ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
Συνοπτική θεωρία - Ασκήσεις

Γραμμική εξίσωση

- Μια εξίσωση με μορφή **αχ + βy = γ ,** όπου χ και y άγνωστοι και α, β, γ σταθεροί, λέγεται γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους. Η γραφική παράσταση της εξίσωσης αχ+βy=γ με α≠0 ή β≠0 είναι ευθεία γραμμή.
- Το συστήματα δύο γραμμικών εξισώσεων έχει τη γενική μορφή: $\left|\begin{array}{l} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_2 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{array}\right.$

Για την λύση του υπάρχουν τρεις τρόποι (μέθοδοι):

α) Αντικατάστασης, β) Αντίθετων συντελεστών, γ)Και η μέθοδος γραφικής επίλυσης που δεν ενδείκνυται.

Οι γραφικές παραστάσεις των δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο άγνωστους, παριστάνεται στο Καρτεσιανό επίπεδο με δύο ευθείες, οι οποίες μπορεί να:

1. Τέμνονται και το σύστημα θα έχει μία λύση που είναι οι συντεταγμένες του σημείου τομής.
2. Να είναι παράλληλες άρα να μην τέμνονται, καμία λύση - **Αδύνατο**
3. Να ταυτίζονται, άπειρα κοινά σημεία - **Αόριστο**

Στη γραφική επίλυση συστήματος πρέπει να βρούμε τις συντεταγμένες του σημείου τομής με απόλυτη ακρίβεια.

<u>Παρατηρήσεις:</u>

1. *Το* $\left|\begin{array}{l} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6v = \end{array}\right.$ *σύστημα είναι αόριστο γιατί* $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{5}{10}$

2. *Το* $\left|\begin{array}{l} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 7 \end{array}\right.$ *σύστημα είναι αδύνατο γιατί* $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} \neq \frac{5}{7}$

3. *Το* $\left|\begin{array}{l} x + y = 3 \\ x - v = 1 \end{array}\right.$ *σύστημα έχει μία λύση γιατί* $\frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1}$

<u>Μέθοδος της αντικατάστασης</u>

Την προτιμάμε στα συστήματα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους.

- **Βήμα 1.** Λύνουμε ως προς έναν άγνωστο τη μια από τις δύο εξισώσεις του συστήματος .
- **Βήμα 2.** Αντικαθιστούμε την παράσταση που βρήκαμε στην άλλη εξίσωση του συστήματος, οπότε προκύπτει μια εξίσωση ενός άγνωστου, που μπορούμε να λύσουμε.
- **Βήμα 3.** Τη λύση που βρήκαμε την αντικαθιστούμε στην αρχική εξίσωση του βήματος 1, οπότε βρίσκουμε και τον δεύτερο άγνωστο.

Παρατήρηση: *Η μέθοδος της αντικατάστασης μπορεί να εφαρμοστεί και σε συστήματα που δεν είναι γραμμικά*

Π.χ. $x + y = 3$

$x - y = 1$

1. Λύνω την πρώτη ως προς x: $x = 3 - y$
2. Αντικαθιστώ στη 2η που γίνεται: $(3- y) - y =1 \Leftrightarrow 3 - 2y= 1$
   $\Leftrightarrow -2y = 1 - 3$ $-2y = -2 \Leftrightarrow y = 1$
3. Από την πρώτη $x = 3 - 1 = 2$
   Η λύση είναι τι ζεύγος (x, y) = (2, 3)

<u>Μέθοδος των αντίθετων συντελεστών</u>

- **Βήμα 1.** Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της μιας ή και των δύο εξισώσεων με κατάλληλο αριθμό ώστε οι συντελεστές ενός εκ των αγνώστων να γίνουν αντίθετοι αριθμοί. (η μετά τον πολ/μό εξίσωση θα είναι ισοδύναμη της αρχικής)
- **Βήμα 2.** Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις, οπότε προκύπτει εξίσωση με ένα μόνο άγνωστο την οποία και λύνουμε.
- **Βήμα 3.** Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε σε μια από τις αρχικές εξισώσεις του συστήματος, οπότε βρίσκουμε και τον άλλο άγνωστο.

$$\left| \begin{array}{l} x - 2y = -3 \\ 3x + 5y = 13 \end{array} \right.$$

1. Πολ/ζω την 1η με -3 και γίνεται: $-3x +6y = 9$
2. Το άθροισμα με την 2η είναι $0x + 11y = 22 \Leftrightarrow y = \frac{22}{11} = 2$
3. Από την πρώτη $x -4 = -3 \Leftrightarrow x = 4 - 3 =1$

Η λύση είναι τι ζεύγος (x, y) = (1, 2)

<u>Α σ κ ή σ ε ι ς</u>

1. Δίνεται η εξίσωση $x +2y = 7$.
   α) Να δείξετε ότι το ζεύγος (-1, 4) είναι λύση αυτής της εξίσωσης.
   β) Για $x = 5$ να βρείτε y ώστε το ζεύγος (5, y) να είναι λύση της εξίσωσης.
   γ) Να γίνει η γραφική παράσταση της εξίσωσης $2y + x = 7$.

2. Στην εξίσωση $5x+y=6$. Να Αποδείξτε ότι το ζεύγος $(x = \kappa, y = 6 - 5\kappa)$, $\kappa \in R$ επαληθεύει την εξίσωση.

3. Δίνεται η εξίσωση ε: 8x+2y=7. Να γραφεί μία εξίσωση ευθείας που να είναι:
α)ταυτίσιμη δηλαδή το σύστημα αόριστο β)τέμνουσα - μία λύση γ) Παράλληλη – αόριστο

4. Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x - 2 = 0 \\ 2x - 3y + 7 = 0 \end{cases}$ β) $\begin{cases} -3x - 7y + 13 = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 4 \end{cases}$

δ) $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 0 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{7} = 0 \end{cases}$ ε) $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 7x + 5y = 12 \end{cases}$ στ) $\begin{cases} \frac{x}{y} = 6 \\ \frac{x}{6} = 5 \end{cases}$ ζ) $\begin{cases} \frac{x}{y} = 16 \\ x + y = 51 \end{cases}$

5. Να λυθούν τα συστήματα: *(Προτείνεται η μέθοδος των αντιθέτων)*

α) $\begin{cases} 3x - 4y = 17 \\ -3x + 8y = 37 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 5x - 7y - 47 = 0 \\ 2x + 7y - 16 = 0 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 0,5x + 0,2y = 16 \\ 1,5x + 0,5y = 23 \end{cases}$

δ) $\begin{cases} 5x - y = 13 \\ -2x + 3y = 28 \end{cases}$ ε) $\begin{cases} 7x - 4y = 102 \\ 5x + 4y = 42 \end{cases}$ στ) $\begin{cases} \frac{3x}{4} - \frac{5x}{3} = 0 \\ \frac{x}{10} - \frac{y}{15} = \frac{1}{6} \end{cases}$

6. Να γίνουν πράξεις απλοποίησης και να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} 3(x - 4) + 2(y + 2) = -9 \\ (x - 5) - 4(y - 3) = 26 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \frac{x-3}{14} = \frac{y-0,5}{5} \\ 3(x - 3) - 8(y - 0,5) = 1 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} \frac{1}{6}(5x - 1) + 0,1(4y - 5x) = \frac{1}{4}(3y - 8x) - \frac{1}{3}(0,29) \\ \frac{1}{2}(y - 1) + \frac{1}{5}(3 - 2y) - \frac{1}{11}(x - 8) = 1,38 \end{cases}$

δ) $\begin{cases} \frac{2x}{3} - 4 + \frac{y}{2} + x = 8 - \frac{3y}{4} + \frac{1}{12} \\ \frac{y}{6} - \frac{x}{2} + 2 = \frac{1}{6} - 2x + 6 \end{cases}$

7. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των αναλογιών:

α) $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{8}{5} \\ 2x + 3y = -9,3 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \frac{x}{7} = \frac{y}{5} \\ x + y = 24 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} \frac{x}{8} = \frac{y}{3} \\ x - y = 20 \end{cases}$

8. **Α.** Να βρεθούν τα α και β ώστε η εξίσωση αx+βy=9 να έχει τα ζεύγη (1,1) και (- 1, 5) λύσεις.

Β. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία: $A(0, 0)$, $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$.

9. Να λυθεί η εξίσωση: $|x - 3y + 1| + |2x + y - 5| = 0$

10. Δείξτε ότι για τα συστήματα, αν το πρώτο έχει άπειρες λύσεις, τότε το δεύτερο είναι αδύνατο:

$$\Sigma_1: \begin{cases} (\alpha + 1)\,x - \beta y = 1 \\ x + y = -1 \end{cases} \qquad \Sigma_2: \begin{cases} x + (\beta + 2)\,y = \alpha^2 + 1 \\ x - (\alpha - 1)\,y = \beta^3 \end{cases}$$