Εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού

Ορισμοί - παρατηρήσεις

1. Κάθε πολυώνυμο που μετά από αναγωγή ομοίων όρων και διάταξη κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x έχει πάρει την μορφή $\boldsymbol{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ όπου α,β,γ πραγματικοί αριθμοί και $\alpha \neq 0$ λέγεται **τριώνυμο $2^{ου}$ βαθμού**.

Παράδειγμα: $3x^2+5x - 12$, εδώ έχω $\alpha = 3$, $\beta = 5$ και $\gamma = -12$
(**α** συντελεστής του x^2, **β** συντελεστής του x και **γ** ο σταθερός όρος)

2. Έστω $P(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$ τριώνυμο, αν στη θέση της μεταβλητής x αντικαταστήσω κάποιο αριθμό ρ η παράσταση θα πάρει τη μορφή αριθμητικής παράστασης $P(\rho)=\alpha\rho^2+\beta\rho+\gamma$ και αν εκτελέσω τις πράξεις ο αριθμός που θα βρω λέγεται αριθμητική τιμή.

Παράδειγμα:
$P(x) = 2x^2-x - 6$ για $x = 1$ έχω $P(1) = 2\cdot 1^2 -1-6=2-1-6=-5$, παρατηρώ όμως για $x=2$ $P(2) = 2 \cdot 2^2 -2 -6=8 -2 -6 = 0$

Θα λέμε ρίζα του τριωνύμου P(x) κάθε πραγματικό αριθμό ρ για τον οποίο ισχύει **$P(\rho)=0$.** (δηλαδή δίνει τιμή μηδέν)

3. Θα λέμε εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού κάθε παράσταση της μορφής $\boldsymbol{\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0}$ όπου α, β,γ πραγματικοί αριθμοί με $\boldsymbol{\alpha \neq 0}$ και **ρίζα ή λύση** κάθε πραγματικό αριθμό **ρ** που **αληθεύει** την ισότητα $\boldsymbol{\alpha\rho^2+\beta\rho+\gamma = 0}$ (σωστή).

Παράδειγμα: $2x^2-x -6 =0$ είναι μία εξίσωση β΄ βαθμού

για $x = 1$ έχω $1^2 -1-6 =2-1-6 =-5$ Λάθος

για $x = 2$ έχω $2 \cdot 2^2 -2 -6=8 -2 -6=0$ Σωστή

άρα το 2 είναι μία ρίζα της εξίσωσης.

4. Στην εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού οι συντελεστές β, γ σαν πραγματικοί αριθμοί δεν αποκλείεται να είναι και μηδέν και προκύπτουν εξισώσεις με **ελλιπή μορφή**.

για β=0	$\boldsymbol{\alpha x^2+\gamma = 0}$
για γ=0	$\boldsymbol{\alpha x^2+\beta x = 0}$
για β=0 & γ=0	$\boldsymbol{\alpha x^2 = 0}$

Λύση της 2ο/βάθμιας εξίσωσης

1. Μορφή $\alpha x^2 + \gamma = 0$

$\alpha x^2+\gamma=0 \Leftrightarrow \alpha x^2= -\gamma \Leftrightarrow \chi^2 = \frac{-\gamma}{\alpha}$

α) αν το κλάσμα $\frac{-\gamma}{\alpha}$ **θετικό** η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις $+\sqrt{\frac{-\gamma}{\alpha}}$ και $-\sqrt{\frac{-\gamma}{\alpha}}$

β) αν το κλάσμα $\frac{-\gamma}{\alpha}$ **αρνητικό** η εξίσωση δεν έχει δύο λύσεις **(Αδύνατη).**

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να λυθούν οι εξισώσεις: i)** $2x^2 - 18 = 0$ **ii)** $3x^2+6 = 0$

ΛΥΣΗ

i) έχουμε $2x^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 = \frac{18}{2} \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow$ **x=** $\pm\sqrt{9} = \pm 3$ **δύο αντίθετες λύσεις**

ii) όμοια $3x^2 = -6 \Leftrightarrow x^2 = \frac{-6}{3} = -2 < 0$ **ΑΔΥΝΑΤΗ**

2. Μορφή $\alpha x^2 + \beta x = 0$ έχει πάντα λύση την:

$\alpha x^2+\beta x = 0 \Leftrightarrow x(\alpha x+\beta) = 0 \Leftrightarrow x=0$ **ή** $\alpha x+\beta = 0 \Leftrightarrow x = 0$ **ή** $x = -\frac{\beta}{\alpha}$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

2. **Να λυθούν οι εξισώσεις: i)** $2x^2 + 18x = 0$ **ii)** $3x^2 - 6x = 0$

ΛΥΣΗ

i) έχουμε $x\cdot(2x + 18) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $2x + 18 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $2x = -18 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = -9$

ii) όμοια $x\cdot(3x - 6) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $3x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $3x = 6 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 2$

πάντα δύο λύσεις με σίγουρη το 0 (μηδέν)

3. Μορφή $\alpha x^2 = 0$ έχει πάντα λύση την **x= 0**

4. Γενική μορφή $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha \neq 0$

Βήμα 1ο Βρίσκω την τιμή της παράτασης $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ που ονομάζεται **διακρίνουσα** της εξίσωσης.

Βήμα 2ο Συγκρίνω την διακρίνουσα Δ με το μηδέν:

i. αν $\Delta < 0$ **(αρνητική)** η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες – **Αδύνατη**

ii. αν **Δ = 0** η εξίσωση έχει **μία** διπλή ρίζα την **ρ** = $\frac{-\beta}{2\alpha}$

iii. αν **Δ > 0 (Θετική)** η εξίσωση έχει **δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες** που δίνονται από τον τύπο $\boldsymbol{\rho_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}}$, όπου Δ η διακρίνουσα

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Να λυθούν οι εξισώσεις: i) $2x^2 - 10x + 12 = 0$ **ii)** $3x^2 - x + 1 = 0$

ΛΥΣΗ

i) έχουμε: $\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -10 \\ \gamma = 12 \end{cases}$ Έτσι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-10)^2 - 4\cdot 2\cdot 12 = 100 - 96 = 4 > 0$

Άρα οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{10 \pm \sqrt{4}}{2\cdot 2} = \frac{10 \pm 2}{4} \langle \begin{matrix} \to 12/4 = 3 \\ \to 8/4 = 2 \end{matrix}$$

ii) έχουμε: $\begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = -1 \\ \gamma = 1 \end{cases}$ Έτσι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4\cdot 3\cdot 1 = -11 < 0$

Άρα η εξίσωση είναι **αδύνατη**.

5. Παραγοντοποίηση του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$

Εργάζομαι όπως παραπάνω και βρίσκω τις ρίζες του τριωνύμου:

- αν **Δ < 0** δεν έχει ρίζες - **Δεν παραγοντοποιείται.**
- αν **Δ = 0** έχει **μία** διπλή ρίζα την **ρ** = $\frac{-\beta}{2\alpha}$, το τριώνυμο είναι τέλειο τετράγωνο και ισχύει: $\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\cdot(x - \rho)^2}$.
- αν **Δ > 0** έχει **δύο ρίζες διαφορετικές** και ισχύει: $\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση $2x^2 - 3x + 1$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε $\Delta = (-3)^2 - 4\cdot 2 = 1 > 0$ άρα οι ρίζες είναι $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2\cdot 2} = \frac{3 \pm 1}{4} = \Big| \begin{matrix} \to 1 \\ \to \frac{1}{2} \end{matrix}$

Άρα $2x^2 - 3x + 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1) = (2x - 1)(x - 1)$.

6. Άθροισμα και γινόμενο ριζών του τριωνύμου $αχ^2+βχ+γ$, $α \neq 0$

i. αν **Δ > 0** οι δύο ρίζες είναι $x_1=\frac{-β+\sqrt{Δ}}{2α}$ και $x_2=\frac{-β-\sqrt{Δ}}{2α}$.

Αν πάρουμε **Σ = x₁+x₂** = $\frac{-β+\sqrt{Δ}}{2α}+\frac{-β-\sqrt{Δ}}{2α}=\frac{-β+\sqrt{Δ}-β-\sqrt{Δ}}{2α}=\frac{-2β}{2α}=-\frac{β}{α}$

και **Γ = x₁·x₂** $\frac{-β+\sqrt{Δ}}{2α}\cdot\frac{-β-\sqrt{Δ}}{2α}=\frac{\left(-β+\sqrt{Δ}\right)\cdot\left(-β-\sqrt{Δ}\right)}{4α^2}=\frac{(-β)^2-\left(\sqrt{Δ}\right)^2}{4α^2}=$

$=\frac{β^2-\left(β^2-4αγ\right)}{4α^2}=\frac{4αγ}{4α^2}=\frac{γ}{α}$.

ii. Όμοια αν **Δ=0** τότε $Σ = 2\cdot x_1 = 2\cdot(-\frac{β}{2α})=-\frac{β}{α}$ και $Σ=x_1.x_2=\left(-\frac{β}{2α}\right)\left(-\frac{β}{2α}\right)=\frac{β^2}{4α^2}=\frac{4αγ}{4α^2}=\frac{γ}{α}$

Παρατήρηση:

Κάθε εξίσωση $αx^2 + βx + γ$, $α \neq 0$ γράφεται $x^2+\frac{β}{α}x+\frac{γ}{α}=0 \Leftrightarrow x^2-\left(-\frac{β}{α}\right)x+\frac{γ}{α}=0$,

$\Leftrightarrow x^2-\left(x_1+x_2\right)x+x_1x_2=0 \Leftrightarrow \boxed{x^2 - Σx + Γ= 0}$

Άρα από την εξίσωση βρίσκω τις ρίζες και αντίστροφα από τις ρίζες βρίσκω την εξίσωση.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να βρείτε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωση $x^2+30x+198=0$ **χωρίς να την λύσετε.**

ΛΥΣΗ

Α. Επειδή $Δ=β^2-4αγ=30^2-4\cdot 2\cdot 198=30^2-8\cdot 198>0$ έχει δύο ρίζες x_1, x_2 πραγματικές και άνισες.

Β. Αφού $Γ=x_1x_2=\frac{γ}{α}=\frac{198}{1}>0$ το γινόμενο των δύο ριζών είναι θετικό, οπότε οι **x_1, x_2 είναι ομόσημοι** αριθμοί.

Γ. Αφού $Σ=x_1+x_2=-\frac{β}{α}=-\frac{30}{1}<0$ το άθροισμα αρνητικό, έτσι η κάθε ρίζα είναι ένας **αρνητικός αριθμός.**

7. Λύση Κλασματικών εξισώσεων

Κλασματικές εξισώσεις λέγονται οι εξισώσεις που περιέχουν κλάσματα με άγνωστο στους παρονομαστές.

Επίλυση κλασματικών εξισώσεων με βήματα.

1. Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές.
2. Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π, των παρονομαστών, παίρνοντας τον κάθε διαφορετικό εμφανιζόμενο παράγοντα και με το μεγαλύτερο εκθέτη.
3. Θέτουμε περιορισμούς: το Ε.Κ.Π. $\neq 0$ και βρίσκω τις αντίστοιχες απορριπτόμενες τιμές.
4. Κάνουμε απαλοιφή παρανομαστών πολλαπλασιάζοντας τα μέλη με το Ε.Κ.Π.
5. Απλοποιούμε και εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα (*πολλαπλασιάζουμε*).
6. Κάνουμε αναγωγές όμοιων όρων και διατάσσουμε κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x και με βάση τα παραπάνω λύνουμε την εξίσωση.
7. Τέλος, ελέγχουμε αν οι ρίζες που βρήκαμε ικανοποιούν τον περιορισμό. Όσες δεν τον ικανοποιούν τις απορρίπτουμε.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

Στις εξισώσεις 2ου βαθμού

1. Να λυθούν οι παρακάτω 2ο/βάθμιες εξισώσεις:

$x^2-5x+6 = 0$	$2x^2-10x+12 = 0$	$-2x^2+10x-12 = 0$
$x^2+8x+12 = 0$	$3x^2+24x+36 = 0$	$-3x^2-24x-36 = 0$
$x^2-6x+12 = 0$	$3x^2-18x+24 = 0$	$-3x^2+18x-24 = 0$

- Μήπως οι εξισώσεις της ίδιας γραμμής έχουν την ίδια λύση;
- Όσες έχουν την ίδια λύση λέγονται **ισοδύναμες**.
- Ποια από τις τρεις συμφέρει να λύσω και γιατί;

2. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

$x^2-25 = 0$	$-x^2+25 = 0$	$3x^2-75 = 0$	$-3x^2+75 = 0$
$x^2+15 = 0$	$-x^2-15 = 0$	$3x^2+45 = 0$	$-3x^2-45 = 0$
$x^2-7x = 0$	$-x^2+7x = 0$	$5x^2-35x = 0$	$-5x^2+35x = 0$

Και εδώ οι τέσσερις εξισώσεις της ίδιας γραμμής έχουν την ίδια λύση. Άρα είναι ισοδύναμες. Ποια από όλες συμφέρει να λύσω;

3. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

$(2x^2-18)^2 + (x-3)^2 = 0$	$5 + (x-3)^2 = 0$	$5(x^2-5x+6)^{2004} = 0$
$(2x^2-18)^{2004} + (x-3)^2 = 0$	$(x-3)^2+(x+3)^2 = 0$	$5(x-5)+(x+5)^2=5(x-5)$
$(5x^2-6x+{}^{18}/_{10})(x^2+5)=0$	$(2x+5)(2x^2-32)(x^2+13) = 0$	$(x-2)(x^2-4) = 0$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$3x^2-\left(\sqrt{2}-3\right)x-\sqrt{2}=0$ $\qquad$ $4x^2-2\left(\sqrt{3}+1\right)x+\sqrt{3}=0$

ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. Μορφή δύο ίσων κλασμάτων:

$\frac{x+1}{5}=\frac{1}{6}$ $\frac{2x}{7}=\frac{x-3}{5}$ $\frac{x+2}{2}+\frac{x-3}{5}=0$

$\frac{x+5}{5}=\frac{12}{x+1}$ ή $\frac{x+5}{5}-\frac{12}{x+1}=0$ $\frac{4x-1}{x-3}=\frac{2x-1}{x-4}$ $\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}=0$ ή $=1$

2. Μορφή πολλών κλασμάτων:

$\frac{1}{x-3}=\frac{2x}{x^2-9}+\frac{2}{x+3}$ $\frac{2}{x+3}+\frac{2x}{(x-3)(x+3)}=\frac{3}{8}+\frac{1}{x-3}$

$\frac{5x}{x^2-16}+\frac{2}{x-4}=\frac{-3}{x+4}$ $\frac{x}{x-2}+\frac{1}{x^2-2x}=\frac{x-1}{x}$

$\frac{1}{x+2}+\frac{2x}{x^2-4}=1+\frac{1}{x-2}$ $\frac{2x-1}{x+2}+\frac{x-1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}=0$

$\frac{2x}{x^2-4}+\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x-2}+1$ $\frac{2}{5x-15}-\frac{1}{x+2}=\frac{6x+1}{x^2-x-6}$

$\frac{-3}{x+3}+\frac{-9}{x^2-9}=\frac{-x}{x-3}-\frac{x^2}{9-x^2}$ $\frac{10}{x^2-1}+\frac{2}{x+1}+\frac{x}{x-1}=0$

$\frac{x-5}{x+5}+\frac{x+5}{x-5}=\frac{10}{3}$ $\frac{3}{x+3}=\frac{2}{x^2-2x-3}+\frac{1}{x+1}$

$\frac{x-4}{x^2+2x}=\frac{3}{x+2}-\frac{2}{x}$ $\frac{1}{x^2+4x+4}-\frac{2}{x+2}=0$

$\frac{3x+2}{x^2-5x+6}=\frac{3}{x-2}-\frac{4}{x-3}$ $\frac{5}{x}-\frac{1}{2x-3}=\frac{3}{3x-2x}$

$\frac{2}{x^2-3x+2}+\frac{4}{2x^2-8}=\frac{2}{x+2}$ $\frac{3x-2}{x(x+1)}+\frac{1}{2x}=\frac{6}{x^2+3x+2}$

$\frac{-x^2+3x-2}{2x^2-3x-2}=x$ $\frac{3x^3+5x^2-2x}{x^2+2x}=\frac{1}{3x-1}$

$\frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{1}{x-1}-1}=-\frac{3}{8}$ $\frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{x}{3}-\frac{1}{x+1}}=\frac{1}{x}$

$$\frac{2}{x-1}=\frac{5x+2}{x^2-x}$$

$$\frac{2}{x}-\frac{x^2}{x-1}=-x-\frac{1}{x(x-1)}$$

$$\left(\frac{x-1}{x}\right)^2-5\cdot\frac{x-1}{x}=-6$$

$$\frac{x^2+3x-4}{x\,(x+3)}=2$$

$$\frac{4x}{3x-x^2}+0{,}5=0$$

$$\frac{2x^2-4x+5}{x^2+2}=1$$

Προβλήματα που λύνονται με εξίσωση 2ου βαθμού

1. Να βρεθεί ο αριθμός του οποίου το μισό του τετραγώνου του αν αυξηθεί κατά 2 θα γίνει ίσο με το διπλάσιο του αριθμού αυτού.

2. Να βρείτε δύο αριθμούς που έχουν άθροισμα Σ = 16 και γινόμενο Γ = 63.

3. Όμοια Σ = 10/3 και Γ = 1, Σ = -12 και Γ = 35, Σ = -3 και Γ = -40 .

4. Να βρείτε δύο αριθμούς με διαφορά Δ = 13 και γινόμενο Γ = 140
   όμοια με διαφορά Δ = -25 και γινόμενο Γ =-150
   όμοια με διαφορά Δ = 17 και γινόμενο Γ = 200.

5. Να βρεθεί ο αριθμός του οποίου το γινόμενο με το αυξημένο κατά 4 εαυτό του δίνει 21.

6. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη κάθετων πλευρών 3x+2, 4x-3 και υποτείνουσα 5x-1 να βρεθεί το x και μετά τα μήκη των πλευρών του.

7. Όμοια για κάθετες πλευρές x+4, 2x-2 και υποτείνουσα 3x-2.

8. Σε τετράγωνο αν οι πλευρές αυξηθούν κατά 2 μονάδες το εμβαδό του γίνει 49 τετραγωνικές μονάδες να βρείτε την πλευρά και το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου.

9. Να βρείτε τις πλευρές ενός ορθογωνίου με περίμετρο 68 μ. και διαγώνιο 26 μ.

10. Αν αυξήσουμε τις δύο απέναντι πλευρές ενός τετραγώνου κατά 5 μ. και τις άλλες δύο κατά 3 μ., προκύπτει ορθογώνιο που έχει εμβαδό 168 τ.μ. Να βρεθεί η πλευρά και το εμβαδό του τετραγώνου.

11. Να βρείτε τις κάθετες πλευρές και το εμβαδό ενός ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα 13 μ. αν γνωρίζουμε ότι η μία κάθετη είναι μικρότερη της άλλης κατά 7 μ.

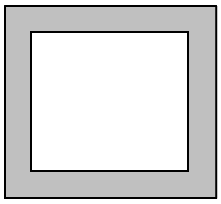
12. Να υπολογιστεί η περίμετρος ενός ορθογώνιου τριγώνου με κάθετες πλευρές x-20 μ. και x+40 μ. εμβαδό 2750 τ.μ.

13. Να υπολογίσετε δύο διαδοχικούς περιττούς φυσικούς αριθμούς που έχουν άθροισμα τετραγώνων 514.

14. *Σήμερα ηλικία του Νίκου είναι διπλάσια από την ηλικία του Βασίλη. Πριν από πέντε χρόνια η ηλικία του Νίκου ήταν τα 10/4 της ηλικίας του Βασίλη. Πόσων χρονών είναι σήμερα και οι δύο;

15. ***Αν ο Μέγας Αλέξανδρος πέθαινε 9 χρόνια νωρίτερα, τότε ο χρόνος της βασιλείας του θα ήταν ίσος με το $\frac{1}{8}$ του χρόνου της ζωής του. Αν όμως πέθαινε 9 χρόνια αργότερα και εξακολουθούσε να βασιλεύει, τότε ο χρόνος της βασιλείας του θα ήταν ίσος με το $\frac{1}{2}$ του χρόνου της ζωής του. Να βρεθεί πόσα χρόνια έζησε ο Μέγας Αλέξανδρος και πόσα βασίλεψε.

16. *Δύο τετράγωνα με κέντρο Ο βρίσκονται το ένα μέσα στο άλλο. Η διαφορά των περιμέτρων τους είναι ίση με 40 m. Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τμήματος είναι ίσο με 500 m^2. Πόσο είναι το εμβαδόν του κάθε τετραγώνου;



- **είναι ο βαθμός δυσκολίας της άσκησης.**

Διάταξη και πράξεις

Ορισμοί: Έστω α και β δύο πραγματικοί αριθμοί (α, β ∈ R). Λέμε ο α μεγαλύτερος του β και συμβολίζουμε **α > β,** όταν η διαφορά **α – β > 0 ,** δηλαδή είναι θετικός αριθμός.

$$\boldsymbol{\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0}$$

Όμοια λέμε **α < β** όταν **α-β < 0** και **α = β** όταν **α-β = 0**

Από τα παραπάνω προκύπτει:
- κάθε θετικός είναι μεγαλύτερος του μηδενός.
- κάθε αρνητικός μικρότερος του μηδενός.

Αν τα α και β είναι ομόσημα (α·β > 0) μπορεί να γίνει σύγκριση του πηλίκου τους με την μονάδα δηλαδή:

I] $\frac{\alpha}{\beta} > 1$**, τότε α>β,** **II]** $\frac{\alpha}{\beta} < 1$**, τότε α<β,** **III]** $\frac{\alpha}{\beta} = 1$**, τότε α=β,**

<u>Παρατηρήσεις</u>:

1. Τα > και < λέγονται σύμβολα της ανισότητας.

2. Η σχέση α < β λέγεται ανισότητα. Το **α** λέγεται 1^{o} μέλος της ανισότητας και το **β** λέγεται 2^{o} μέλος.

3. Δύο ανισότητες με το ίδιο σύμβολο π.χ. α < β και γ < δ λέγονται ομοιόστροφες ενώ με διαφορετικό ετερόστροφες.

4. Για πραγματικούς α και β που ισχύει: α > β ή α = β συμβολίζω α ≥ β.

Ι δ ι ό τ η τ ε ς α ν ι σ ο τ ή τ ω ν

Α] Αν **α > β ⇔ α + γ > β + γ** για κάθε α, β, γ πραγματικούς.

Αν προσθέσουμε (ή αφαιρέσουμε) στα μέλη μιας ανισότητας τον ίδιο αριθμό, θα προκύψει ομοιόστροφη ανισότητα.

<u>Απόδειξη</u>:

α > β	
α–β > 0	περνάω το β στο πρώτο μέλος
α–β + γ–γ > 0	προσθέτω το μηδέν σε μορφή αθροίσματος αντιθέτων +γ–γ]
α+γ – β – γ > 0	αντιμεταθετική –β + γ = +γ – β
α+γ–(β+γ)>0	επιμεριστική –(β + γ) = –β – γ
α+γ > β+γ	περνάω στο 2^{o} μέλος το –(β + γ) αλλάζει και πρόσημο

Σημείωση. *Η φράση περνάω στο άλλο μέλος κάποιο αριθμό και αλλάζει πρόσημο είναι πρακτική έκφραση που γνωστή από τις εξισώσεις της β' γυμνασίου.*

Β] Αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$ τότε $\alpha > \gamma$ ***μεταβατική ιδιότητα***

Απόδειξη:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0 \\ \beta > \gamma \Leftrightarrow \beta - \gamma > 0 \end{array}\right\} + \quad \alpha\text{-}\beta + \beta\text{-}\gamma > 0 \Leftrightarrow \alpha\text{-}\gamma > 0 \Leftrightarrow \alpha > \gamma$$

το άθροισμα θετικών αριθμών είναι θετικό

Γ] Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε $\alpha+\gamma > \beta+\delta$ ***πρόσθεση ανισοτήτων κατά μέλη***

Απόδειξη:

$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma > \beta+\gamma$ πρόσθεση στα δύο μέλη του γ

$\gamma > \delta \Leftrightarrow \beta+\gamma > \beta+\delta$ πρόσθεση στα δύο μέλη του β

από μεταβατική έχω $\alpha+\gamma > \beta+\gamma > \beta+\delta$ άρα $\alpha+\gamma > \beta+\delta$.

Δ] Αν $\gamma > 0$ τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\cdot\gamma > \beta\cdot\gamma$

Αν πολλαπλασιάσουμε (ή διαιρέσουμε) τα μέλη μιας ανισότητας με ένα θετικό αριθμό, θα προκύψει ομοιόστροφη ανισότητα.

Απόδειξη:

$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\text{-}\beta > 0$ (θετικό) και $\gamma > 0$ (θετικό) άρα για το γινόμενο ομόσημων $(\alpha\text{-}\beta)\gamma > 0$

$\Leftrightarrow \alpha\gamma\text{-}\beta\gamma > 0 \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$

Ε] Αν $\gamma < 0$ τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\cdot\gamma < \beta\cdot\gamma$

Αν πολλαπλασιάσουμε (ή διαιρέσουμε) τα μέλη μιας ανισότητας με έναν αρνητικό αριθμό, θα προκύψει ετερόστροφη ανισότητα.

Απόδειξη:

$\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha\text{-}\beta>0$ (θετικό) και $\gamma<0$ (αρνητικό) άρα για το γινόμενο ετερόσημων $(\alpha\text{-}\beta)\gamma<0 \Leftrightarrow$

$\alpha\gamma\text{-}\beta\gamma<0 \Leftrightarrow \alpha\gamma<\beta\gamma$

ΣΤ] $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε $\alpha\cdot\gamma > \beta\cdot\delta$

Μόνο για α, β, γ, δ θετικούς πραγματικούς ισχύει ο πολλαπλασιασμός ανισοτήτων κατά μέλη.

Απόδειξη:

$\alpha > \beta$ και $\gamma > 0 \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$ (1), όμοια

$\gamma > \delta$ και $\beta > 0 \Leftrightarrow \beta\gamma > \beta\delta$ (2) μεταβατικά από τα(1) και (2) έχω

$\alpha\gamma > \beta\gamma > \beta\delta$ δηλαδή $\alpha\gamma > \beta\delta$.

Σημείωση: *Πρέπει να ξέρω ακόμη για α, β πραγματικούς αριθμούς:*

α. Αν $\alpha>0$ και $\beta>0$ τότε $\alpha+\beta>0$

β. Αν $\alpha<0$ και $\beta<0$ τότε $\alpha+\beta<0$

γ. Αν α, β ομόσημοι τότε $\alpha\beta>0$ και $\alpha:\beta=\alpha/\beta>0$ όπου $\beta \neq 0$

δ. Αν α, β ετερόσημοι τότε $\alpha\beta<0$ και $\alpha:\beta=\alpha/\beta<0$ και $\beta \neq 0$

ε. Για κάθε $\alpha \neq 0$ ισχύει $\alpha^2>0$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

1. Για πραγματικούς και ομόσημους αριθμούς α, β (συμβολίζω $\alpha\cdot\beta > 0$) ισχύει:

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$$

Απόδειξη:

$\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta < 0 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha-\beta}{\alpha\beta} < 0$ (γιατί τα α-β και αβ ετερόσημα) $\Leftrightarrow$

$\dfrac{a}{\alpha\beta} - \dfrac{\beta}{\alpha\beta} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\beta} - \dfrac{1}{\alpha} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\beta} < \dfrac{1}{\alpha}$ ή $\dfrac{1}{\alpha} > \dfrac{1}{\beta}$.

Λύση ανίσωσης (πρώτου βαθμού) αx+β>0, $\alpha \neq 0$

Η ανίσωση που μπορεί να γραφεί με τη μορφή αx + β > 0 ή αx + β < 0, όπου *x* ο άγνωστος και α, β σταθεροί αριθμοί (που δεν εξαρτώνται από το x), λέγεται ανίσωση α΄ βαθμού με έναν άγνωστο.

αx + β >0 ⇔ αx > -β (προσθέτω και στα δύο μέλη το -β, δηλαδή χωρίζω γνωστά από άγνωστα)

1. Αν α>0, x > -β/α ή x > -β:α (πολ/ζω και από τις δύο μεριές με το θετικό 1/α)
2. Αν α<0 , x < -β/α ή x > -β:α (πολ/ζω με το αρνητικό 1/α)
3. Αν α=0, 0x > -β **I)** Αληθεύει για κάθε πραγματικό χ αν β θετικό (-β<0)
   II) ΑΔΥΝΑΤΗ, αν β αρνητικό (-β>0)

Παραδείγματα:

1. Να λυθεί η ανίσωση $\frac{3x-1}{5} - 2 \geq \frac{x}{7} + \frac{x+1}{2}$.

ΛΥΣΗ

Για απαλοιφή παρονομαστών πολ/ζουμε τα μέλη με το ΕΚΠ(5,7,2) = 70

$$70 \cdot \left(\frac{3x-1}{5} - 2\right) \geq 70 \cdot \left(\frac{x}{7} + \frac{x+1}{2}\right)$$

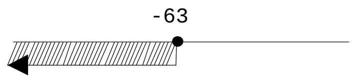
$14(3x-1) - 140 \geq 10x + 35(x+1)$ επιμεριστική

$42x-14-140 \geq 10x + 35x-35$ χωρίζουμε γνωστά από άγνωστα

$42x-10x-35x \geq 14+140-35$ αναγωγή όμοιων όρων

$-3x \geq 189$ ή $3x \leq -189$ διαίρεση με το συντελεστή του αγνώστου

$x \leq -\frac{189}{3}$ ή $x \leq -63$



2. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων
$-6x + 3 \leq 5x + 2(5-6x)$ και $15(2x+3) > 4x - 7$.

ΛΥΣΗ

Λύνουμε χωριστά τις ανισώσεις και έχουμε:

$-6x + 3 \leq 5x + 2(5-6x)$

$-6x + 3 \leq 5x + 10 - 12x$

$-6x-5x+12x \leq 10-3$

$\mathbf{x \leq 7}$

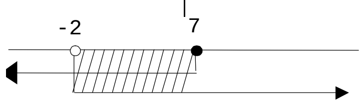
$15(2x+3) > 4x - 7$

$30x + 45 > 4x - 7$

$30x - 4x > -45 - 7$

$26x > -52$

$\mathbf{x > -2}$



ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Όταν σε μια ανίσωση έχουμε σύμβολο ≤ ή ≥, τότε περιλαμβάνεται το άκρο του διαστήματος και το σημείο του άξονα θα έχει «μαύρη τελεία», διαφορετικά «άσπρη».

Ασκήσεις - Διάταξη και πράξεις

Ομάδα Ι – ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

(βάλε σε κύκλο το κεφαλαίο γράμμα με την σωστή απάντηση)

1. Αν α, β πραγματικοί αριθμοί και ισχύει $\alpha>\beta$, πολ/ζω και τα δύο μέλη με -2 τότε:
   Α. $-2\alpha<-2\beta$ Β. $-2\alpha>-2\beta$ Γ. $-2\alpha=-2\beta$ Δ. $-2\alpha\geq-2\beta$ Ε. $-2\alpha\leq-2\beta$

2. Αν α, β πραγματικοί αριθμοί και ισχύει $\alpha<\beta$, πολ/ζω και τα δύο μέλη με μηδέν τότε:
   Α. $0\cdot\alpha<0\cdot\beta$ Β. $0\cdot\alpha>0\cdot\beta$ Γ. $0\cdot\alpha=0\cdot\beta$ Δ. $0\cdot\alpha\geq0\cdot\beta$ Ε. $0\cdot\alpha\leq0\cdot\beta$

3. Αν $\alpha>\beta$ και πολ/σω τα δύο μέλη με το x^2 όπου x πραγματικός $\neq 0$ τότε:
   Α. $\alpha x^2<\beta x^2$ Β. $\alpha x^2\geq\beta x^2$ Γ. $\alpha x^2=\beta x^2$ Δ. $\beta x^2<\alpha x^2$ Ε. $\alpha x^2\leq\beta x^2$

4. Αν $\alpha\leq\beta$ και πολ/σω τα δύο μέλη με το x^{-2} όπου x πραγματικός $\neq 0$ τότε:
   Α. $\alpha x^{-2}<\beta x^{-2}$ Β. $\alpha x^{-2}\geq\beta x^{-2}$ Γ. $\alpha x^{-2}=\beta x^{-2}$ Δ. $\alpha x^{-2}<\beta x^{-2}$ Ε. $\alpha x^{-2}\leq\beta x^{-2}$

5. Αν α β θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $\alpha>\beta$ τότε ισχύει:
   Α. $\alpha>0$ & $\beta>0$ Β. $\alpha-\beta<0$ Γ. $\alpha/\beta=1$ Δ. $\alpha/\beta>1$ Ε. $\alpha/\beta<1$

6. Αν $\alpha>\beta$ και $\beta>\gamma$ όπου α,β,γ πραγματικοί αριθμοί ισχύει:
   Α. $\alpha<\gamma$ Β. $\alpha+\beta>\alpha+\gamma$ Γ. $\alpha>\gamma$ Δ. $\beta<\gamma$ Ε. $2\beta>\alpha+\gamma$

7. Αν $\alpha>\beta$ και $\gamma>\delta$ ισχύει και $\alpha\gamma>\beta\delta$ με την προϋπόθεση:
   Α. $\alpha>\delta$ Β. α,β θετικά γ,δ αρνητικά Γ. α,β,γ,δ πραγματικούς Δ. ποτέ Ε. $\alpha\beta\gamma\delta>0$

8. Η ανίσωση $\alpha x+\beta>0$ όπου $\alpha<0$ έχει λύση την:
   Α. $x>0$ Β. $x>\alpha$ Γ. $x<\alpha/\beta$ Δ. $x<-\beta:\alpha$ Ε. $x>\alpha\beta$

Ομάδα ΙΙ - (Σύντομης απάντησης)

1. Αν $-1<\alpha<1$ και $2<\beta<5$ τότε μεταξύ ποιών τιμών περιέχονται οι τιμές των παραστάσεων:
   - $\alpha+\beta$ $\alpha-\beta$ $\alpha\beta$
   - $\alpha-2\beta$ $\alpha:3$ $2\alpha+3\beta-1$

2. Να λυθούν από κοινού οι ανισώσεις $-2(x-5)<7$ και $2{,}5x+\frac{x}{3}<5{,}5$

Ομάδα ΙΙΙ- (Διάταξης – σε σειρά από μικρότερο προς μεγαλύτερο)

1. Αν α, β θετικοί πραγματικοί και $\alpha>\beta$ να γίνει διάταξη στα παρακάτω:
   - $1,\ \frac{\alpha}{\beta},\ \frac{\beta}{\alpha}$
   - $\frac{\alpha}{\beta},\ 1,\ \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$

2. Αν για α πραγματικό ισχύει 0<α<1 να γίνει διάταξη στα: $\frac{1}{\alpha}, \frac{\alpha+1}{2}, 0, \alpha-1, 1, \alpha$
3. Όμοια αν α > 1 στα $\frac{1}{\alpha}, \alpha, \sqrt{\alpha}, 0, 1$
4. Όμοια αν α > β θετικοί πραγματικοί και x>0 στα:
   - $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha+1}{\beta+1}, \frac{\alpha}{\beta+1}$
   - $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\chi+\alpha}{\chi+\beta}$

1. Αν x < 4 τότε $-\frac{\chi}{2}$ ………… -2
2. Αν -x > -6 τότε $\frac{\chi-2}{2}$ ………. 2
3. Αν α < -β τότε -3 ………….. $\frac{\alpha+\beta-6}{2}$
4. Αν 0<α<β<γ, όπου α, β, γ πραγματικοί αριθμοί να αποδείξετε την ανισότητα:

   α] $\alpha^2 < \beta^2$ β] $\sqrt{\alpha} < \sqrt{\beta}$ γ] $\alpha < \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} < \gamma$
5. Αν α, β πραγματικοί όπου α>1 και β>1 να αποδείξετε: α+β <1 + αβ
6. Αν α,β,γ πραγματικοί όπου 0<β<α και γ>0 να αποδείξετε $\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma} < \frac{\alpha}{\beta}$
7. Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει α> $\sqrt{2}$ και β> $3\sqrt{2}$ να αποδείξετε α.β>6
8. Όμοια α> $\sqrt{3}$ και β<- $\sqrt{3}$ τότε α.β -3 < (β-α). $\sqrt{3}$
9. Για πραγματικούς α>0, β>0 και α>0 να αποδείξετε ότι $\alpha^{-2} < \beta^{-2}$
10. Να λυθούν οι ανισώσεις:

    Α. $\frac{1}{6}(4x-3)+4-\frac{3x}{2} > \frac{13}{8}$ Β. $-\frac{2-x}{3} > 1+3(8x-7)$

    Γ. 7(4x-3) > 1+3(8x-7) Δ. $\frac{5x}{6} - \frac{x}{2} + 2 < \frac{x}{3} + 5$

    Ε. $\frac{x+3}{3} - \frac{5x}{6} - 1 + \frac{x}{2} > 0$ ΣΤ. $\frac{x-3}{4} - x + \frac{x-2}{3} < \frac{x-1}{2}$

11. Να βρείτε για ποιες τιμές του x συναληθεύουν οι ανισώσεις:
    - $5(x-2) < \frac{x}{4}$ και $3x + 7 > \frac{x}{5} - \frac{2x+1}{10}$
    - $2(x+4) - (x+6) \leq 12 - x$ και $2x + \frac{x}{6} + \frac{5}{3} \geq 2(1+x)$