Σύνολα

Ορισμός συνόλου (κατά Cantor): Σύνολο είναι κάθε συλλογή αντικειμένων, που προέρχεται από το μυαλό μας ή την εμπειρία μας, είναι καλά ορισμένο και τα αντικείμενα ξεχωρίζουν το ένα από το άλλο δηλαδή είναι διαφορετικά.

Τα αντικείμενα αυτά ονομάζονται στοιχεία ή μέλη του συνόλου.

Γνωστά μας σύνολα:

N	σύνολο φυσικών αριθμών	Q	σύνολο ρητών αριθμών
Z	σύνολο ακεραίων αριθμών	R	σύνολο πραγματικών αριθμών

Παρουσίαση ενός συνόλου

1) Με αναγραφή των στοιχείων π.χ.

Α = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} το σύνολο των ψηφίων
Β = {10,11,12,13,14, ... 99} το σύνολο των διψήφιων αριθμών
Ν = {0,1,2,3,4,5, ... } το σύνολο των φυσικών αριθμών.

Αν θέλω να εκφραστώ «Ο αριθμός 5 είναι φυσικός» για συντομία συμβολίζω **5∈N,** το σύμβολο ∈ διαβάζεται «ανήκει ή είναι»

2) Με περιγραφή των στοιχείων π.χ.

Q = { $\frac{\alpha}{\beta}$ όπου α∈Z, β∈Z, β≠0 και ΜΚΔ(α, β)=1 } για το σύνολο των ρητών

R^+ = {x∈**R**, **x≥0** } για το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών.

3) Ίσα σύνολα λέγονται αυτά που τα στοιχεία του ενός είναι ακριβώς ίδια με τα στοιχεία του άλλου. Συμβολίζω Α = Β π.χ.

Α={1,2,3,4,5,6} και Β={2,1,6,5,4,3}

4) Υποσύνολο συνόλου είναι ένα μέρος του συνόλου ή και το ίδιο το σύνολο πχ
Α={0,1,2,3,4,5} και Β={ 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} τότε Α υποσύνολο του Β συμβολίζω Α⊆Β δηλαδή **όταν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο το Β**.

Παρατήρηση:

- Μπορεί τα σύνολα Α και Β να είναι ίδια δηλαδή Α⊆Α
- Αν Α⊆Β και Β⊆Γ τότε Α⊆Γ
- Α⊆Β και Β⊆Α τότε Α=Β

5) Το σύνολο χωρίς στοιχεία ονομάζεται **καινό σύνολο** και συμβολίζεται με ∅ ή { }

6) Ένωση συνόλων είναι ένα σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία που ανήκουν σε ένα τουλάχιστον των συνόλων πχ

Α={1,3,5} Β={3,4,5,6} συμβολίζω Α∪Β={1,3,4,5,6}

7) Τομή συνόλων είναι το σύνολο με τα κοινά στοιχεία των συνόλων πχ

Α={1,3,5} Β={3,4,5,6} συμβολίζω Α∩Β={3,5}

Η έννοια της συνάρτησης

1) **Συνάρτηση** (function) είναι μία διαδικασία αντιστοίχησης τιμών μεταξύ δύο μη καινών συνόλων A και B όπου κάθε στοιχείο του A έχει ένα και μοναδικό αντίστοιχο στο B.

2) Το σύνολο A λέγεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης.

3) B λέγεται **σύνολο τιμών** της συνάρτησης.

4) Το σύνολο f(A) δηλαδή το υποσύνολο του B που είναι οι τιμές στις οποίες αντιστοιχίζονται τα στοιχεία του A λέγεται **πεδίο τιμών**

Παρατηρήσεις - Παραδείγματα:

- Για να οριστεί καλά μία συνάντηση πρέπει να δοθούν το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών και ένας αλγεβρικός τύπος που μας καθορίζει τον τρόπο αντιστοίχησης τιμών.

  π.χ. $f : A \to B : x \to f(x)=4x$ όπου

  $A=\{2,4,6,8,9,12\}$ και $B=\{0,1,2,3,4,5, ..., 100\}$

- στο παράδειγμα η συνάντηση κάθε αριθμό του πεδίου ορισμού A τον αντιστοιχίζει στο τετραπλάσιό του δηλαδή

  $A \ni 2 \to 4\bullet 2 = 8 \in B$ $\quad$ $A \ni 6 \to 4\bullet 6 = 24 \in B$ $\quad$ $A \ni 9 \to 4\bullet 9 = 36 \in B$

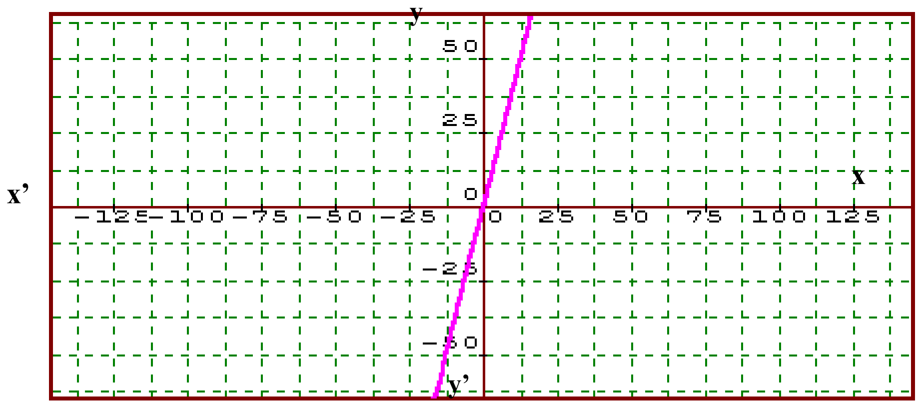
  $A \ni 4 \to 4\bullet 4 = 16 \in B$ $\quad$ $A \ni 8 \to 4\bullet 8 = 32 \in B$ $\quad$ $A \ni 12 \to 4\bullet 12 = 48 \in B$

Πίνακας τιμών συνάρτησης	x	2	4	6	8	9	12
	F(x)	8	16	24	32	36	48

Το σύνολο $f(A)=\{8,16,24,32,36,48\} \subseteq B$ είναι το πεδίο τιμών της συνάρτησης

- Σε σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων αν σχηματίσω τα σημεία (x, y) όπου $\chi \in A$ (τετμημένη του σημείου- οριζόντιος άξονας) και $y=f(x) \in f(A) \subseteq B$ (τεταγμένη του σημείου - κατακόρυφος άξονας). **Αυτό το σύνολο σημείων ονομάζεται γραφική παράσταση της συνάρτησης.**

  Η παρακάτω γραφική παράσταση έχει πεδίο ορισμού το R



Η σ υ ν ά ρ τ η σ η f(x) = αχ

1) Η γραφική της παράσταση y=αχ είναι μία ευθεία γραμμή που περνά από την αρχή των αξόνων Ο(0,0)

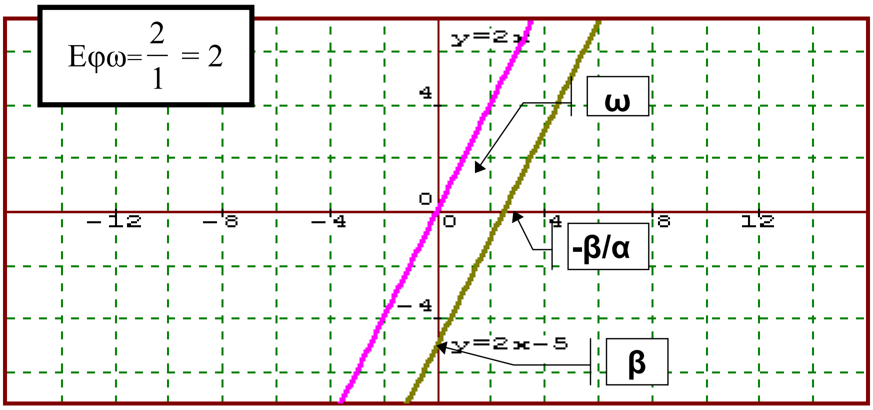
2) Για να χαραχθεί χρειαζόμαστε ένα ακόμη σημείο εκτός του Ο(0,0) (δύο σημεία ορίζουν μία ευθεία) .

3) Η ευθεία σχηματίζει με τον ημιάξονα Οχ' μία γωνία ω της οποίας η εφαπτόμενη ονομάζεται **κλίση της ευθείας**.

Παράδειγμα: f(x)=2χ, χ∈R δηλαδή πεδίο ορισμού το R

Πίνακας τιμών

<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td rowspan="2">Περνά από τα σημεία:
Ο(0,0) την αρχή των αξόνων
Α(1,2) που βρίσκω για για ένα τυχαίο χ =1</td></tr>
<tr><td>y</td><td>0</td><td>2</td></tr>
</table>



Η συνάρτηση f(x) = αχ + β

Η γραφική της παράσταση y=αχ+β είναι μία ευθεία γραμμή που **δεν περνά** από την αρχή των αξόνων Ο(0,0)

1) Για να χαραχθεί χρειαζόμαστε δύο σημεία (βρίσκω τα σημεία που τέμνει τους άξονες) .

Για χ=0 βρίσκω y = β, το σημείο τομής με τον άξονα yy' Α(0,β)

Για y=0, βρίσκω $χ = -\frac{β}{α}$, το σημείο τομής με τον άξονα xx' $Β(--\frac{β}{α},0)$

2) Η ευθεία σχηματίζει με τον ημιάξονα Οχ' μία γωνία ω της οποίας η εφαπτόμενη ονομάζεται κλίση της ευθείας και παρατηρώ ότι y=αχ+β είναι παράλληλη της y=αχ.

Παράδειγμα: f(x)=2χ-5, χ∈R δηλαδή πεδίο ορισμού το R

Βρίσκω τα σημεία Α(0, -5) και Β(5/2, 0)

Η ευθεία y = c είναι κάθετη στον yy' στο σημείο c . π.χ. y = 7

Η ευθεία x = c είναι κάθετη στον xx' στο σημείο c π.χ. x = -8

Η συνάρτηση $f(x)=\alpha\chi^2$, $\alpha\neq 0$

1) Το $\alpha\in R-\{0\}$ και το χ οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το R .

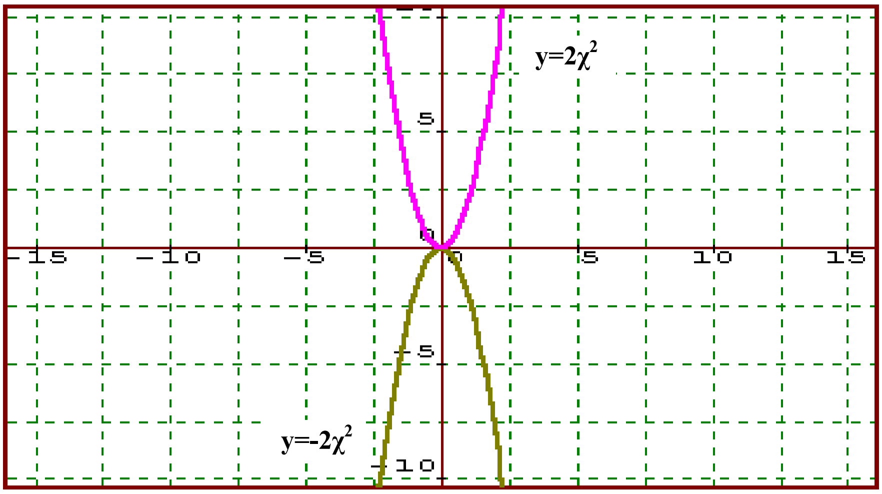
2) Η γραφική παράσταση της $y=\alpha\chi^2$ είναι μία καμπύλη γραμμή που ονομάζεται **παραβολή** έχει τον άξονα yy' (κατακόρυφο) άξονα συμμετρίας του σχήματος.

3) Παρατηρώ: $\chi^2 = (-\chi)^2 \Leftrightarrow \alpha\chi^2 = \alpha(-\chi)^2 \Leftrightarrow f(\chi)=f(-\chi)$ για όλα τα χ και γι' αυτό το λόγο η συνάρτηση λέγεται **άρτια**.

Περίπτωση Ι, α > 0	*Περίπτωση ΙΙ, α < 0*
1) Βρίσκεται στο 1° και 2° τεταρτημόριο. 2) Η παραβολή έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον άξονα χχ' το O(0,0). Κάθε άλλο σημείο της βρίσκεται από **πάνω** από τον οριζόντιο άξονα. 3) Πεδίο τιμών το $\mathbf{R^+=[0,+\infty)}$ 4) Η τιμή $f(0)=\alpha 0^2=0$ είναι η **ελαχίστη** τιμή της που επιτυγχάνεται για χ=0. Η παραβολή «ανοίγει» προς τα πάνω όσο το χ απομακρύνεται του μηδενός.	1) Βρίσκεται στο 3° και 4° τεταρτημόριο. 2) Η παραβολή έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον άξονα χχ' το O(0,0). Κάθε άλλο σημείο της βρίσκεται από **κάτω** από τον οριζόντιο άξονα. 3) Πεδίο τιμών το $\mathbf{R^-=(-\infty,0]}$ 4) Η τιμή $f(0)=\alpha 0^2=0$ είναι η **μεγίστη** τιμή της που επιτυγχάνεται για χ=0. Η παραβολή «ανοίγει» προς τα κάτω όσο το χ απομακρύνεται του μηδενός.

Παράδειγμα: $f(\chi) = 2\chi^2$ και $f(\chi) = -2\chi^2$

χ	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(\chi)=2\chi^2$	18	8	2	0	2	8	18
$f(\chi)=-2\chi^2$	-18	-8	-2	0	-2	-8	-18



Η συνάρτηση $f(x)=\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma,\ \alpha\neq 0$

Μελέτη και γραφική παράσταση.

1) Βρίσκω το σημείο $K\left(\frac{-\beta}{2\alpha}, f\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right)\right)$ στο σύστημα συντεταγμένων που είναι η κορυφή της παραβολής.

2) Η ευθεία $\chi=\frac{-\beta}{2\alpha}$ είναι ο άξονας συμμετρίας της παραβολής.

3) Τέμνει πάντα τον κατακόρυφο άξονα ψψ΄ πάντα στο σημείο Γ(0,γ).

4) Ι] Αν **α>0 (θετικό)** έχει το κοίλο μέρος προς τα πάνω.

- Όταν το χ μεταβάλλεται από το $-\infty$ προς το $\frac{-\beta}{2\alpha}$ οι τιμές f(χ) μικραίνουν
- Όταν το χ γίνει ίσο με $\frac{-\beta}{2\alpha}$ η τιμή $f(\chi)=f(\frac{-\beta}{2\alpha})$ είναι η ελαχίστη και
- Όταν το χ μεταβάλλεται από το $\frac{-\beta}{2\alpha}$ προς το $+\infty$ οι τιμές f(χ) μεγαλώνουν

ΙΙ] Αν **α<0 (αρνητικό)** έχει το κοίλο μέρος προς τα κάτω.

- Όταν το χ μεταβάλλεται από το $-\infty$ προς το $\frac{-\beta}{2\alpha}$ οι τιμές f(χ) μεγαλώνουν.
- Όταν το χ γίνει ίσο με $\frac{-\beta}{2\alpha}$ η τιμή $f(\chi)=f(\frac{-\beta}{2\alpha})$ είναι η μεγίστη και
- Όταν το χ μεταβάλλεται από το $\frac{-\beta}{2\alpha}$ προς το $+\infty$ οι τιμές f(χ) μικραίνουν

5) Βρίσκω την Διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$

- Αν $\boldsymbol{\Delta>0}$, δηλαδή η $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ εχει δύο ρίζες τις $\chi_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ τέμνει το άξονα χχ' στα σημεία $A(\chi_1,0)$ και $B(\chi_2,0)$. (Σχ. i)
- Αν **Δ=0** δηλαδή η $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ έχει μία διπλή ρίζα τη $\chi_o=\frac{-\beta}{2\alpha}$ η γραφική παράσταση εφάπτεται του άξονα χχ΄. .(Σχ. ii)
- Αν $\boldsymbol{\Delta<0}$ η γραφική παράσταση δεν τέμνει τον άξονα χχ΄. (Σχ. iii)

Ασκήσεις στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + 2$, $\alpha > 0$. Να βρείτε:

α) Τα σημεία τομής με τους άξονες χχ΄ και ψψ' της γραφικής παράστασης.

β) Το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τη γραφική παράσταση και τους άξονες.

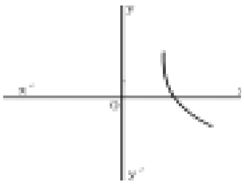
γ) Την τιμή του α, ώστε το εμβαδόν του τριγώνου να είναι 2 τετραγωνικές μονάδες.

2. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x^3 - x$, $g(x) = x^2 + 1$ και $h(x) = 3x - 2$ με τους άξονες χχ΄ και ψψ'.

3. Οι ευθείες $\varepsilon_{1:}$ $\psi = -3x - 4$ και $\varepsilon_{2:}$ $\psi = -3x + 4$ είναι παράλληλες και γιατί;

4. Το πεδίο ορισμού της $f(x) = \dfrac{2x+5}{x^2 - x}$ είναι το R -{-5}. Σ Λ

5. Η συνάρτηση του σχήματος δέχεται το μηδέν για τιμή.

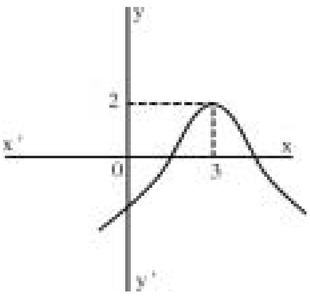


Σ Λ

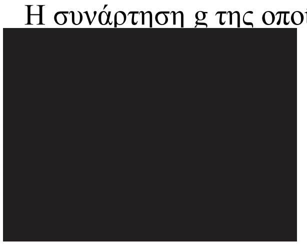
6. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2 - 4x + 7$ & $f(3x) = 9x^2 - 12x + 7$. κοινό σημείο το A(0,7) Σ Λ

7. Στο σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης που έχει μεγίστη τιμή το 3 που βρίσκω για χ= 2.

Σ Λ



8. Η συνάρτηση g της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα:



1. Ποια είναι η μορφή της και πως ονομάζεται.
2. Έχει μέγιστο ή ελάχιστο και ποιο;
3. Έχει άξονα συμμετρίας αν ναι ποιόν;

9. Η ευθεία ε: y = 7x + 4 με ποια από τις παρακάτω ευθείες είναι παράλληλη ;

Α. y = - 5x + 7 Β. $y=\frac{1}{3}x+4$ Γ. $y=\frac{5}{4}x+3$ Δ. $y=-\frac{1}{5}x+7$ Ε. y = 7x -4

10. Ο παρακάτω πίνακας τιμών σε ποια συνάρτηση αντιστοιχεί:

x	-1	-2	2	3	-2
ψ	2	4	-1	-6	4

Α. $y=x^2+3$ Β. y = 2x - 3 Γ. y = 2x Δ. y = x – 1 Ε. y = - x - 3

11. Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις έχουν Μεγίστη τιμή και ποιες ελαχίστη

Α. $y=x^2$ Β. $y=-\frac{1}{2}x^2$ Γ. $y=-2x^2$ Δ. $y=\frac{1}{3}x^2$ Ε. y= 0,4 x^2

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-(x-3)^2(x+3)$ και η γραφική της παράσταση.

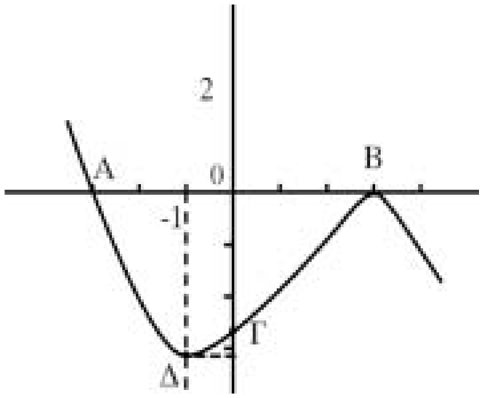
Να συμπληρώσετε τις συντεταγμένες που λείπουν των σημείων.

Α (..., 0)

Β (..., 0)

Γ (0, ...)

Δ (-1, ...)

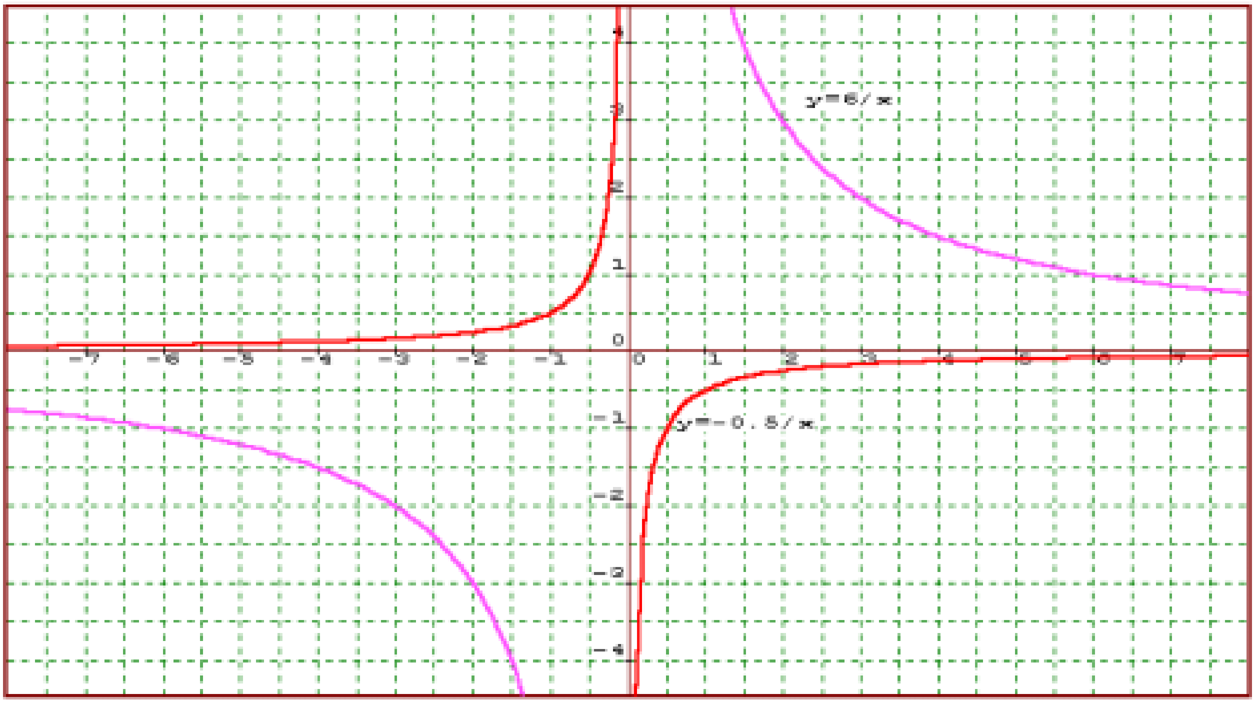


ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $y = \frac{6}{x}$, $x \neq 0$.

Πίνακας τιμών με 5 θετικά και 5 αρνητικά ορίσματα και να υπολογιστούν οι αντί-στοιχες τιμές:

x											
y											



Τα σημεία σχηματίζουν καμπύλη με δύο κλάδους που ονομάζουμε **υπερβολή**.