^5-6x^5$ $\quad$ $0.5x^2+4.25x^2+33x^2$ $\quad$ $7x^3+\sqrt{5}x^3+6.2x^3$

$15x+\sqrt{15}x$ $\quad$ $22x\psi^2+11.5\psi^2x$ $\quad$ $2x^2\psi+6x\psi^2$

$3\alpha^2+\frac{4}{5}\alpha^2-2\alpha^2$ $\quad$ $-2\alpha\beta+\alpha\beta\frac{1}{3}4\alpha\beta$

$5\alpha\beta+4\alpha+3\beta\alpha+5\alpha$

6. Να γίνουν τα παρακάτω γινόμενα μονώνυμων:

$3\alpha \cdot 4\alpha$ $\quad$ $3\alpha\beta^2 \cdot 7\beta\alpha^2$ $\quad$ $0{\cdot}5x^2 \cdot 5x^3 \cdot x^{-2} \cdot 6x^{-1}$

$2\beta \cdot (-\beta) \cdot 0{\cdot}75\beta^3$ $\quad$ $\frac{2}{5}x^3 \cdot 10x^{-1} \cdot x^2$ $\quad$ $\sqrt{7}x^5 \cdot 23x^{-7} \cdot x^2 \cdot 5x^{-1}$

$-3x^2\psi \cdot (-{}^1/_3\, x^3\psi^4)$ $\quad$ $-2x\psi^2z \cdot (-3x^2\psi) \cdot (-x\psi z^3)$ $\quad$ $-2x^2\,(-3x^3) \cdot (-x) \cdot (-2x^5)$

$-3x^2\psi \cdot (-2\psi x^3) \cdot (-{}^1/_6 x\psi^2) \cdot (-2x^5)$ $\quad$ $(-{}^2/_3 x^4\psi\omega) \cdot (-0{\cdot}5\omega^2x\psi)$

7. Να γίνουν οι παρακάτω διαιρέσεις μονώνυμων:

$6x^3\psi^2\omega : (-2x^2\psi)$ $\quad$ $(-8x^2\psi^3\omega)^2 : (-32x^4\psi^3\omega^2)$

$(-\frac{1}{2}x^4\psi^3) : (\frac{2}{3}\psi^3x^2\omega^2)$ $\quad$ $(-3\alpha^2\beta\gamma^3)^3 : (3\gamma^2\alpha^2\beta)$

$(6x^{\nu+1}) . (-4x^{\nu-1}\psi^2) : (-8x^{\nu}\psi)$ $\quad$ $(\alpha^{\nu+2}\,\beta^{\mu-1}) : (\beta^{-2}\alpha^3)$

Ασκήσεις - Πολυώνυμα

1. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις

i. $\alpha^2-\alpha\beta-\beta^2+2\alpha^2+\alpha\beta-\beta^2+\alpha^2-\alpha\beta+2\beta^2 =$

ii. $x^3-2x^2-2x-7+3x^2+5x+2+x^3+5x^2-6x =$

iii. $x^4-2x^2\psi^2-\psi^4-3x^2\psi+2x^2\psi^2+6x^3\psi-\psi^4+x\psi^3-x^4 =$

2. Δίνονται τα πολυώνυμα:

$A = 6x^4+5x^3-2x+7$, $B = 5x^3-2x^2-9x+4$

$\Gamma = -x^4-3x^2+11$, $\Delta = -7x^3+8x^2-x+6$

Να υπολογίσετε τα Α-Β, (Α+Β)-(Γ+Δ), Α-(Β-Γ)-Δ, Α+Β+Γ+Δ

3. Δίνονται τα πολυώνυμα:

$P(x) = 7x^2-6x+2$, $Q(x) = -4x^2+7x-8$

Να υπολογίσετε τα Α(-1), Β(3) όπου $A(x) = P(x) + Q(x)$

και $B(x) = P(x) - 3Q(x)$.

4. Στις παραστάσεις

$A = 3x^3\psi-4x^5\psi^2+7x^4\psi^3+\psi^6-9$

$B = x^2+x^4-x + x^3+6$

$\Gamma= \frac{1}{3}x^4+x^5+\sqrt{\frac{4}{8}}\,x^3+5x+7x^2-\frac{6}{15}$

α] Να γίνει διάταξη κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του χ

β] Να βρεθούν τα: $\frac{3}{4}A$, 5Β, Β+2Γ

Πολλαπλασιασμός Πολυωνύμων

1. Να κάνετε τις πράξεις:

α] $(2x^2-3x-6)(x^2-x+2)$

β] $(\alpha-2\beta-3\gamma)(\alpha-2\beta+3\gamma)$

γ] $(x^2-2x+5)(x^2+2x+5)$

δ] $(-x^2-\psi^2-3\alpha^2)(x^2-\psi^2-3\alpha^2)$

ε] $(x^2+\psi^2)(x-\psi)(x^2+x\psi+\psi^2)$

2. Να κάνετε τις πράξεις:

α] $(2α +3)(4α^2 - α-2)$ β] $-(β^2-1)(α^2β + αβ^2-α)$

γ] $-2(5x^2-4x +3)(2x -1)$ δ] $(x-1)(x^2+ xψ +ψ^2)$

ε] $(x +1)(x^2- xψ + ψ^2)$ στ)$(α^2 - 4)(3α + 2)$

3. Αν $f(x) = 2x+1$ και $g(x)= -3x+1$να βρείτε την παράσταση

$$[f(x+1) - g(x)] . [f(1-x) - g(x)]$$

4. Αν $f(x)= x^2 –3|x| +1$ $g(x)= |x| -1$ να βρείτε το $f(x) . g(x)$

5. Για ποιες τιμές των α και β τα πολυώνυμα είναι ίσα;

$$(2α-1)x^2-2βxψ+ψ^2 \quad \& \quad 5x^2+6xψ+ψ^2$$

6. Αν $f(χ) = x(x^2-2) - (x+2)[x^2-(1-x)]$, να εκτελέσετε τις πράξει και μετά να υπολογίσετε την τιμή $f(-3)$

7. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=(x+7)(x-2)$ και $Q(x) =(x+3)(x+4)$. Να λυθεί η εξίσωση $P(x)-Q(x) = 0$

8. Να αποδείξετε ότι το $A(x) = (5-x)(5+x) \le 25$ για κάθε πραγματική τιμή του χ.

9. Αν τα πολυώνυμα $A(x)=x^3+2x^2+x+1$ και $B(x)=x-x^2-1$ να υπολογίσετε:

A] A(2) & B(2) B] A(2).B(2) Γ] Γ(x)=A(x).B(x) Δ] Γ(2)

10. Να γίνουν οι πράξεις:

$$2x(x^2 - 1) – x^2(1+3x) – x + 5(1 - x^2)$$

$$(α^2β+αβ^2 - α)(1 - β^2)$$

$$(6x^ν+1)(2x^ν - 3) \quad αν\ ν\ge1$$

$$(9x^{ν+1} –2)(x^ν+2) \quad αν\ ν\ge1$$

$$3x(x^2 –1) – 4x^2(x+2) – 3x + 4(x^2 – 1)$$

$$\left(\frac{x^3}{4}-\frac{x^2}{2}-5x-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{6x^2}{5}$$

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Ορισμός: Ταυτότητα είναι μία **ισότητα** με μία ή περισσότερες μεταβλητές που αληθεύει **για κάθε τιμή** των μεταβλητών.

1. $\mathbf{(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}$ «Τετράγωνο αθροίσματος ή τέλειο τετράγωνο»

Απόδειξη

$(\alpha+\beta)^2 =$	μετασχηματίζω την δύναμη σε γινόμενο
$(\alpha+\beta)(\alpha+\beta) =$	πολλαπλασιάζω πολυώνυμα
$\alpha^2+\alpha\beta+\beta\alpha+\beta^2 =$	κάνω αναγωγή ομοίων όρων
$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$	

2. $\mathbf{(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 -2\alpha\beta+\beta^2}$ «Ανεξάρτητη απόδειξη από την 1.»

Απόδειξη

$(\alpha -\beta)^2 =$	μετασχηματίζω την δύναμη σε γινόμενο
$(\alpha -\beta)(\alpha -\beta) =$	πολλαπλασιάζω πολυώνυμα
$\alpha^2 -\alpha\beta -\beta\alpha+\beta^2 =$	κάνω αναγωγή ομοίων όρων
$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$	

Παρατηρήσεις:

- Τα α, β μπορεί να είναι οποιοδήποτε πραγματικός αριθμός, μπορεί να είναι μονώνυμα, ακόμη και πολυώνυμα. Θα ονομάζουμε **το α πρώτο** από τους δύο προσθετέους και **το β δεύτερο.**
- Το 2^{ο} μέλος των παραπάνω ταυτοτήτων ονομάζεται ανάπτυγμα.
- Στο ανάπτυγμα τα πρόσημα είναι **συν (+) στα τετράγωνα,** στο διπλάσιο γινόμενο εξαρτάται από τα πρόσημα των α, β. Δηλαδή σε **ομόσημα α, β είναι (+)** και σε **ετερόσημα (-)**
- $\mathbf{(\alpha-\beta)^2 = (\beta-\alpha)^2}$ γιατί και τα δύο μας κάνουν $\alpha^2 -2\alpha\beta+\beta^2$
- $\mathbf{(\alpha+\beta)^2 = (-\alpha -\beta)^2}$ γιατί και τα δύο μας κάνουν $\alpha^2 +2\alpha\beta+\beta^2$
- <u>Προσοχή</u>! Δεν ισχύει $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+\beta^2$ γιατί $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta$

3. $\mathbf{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2}$ «γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά »

<u>Απόδειξη</u>

$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) =$	πολλαπλασιάζω πολυώνυμα
$\alpha^2 -\alpha\beta +\beta\alpha -\beta^2 =$	κάνω αναγωγή ομοίων όρων
$\alpha^2 -\beta^2$	

Παρατηρήσεις:

- Ονομάζεται διαφορά τετραγώνων από το δεύτερο μέλος, δηλαδή το $\alpha^2-\beta^2$
- Μειωτέος και στα δύο μέλη πρέπει να είναι το ίδιο γράμμα, εδώ είναι το β.

Εφαρμογές:

1. $(2x^2+3)^2 =$

   $(2x^2)^2+2\cdot 2x^2\cdot 3+3^2=$

   $4x^4+12x^2+9$

Σκέπτομαι:
α] το πρώτο στο τετράγωνο
β] + το διπλό γινόμενο πρώτου με δεύτερο
γ] το δεύτερο στο τετράγωνο
το α είναι το $2x^2$ και το β είναι το 3

2. $(2x-3y)^2 =$

   $(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 3y+(3y)^2=$

   $4x^2-12xy+9y^2$

Σκέπτομαι:
α] το πρώτο στο τετράγωνο
β] - το διπλό γινόμενο πρώτου με δεύτερο
γ] το δεύτερο στο τετράγωνο

3. $(-2x+5x^2)^2 =$

   $(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 5x^2+(5x^2)^2=$

   $4x^2-20x^3+25x^4$

Το α=-2x, το $\beta=5x^2$ εφαρμόζω την ταυτότητα $(\alpha+\beta)^2$ τα τετράγωνα έχουν πρόσημο πάντα + το διπλό γινόμενο έχει πρόσημο - γιατί τα α, β ετερόσημα

4. $(-2x-3y)^2 =$

   $(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 3y+(3y)^2=$

   $4x^2+12xy+9y^2$

Το α=-2x, το β=-3x εφαρμόζω την ταυτότητα $(\alpha+\beta)^2$ τα τετράγωνα έχουν πρόσημο πάντα + το διπλό γινόμενο έχει πρόσημο + γιατί τα α, β ομόσημα

5. $(2x-3)(2x+3)=(2x)^2-3^2=$

   $4x^2-9$

Σκέπτομαι με βάση τον παράγοντα διαφορά:
Ο μειωτέος στο τετράγωνο μείον (-) τον αφαιρετέο στο τετράγωνο ή πρακτικότερα το τετράγωνο του 1ου μείον το τετράγωνο του 2ου .

6. $(-2x-3y)(2x-3y)=-(2x+3y)(2x-3y)=$

   $-[(2x)^2-(3y)^2]=-[4x^2-9y^2]=-4x^2+9y^2$

Δεν θυμίζει γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά, αλλά το μορφοποιώ ώστε να δίνει ανάπτυγμα διαφοράς τετραγώνων

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθούν τα αναπτύγματα:

$(\chi-3)^2$ $(2x+y)^2$ $(-x-y)^2$ $(xy+2x)^2$ $(2x-xy)^2$

$(10x^2 - 3)^2$ $(5x^2+2x)^2$ $(2\alpha^3 - 3\beta^2)^2$ $(\alpha^2\beta + \beta^2\alpha)^2$ $(-\alpha^3-\alpha^2)^2$

$(\frac{1}{2}y+2x)^2$ $(2xy - \frac{1}{2}x^2)^2$ $(\frac{1}{3}x^3 -3x)^2$

2. Να βρεθούν τα γινόμενα:

$(x -1)(x+1)$ $(3x -2)(3x+2)$ $(2x+\frac{1}{2})(2x -\frac{1}{2})$

$(x+3x)(x -3x)$ $(2x+y)(y -2x)$ $(\frac{2}{3}x - \frac{1}{5}y)(\frac{2}{3}x + \frac{1}{5}y)$

$(\alpha x^3+2xy)(2xy - \alpha x^3)$ $(2x+y)(2x - y)(4x^2+y^2)$ $(2x+3y)(2x -3y)(4x^2+9y^2)$

$(x+2y - 3z)(x+2y + 3z)$ $(x + 2y-z)(x - 2y-z)$ $(x+y - z+\omega)(x+y + z-\omega)$

3. Δίνονται τα πολυώνυμα $F(x)=(2x+1)^2 - (2x+1)(2x-1)$ @ $Q(x)=(3x-1)(x-2) - (3x-1)^2$ να απλοποιηθούν να βρεθεί η διαφορά $P(x)= F(x) -Q(x)$,να βρεθεί η τιμή $P(-1)$.

4. Δίνονται τα πολυώνυμα: $P(x)=(2x+3)^2 - 4x^2$, $Q(x)=(x+2)(x+3) - 2x^2 -6$

ι] Να γίνουν όλες οι δυνατές πράξεις

ιι] Να βρεθεί το γινόμενο $P(x)Q(x)$

5. Να γίνουν οι πράξεις:

$(2x-y)^2 - (x+2y)^2 -(x+3y)(x-3y)$

$(3x+y)^2 - (x+4y)^2 -(5y+2x)(2x-5y)$

$(x^3+2y^2)^2 - (y^2+2x^3)^2 + (x^3-2y^2)(x^3+2y^2)$

$(x+3)^2 + (x-3)^2 + (x+2)^2 + (x-2)^2 - (x-5)(x+5)$

6. Να αποδειχθεί ότι οι παραστάσεις είναι ανεξάρτητες από την μεταβλητή χ:

$(x+2)^2 + (x+1)^2 - 2(x -1)^2 - 5(2x+1)$

$(x^2 - 2)^2 - 2(x^2+1)^2 - 4(x^2 - 1)^2 + 5x^4$

(Συνέχεια από τη θεωρία)

4. $\mathbf{(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3}$ «Κύβος αθροίσματος»

Α π ό δ ε ι ξ η

$(\alpha+\beta)^3 = (\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta)=$ μετασχηματίζω την 3^{η} δύναμη ($x^3 = x^2 \cdot x^1$)

$(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)(\alpha+\beta)=$ αναπτύσσω την $(\alpha+\beta)^2$ ταυτότητα

$\alpha^3+\alpha^2\beta+2\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\beta^2\alpha+\beta^3=$ Πολλαπλασιάζω πολυώνυμα
$\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ κάνω αναγωγή ομοίων όρων

5. $\mathbf{(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3}$ «Ανεξάρτητη απόδειξη από την 4.»

Α π ό δ ε ι ξ η

$(\alpha-\beta)^3 = (\alpha-\beta)^2(\alpha-\beta)=$ μετασχηματίζω την $3^{η}$ δύναμη ($x^3 = x^2\, x^1$)
$(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)(\alpha-\beta)=$ αναπτύσσω την $(\alpha-\beta)^2$ ταυτότητα
$\alpha^3-\alpha^2\beta-2\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\beta^2\alpha-\beta^3=$ Πολλαπλασιάζω πολυώνυμα
$\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$ κάνω αναγωγή ομοίων όρων

Παρατηρήσεις:

- Τα α, β μπορεί να είναι οποιοδήποτε πραγματικός αριθμός, μπορεί να είναι μονώνυμα, ακόμη και πολυώνυμα.
- Στο ανάπτυγμα του $(\alpha+\beta)^3$ τα πρόσημα είναι όλα **συν (+),** ενώ στο ανάπτυγμα του $(\alpha-\beta)^3$ εναλλάσσονται το συν με τα πλην.
- Πρακτικός τρόπος προσήμων: το **πρώτο δηλαδή το α** δίνει το πρόσημό του στο **πρώτο και τρίτο** όρο του αναπτύγματος ενώ το **δεύτερο β** στον **δεύτερο και τέταρτο** όρο.
- $\mathbf{(\alpha-\beta)^3 \neq (\beta-\alpha)^3}$ γιατί $\mathbf{(\alpha-\beta)^3 = [-(\beta-\alpha)]^3 = -(\beta-\alpha)^3}$
- $\mathbf{(\alpha+\beta)^3 \neq (-\alpha-\beta)^3}$ & $(-1)^3 = -1$
- Προσοχή! Δεν ισχύει $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3+\beta^3$ γιατί $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)$

7. $\mathbf{\alpha^3 +\beta^3 = (\alpha +\beta)(\alpha^2 -\alpha\beta +\beta^2)}$ «άθροισμα κύβων»

8. $\mathbf{\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha -\beta)(\alpha^2 +\alpha\beta +\beta^2)}$ «διαφορά κύβων»

9. $\mathbf{(\chi+\alpha)(\chi+\beta) = \chi^2+(\alpha+\beta)\chi+\alpha\beta}$

Σημείωση: Η απόδειξη των 7, 8, και 9 να λυθεί σαν άσκηση.

Όταν μας ζητάνε να αποδείξουμε μία ταυτότητα Χ = Υ, τότε θα εφαρμόσουμε μία από τις παρακάτω μεθόδους.

1. Αρχίζουμε από το ένα μέλος της ταυτότητας, συνήθως αυτό που έχει τις περισσότερες εκτελέσιμες πράξεις και με κατάλληλους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς (πράξεις) καταλήγουμε στο άλλο μέλος, δηλαδή από το Χ➔Υ ή Υ ➔Χ.
2. Κάνουμε πράξεις στο $1^{ο}$ μέλος της ταυτότητας και καταλήγουμε σε μια περισσότερο απλουστευμένη μορφή του δηλαδή **Χ=Α** . Μετά κάνουμε ομοίως πράξεις και στο $2^{ο}$ μέλος και **καταλήγουμε στην ίδια** απλουστευμένη μορφή **Υ=Α** τότε μεταβατικά διαπιστώνουμε ότι **Χ** = Α = **Υ**
3. Παίρνουμε την διαφορά των δύο μελών και αποδεικνύουμε ότι είναι μηδέν (**Χ-Υ=0**).

Παραδείγματα:

1. $\mathbf{\alpha^3 +\beta^3 = (\alpha +\beta)(\alpha^2 -\alpha\beta +\beta^2)}$
   $2^{ο}$ μέλος: $(\alpha +\beta)(\alpha^2 -\alpha\beta +\beta^2) = \alpha^3 - \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 - \alpha\beta^2 + \beta^3 = \alpha^3 + \beta^3$ $1^{ο}$ μέλος

2. $\mathbf{\alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2) = (\alpha+\beta)^3}$
   $1^{ο}$ μέλος: $\alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2) = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2$ (I)
   $2^{ο}$ μέλος: $(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2$ (II)

παρατηρούμε τα (ι) και (ΙΙ) είναι το ίδιο πολυώνυμο άρα το πρώτο μέλος ισούται με το δεύτερο μέλος.

3. **$(\chi+\alpha)(\chi+\beta) = \chi^2+(\alpha+\beta)\chi+\alpha\beta$**

1^o μέλος: $(\chi+\alpha)(\chi+\beta) = \chi^2+\chi\beta+\alpha\chi+\beta^2$ (I)

2^o μέλος: $\chi^2+(\alpha+\beta)\chi+\alpha\beta = \chi^2+\alpha\chi+\beta\chi+\alpha\beta$ (II)

Και παρατηρώ ότι (I) = (II)

Εφαρμογές:

1. $(2\chi +3)^3 =$
$(2\chi)^3+3 \bullet(2\chi)^2\bullet 3 +3 \bullet 2\chi\bullet 3^2 + 3^3=$
$8\chi^3 +3 \bullet 4\chi^2 \bullet 3 +3 \bullet 2\chi\bullet 9 +27=$
$8\chi^3 + 36\chi^2 + 54\chi + 27$

Σκέπτομαι:
α] το πρώτο στο κύβο
β] + το τριπλό γινόμενο πρώτου στο τετράγωνο με δεύτερο
γ] + το τριπλό γινόμενο πρώτου με δεύτερο στο τετράγωνο

2. $(2\chi - 3)^3 =$
$(2\chi)^3 - 3\cdot (2\chi)^2\cdot 3 +3 \cdot 2\chi\cdot 3^2 - 3^3=$
$8\chi^3 +3 \cdot 4\chi^2 \cdot 3 +3 \cdot 2\chi\cdot 9 +27=$
$8\chi^3 - 36\chi^2 + 54\chi - 27$

Το 1^o και 3^o μονώνυμο παίρνουν πρόσημο από το 2χ **(+)** ενώ το 2^o ,4^o παίρνουν πρόσημο από το -3 δηλαδή **(-)**

3. $(-2\chi - 3y)^3 =$
$-(2x)^3 - 3\cdot(2\chi)^2\cdot 3y - 3\cdot 2\chi\cdot(3y)^2 - (3y)^3=$
$-8x^3 - 3\cdot 4\chi^2\cdot 3y - 3\cdot 2\chi\cdot 9y^2 - 27y^3=$
$-8x^3 - 36\chi^2 y - 54\chi y^2 - 27y^3$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθούν τα αναπτύγματα:

$(\chi-3)^3$	$(2x+y)^3$	$(-x-y)^3$	$(xy+2x)^3$
$(2x-xy)^3$	$(5x^2+2x)^3$	$(10x^2 - 3)^3$	$(\alpha^2\beta + \beta^2\alpha)^3$
$(2\alpha^2 - 3\beta^2)^3$	$(-\alpha - \alpha^2)^3$	$(\frac{1}{2}y+2x)^3$	$(\frac{1}{3}x^2 -3x)^3$

2. Να γίνουν οι πράξεις

- $(3x -y)^3 - (x+2y)^3 -2(x - y)(x^2 + xy +y^2)$
- $(2x^2 - y)^3 - (2x^2 + y)^3 + 2x(x - y^2)(x + y^2)$
- $(x + 2y)^3 + (x - 2y)^3 -(x+y) (x^2 - xy +y^2)$
- $5x(2x + 3)^3 - x(x + 4)^2 + 2x(1 - x)(x + 1)$
- $2x(x - 1)^3 - 2(x^3 - 1)$

Ασκήσεις συμπλήρωσης

1. Για να είναι το $\chi^{\nu}\psi^{\mu}+\psi^{\lambda}\chi^{\kappa}$ μονώνυμο πρέπει $\nu = \ldots..$ και $\mu = \ldots.$
2. Για να είναι το $\chi^{\nu} : \psi^{\mu}$ ακέραιο μονώνυμο πρέπει το $\nu \ldots.. \mu$ ενώ για να είναι κλασματικό πρέπει το $\nu \ldots.. \mu$.
3. Ο βαθμός του μονώνυμου $\alpha\chi^{\nu}\psi^{2}$ είναι …….. όπου το α κάποιος πραγματικός αριθμός. Εξαρτάται από τον αριθμό α;
4. Να συμπληρώσετε με κατάλληλος αριθμούς τις τελείες (……) ώστε η ισότητα να είναι σωστή: $3\chi^2\psi^3 + 5\chi^2\psi^3 - 2\chi^2\psi^3 = \ldots.\chi^2\psi^{\ldots..}$
5. Να συμπληρώσετε τις τελείες (…….) στις παρακάτω ισότητες:

$(\alpha-\beta)(\beta+\alpha) = \ldots\ldots\ldots$	$(\alpha+\ldots..)^2 = \ldots.. +2\alpha\chi+\chi^2$
$(\chi-\psi)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$(-\alpha-\beta)(\beta+\alpha) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$(-\alpha-\beta)^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$(\beta - \alpha)^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$(-\alpha-\chi)(\chi-\alpha)=\ldots\ldots\ldots..$	$(5 - \ldots..)^2 = 25 +9\alpha^2\ldots\ldots\ldots\ldots$
$(9\alpha+\ldots..)^2 = \ldots..+18\alpha\chi^2+\ldots..$	$(0,5+\ldots..)^2 = \ldots.. + \alpha + \ldots\ldots..$
$(2\alpha+\ldots..)^2 = \ldots.. + 4\alpha\beta+\ldots..$	$(\ldots.. + \ldots..)^2 = \ldots\ldots +\alpha\beta+\ldots..$
$(2 - \ldots..)(\ldots.. + \alpha) =\ldots.. - \ldots..$	$\chi^2 - \ldots..= (\ldots..- 1)(\ldots.. + \ldots..)$
$(\ldots.. + 4)(\chi - \ldots..) = \ldots.. - \ldots.$	$\ldots.. - 25 = (\chi^2 - \ldots.)(\ldots.+\ldots.)$

6. Να συμπληρώσετε τον όρο που λείπει ώστε τα πολυώνυμα να είναι τέλεια τετράγωνα:

$4\alpha^2 - 12\alpha \ldots\ldots\ldots$	$25\alpha^2 + 7\alpha \ldots\ldots\ldots$
$\chi^2+10\chi\psi \ldots\ldots\ldots$	$9\chi^2\psi^2 - 12\chi\psi z + \ldots\ldots\ldots$
$4\chi^2 + \ldots\ldots..+ 25\alpha^2\beta^4$	$\chi^2 - \ldots\ldots.. + {}^1/_4\psi^4$
$\beta^4 + \ldots\ldots.. + 36\alpha^2$	$9 - \ldots\ldots.. + 4\alpha^2\chi^4$
$\chi^2 + {}^1/_9 - \ldots\ldots$	$\chi^4 - \ldots\ldots.. + 10$
$\chi^{10} - \ldots\ldots. + 49\psi^4$	$4\chi^2 + 25\psi^2 - \ldots\ldots..$
$\chi^2 + 6\chi\psi + \ldots\ldots..$	$\chi^2 - \chi\psi + \ldots\ldots\ldots$

7. Να συμπληρώσετε τον όρο που λείπει ώστε τα πολυώνυμα να είναι άθροισμα ή διαφορά στον κύβο:

$27\chi^3 + \ldots\ldots. + \ldots\ldots. + 8\psi^3 = (\ldots\ldots. + \ldots\ldots)^3$

$64\chi^3 - \ldots\ldots. + 12\chi + \ldots\ldots. = (\ldots\ldots. + \ldots\ldots)^3$

$\ldots\ldots. - \ldots\ldots. +\ldots\ldots. - 27\psi^3 = (10\chi + \ldots\ldots\ldots)^3$

$27\chi^3 + \ldots\ldots. + \ldots... + \ldots\ldots.. = (\ldots\ldots\ldots. + 1 \;\;)^3$

Παραγοντοποίηση

Ορισμός: Παραγοντοποίηση μιας αλγεβρικής παράστασης (πολυωνύμου) είναι μία διαδικασία για την μετατροπή της σε γινόμενο.

Επιμεριστική ιδιότητα: $\alpha\cdot(\beta + \gamma) = \alpha\cdot\beta + \alpha\cdot\gamma$

Εργάζομαι εφαρμόζοντας την επιμεριστική ιδιότητα:

- από το 1^o μέλος προς το 2^o λέω «κάνω πολ/μό με παρένθεση» π.χ. $5(2\chi+3) = 10\chi+15$
- αν από το 2^o μέλος προς το 1^o λέω «βγάζω κοινό παράγοντα γιατί στο γινόμενο $\alpha\cdot\beta$ και στο $\alpha\cdot\gamma$ ο παράγων α είναι κοινός (ίδιος) π.χ. $3\alpha+3\beta=3(\alpha+\beta)$

Μέθοδοι παραγοντοποίησης

1. Όλοι οι όροι του πολυωνύμου έχουν κοινό παράγοντα. Στην περίπτωση αυτή εφαρμόζω μόνο την επιμεριστική ιδιότητα.

Παραδείγματα:

1) $5\alpha+5\beta = 5(\alpha+\beta)$

2) $5\chi^2+5 = 5(\chi^2+1)$

3) $3\chi^2y+3\chi y^2 = 3\chi y(\chi+y)$

Ο κοινός παράγοντας των μονώνυμων είναι: από τους συντελεστές ο ΜΚΔ των συντελεστών και από το κύριο μέρος το κάθε κοινό γράμμα με μικρότερο εκθέτη.

2. Ομαδοποίηση των παραγόντων του πολυωνύμου που έχουν κοινό παράγοντα.

Παραδείγματα:

1) $x\alpha+x\beta+y\alpha+y\beta = (x\alpha+x\beta)+(y\alpha+y\beta) = x(\alpha+\beta)+y(\alpha+\beta) = (\alpha+\beta)(x+y)$ ή

$= (x\alpha+y\alpha)+(x\beta+y\beta) = (x+y)\alpha+(x+y)\beta = (\chi+y)(\alpha+\beta)$

2) $x^2y-x^2-xy+x+y-1=$	σε ομάδα 1^o-2^o, 3^o-4^o, 5^o-6^o
$(x^2y-x^2)-(xy-x)+(y-1)=$	σε 1^o-2^o κ.π. τοχ^2, σε 3^o-4^o κ.π. το $-\chi$, σε 5^o-6^o κ.π. 1
$x^2(y-1)-x(y-1)+(y-1)=$	το $(y-1)$ κοινός παράγων σε όλα
$(y-1)(x^2-x+1)$	το x^2-x+1 δεν παραγοντοποιείται περισσότερο

3. Το πολυώνυμο να είναι ανάπτυγμα ταυτότητας

α] $\alpha^2\pm2\alpha\beta+\beta^2 = (\alpha\pm\beta)^2$

β] $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$

γ] $\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3 = (\alpha+\beta)^3$ ή $\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3 = (\alpha-\beta)^3$

δ] $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$ ή $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

τα τριώνυμα $(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$ και $(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$ δεν παραγοντοποιούνται περισσότερο!

Παραδείγματα:

α] $\chi^2+10\chi+25 = \chi^2+2\cdot5\cdot\chi+5^2 = (\chi+5)^2$

$4\chi^2-20\chi\psi+25\psi^2 = (2\chi)^2-2\cdot2\chi\cdot5\psi+(5\psi)^2 = (2\chi-5\psi)^2$

β] $25\chi^2 - 16\psi^2 = (5\chi)^2 - (4\psi)^2 = (5\chi-4\psi)(5\chi+4\psi)$

$25\chi^2 - 7 = (5\chi)^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2 = (5\chi-\sqrt{7})\,(5\chi+\sqrt{7})$

γ] $27\chi^3+54\chi^2\psi+36\chi\psi^2+8\psi^3 = (3\chi)^3+3\cdot(3\chi)^2\cdot2\psi+3\cdot3\chi\cdot(2\psi)^2+(2\psi)^3= (3\chi+2\psi)^3$

δ] $27\chi^3+8\omega^3 = (3\chi)^3+(2\omega)^3 = (3\chi + 2\omega)[\,(3\chi)^2 - 3\chi\cdot2\omega + (2\omega)^2] =$

$(3\chi + 2\omega)(9\chi^2 - 6\chi\omega + 4\omega^2)$

4. Πολυώνυμο με μορφή $\boldsymbol{\chi^2 + (\alpha+\beta)\chi + \alpha\beta}$ «θα επανέλθουμε μετά την λύση της εξίσωσης 2ου βαθμού»

$\chi^2 + (\alpha+\beta)\chi + \alpha\beta= (\chi+\alpha)(\chi+\beta)$

Παραδείγματα:

$\chi^2+5\chi+6 = \chi^2 + (2+3)\chi + 2\cdot3 = (\chi+2)(\chi+3)$

Πως εργάζομαι για να παραγοντοποιήσω

☞ Ελέγχω αν όλοι οι όροι του πολυωνύμου έχουν κοινό παράγοντα και αν:

ΝΑΙ βγάζω τον κοινό παράγοντα και συνεχίζω την παραγοντοποίηση.

ΟΧΙ ψάχνω για ομάδες όρων που έχουν κοινό παράγοντα

☞ Ελέγχω μήπως είναι ανάπτυγμα ταυτότητας

- Αν οι όροι είναι δύο τις ταυτότητες $\alpha^2 - \beta^2$, $\alpha^3+\beta^3$, $\alpha^3 -\beta^3$
- Αν οι όροι είναι τρεις την ταυτότητα $\alpha^2\pm2\alpha\beta+\beta^2$
- Αν οι όροι είναι τέσσαρες την ταυτότητα $\alpha^3\pm3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2\pm\beta^3$

☞ Ελέγχω μήπως είναι συνδυασμός κοινού παράγοντα και ταυτότητας

Ασκήσεις

1. Να αναλύσετε σε γινόμενο παραγόντων τα πολυώνυμα:

α] $\lambda x^3-2\lambda x^2-\mu x+2\mu$

β] $12\alpha^3+60\alpha^2+4\alpha+20$

γ] $\alpha^2-\alpha\beta+\alpha^6\beta^5-\alpha^5\beta^6+12\alpha-12\beta$

δ] $x^2y^4+x^4y^2+x^3y+xy^3-5x^2-5y^2$

ε] $\alpha^2x+\alpha^2y+\alpha^2z+\alpha^2\omega - 4x - 4y - 4z - 4\omega$

στ] $xy^2-y^2+(x-1)^2y-x^2y+xy$

ζ] $3\alpha^2x^2-3\alpha^2y^2-2x^2+2y^2$

η] $3x^3-3\alpha x-x^2+\alpha$

θ] $\alpha^2x^2-\alpha^2-\beta^2x^2+\beta^2$

2. Όμοια

$(x+y)^2 - 16$, $(\alpha+3)^2 - 1$, $36\omega^4 - (\omega^2 -5)^2$,

$81 - (x-y)^2$, $(x+2)^2 - (x-2)^2$, $(2x+y)^2 - (x-y)^2$,

$(\alpha+\beta-\gamma)^2 - (\alpha-\beta+\gamma)^2$, $(4\alpha -3\beta+\gamma)^2 -(\alpha - 3\beta+4\gamma)^2$, $-(2x+3y)^2 + (3x-2y)^2$

3. Όμοια

$81x^4-36x^2+4$, $9x^2y^2-30xy+25$, $100x^4y^6-40x^2y^3\omega^2+4\omega^4$

$9x^2-12\alpha x+4\alpha^2$, $\omega^6-6\omega^3+9$, $4\alpha^2-2\alpha+\frac{1}{4}$,

$36\omega^4-12\omega^2x^3+x^6$, $z^6-2z^3yx^2+x^4y^2$, $64\alpha^4-80\alpha^2\beta\gamma+25\beta^2\gamma^2$

4. Όμοια

x^3+1, α^3-8, x^2y^6-125, $64x^3-27$,

$(\alpha+1)^3-\beta^3$, $(x+y)^3-27$, $125-(\alpha-\beta)^3$, $(\alpha+\beta)^3-(\alpha-\beta)^3$,

x^4-16, x^8-y^8, $\lambda^2x^2-\lambda^2y^2$, $\alpha\beta^5-\alpha^5\beta$

5. Να αναλυθούν σε γινόμενο παραγόντων οι παρακάτω παραστάσεις:

α ομάδα

1) $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\alpha^2\beta^2-2\beta^2\gamma^2-2\alpha^2\gamma^2$

2) $(\alpha\beta+\gamma\delta+\beta^2-\delta^2)^2-(\alpha\delta+\beta\gamma)^2$

3) $4xy(x-y)-6x(x-y)^2+2x(x^2-y^2)$

4) $(7x-y)^2-4(7x-y)(2x+y-1)+3(2x+y-1)^2$

5) $4x^2+y^2+9\omega^2-4xy+12x\omega-6y\omega$

6) $(\alpha-2\beta)^2-6(\alpha-2\beta)(3\alpha+\beta)+8(3\alpha+\beta)^2$

7) $(\alpha x+\beta y)^2+(\alpha y-\beta x)^2+(\gamma x+\delta y)^2+(\gamma y-\delta x)^2$

8) $\alpha\gamma(\alpha+\gamma)+\alpha\beta(\alpha-\beta)-\beta\gamma(\beta+\gamma)$

9) $(\alpha-\beta)(\alpha^2-\gamma^2)-(\alpha-\gamma)(\alpha^2-\beta^2)$

10) $1+xy+\alpha(x+y)-(x+y)-\alpha(1+xy)$

β ομάδα

1. $(\alpha x+\beta y)^2+(\alpha y-\beta x)^2+\gamma^2(x^2+y^2)$

2. $(\alpha x+\beta y)^2+(\alpha y-\beta x)^2+(\gamma x+\delta y)^2+(\gamma y-\delta x)^2$

3. $(\alpha+\beta)^2-(\gamma+\delta)^2+(\alpha+\gamma)^2-(\beta+\delta)^2$

4. $(\alpha+\beta)^3+2(\alpha^3+\beta^3)$

5. $(\alpha-\beta)^3+(\beta-\gamma)^3+(\gamma-\alpha)^3$

6. $\alpha^2(\gamma-\beta)+\beta^2(\alpha-\gamma)+\gamma^2(\beta-\alpha)$

7. $(x-\alpha)^2(\beta-\gamma)+(x-\beta)^2(\gamma-\alpha)+(x-\gamma)^2(\alpha-\beta)$

8. $2(2x-\alpha)^3-27\alpha^2x$ [η λύση $(x-2\alpha)(4x+\alpha)^2$]