ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Θετικής - Τεχνολογικής κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου

2ο Επαναληπτικό Διαγώνισμα :

(Μιγαδικοί αριθμοί- Όριο –Συνέχεια συνάρτησης- Διαφορικός Λογισμός)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι:

(i) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ **(Μονάδες 5)**

(ii) Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x,\ \alpha > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x) = \alpha^x \ell n\alpha$ **(Μονάδες 5)**

Α2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της ; **(Μονάδες 5)**

Α3. *Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις με **Σωστό** (Σ), αν είναι σωστή, ή με **Λάθος** (Λ), αν είναι λανθασμένη:*

α) Αν $z_1,\ z_2$ είναι μιγαδικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $z_1^2 + z_2^2 = 0$, τότε ισχύει πάντοτε $z_1 = z_2 = 0$ **Σ Λ**

β) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, τότε πάντοτε $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ **Σ Λ**

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $f'(x_0) = 0$, τότε το $f(x_0)$ είναι ακρότατο της f . **Σ Λ**

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο R , τότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες **Σ Λ**

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο R και κυρτή, τότε $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in R$ **Σ Λ**

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Έστω συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο διάστημα $[1,2]$ με $f(1)=-1$ και $f(2)=1$. Δίνονται επίσης οι μιγαδικοί αριθμοί $z=\kappa+\lambda i,\ \kappa,\lambda\in R$, οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση $|z-2i|=|z|$.

Β1. Να αποδείξετε ότι:

α) Το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα [-1,1]. **(Μονάδες 4)**

β) $\mathrm{Im}(z)=1$. **(Μονάδες 5)**

γ) Υπάρχει ακριβώς μια τιμή του $\mathrm{Re}(z)$ τέτοια, ώστε ο αριθμός $w=z^2-\frac{1}{z}$ να είναι πραγματικός. **(Μονάδες 7)**

Β2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(\kappa)=f\left(|z|^2\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της φ. **(Μονάδες 4)**

β) Να αποδείξετε ότι αν $\mathrm{Re}(z)\in[0,1]$ τότε $-1\le\varphi(\kappa)\le 1$. **(Μονάδες 5)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|\ell nx|$, $x>0$.

Γ1. Να κάνετε τη γραφική παράσταση (C_f) της f και να βρείτε την παράγωγό της.

(Μονάδες 6)

Γ2. Αν $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία y=α, α>0, αποδείξτε ότι $x_1\cdot x_2=1$.

(Μονάδες 5)

Γ3. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων (ε_A), (ε_B) της C_f στα $A(e^{\alpha},\alpha)$ και $B(e^{-\alpha},\alpha)$ αντιστοίχως και να αποδείξετε ότι είναι κάθετες μεταξύ τους για κάθε α>0.

(Μονάδες 6)

Γ4. Έστω Μ και Ν τα σημεία τομής της ευθείας (ε_B) με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. Αποδείξτε ότι όταν το εμβαδόν του τριγώνου ΟΜΝ, γίνεται μέγιστο , η ευθεία (ε_A) διέρχεται από το Ο. (Ο η αρχή των αξόνων).

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty) \to R$ για την οποία ισχύει:

$$xf'(x)=x+f(x) \quad \text{για κάθε} \quad x>0 \qquad \text{και} \quad f(1)=1.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) = x\ln x+x$, $x>0$ **(Μονάδες 4)**

β) $f(0) = 0$

(Μονάδες 3)

γ) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

(Μονάδες 2)

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 6)

Δ3. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή και ότι δεν υπάρχουν τρία συνευθειακά σημεία στη γραφική της παράσταση.

(Μονάδες 6)

Δ4. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ για τον οποίο ισχύει $f(x)+\kappa \geq 1+\kappa x$.

(Μονάδες 4)

Καλή επιτυχία