ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κωνσταντόπουλος Κων/νος
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

3ο Επαναληπτικό Διαγώνισμα: (Σε όλη την ύλη)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ -ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΤΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Βλέπε σχολικό βιβλίο «Μαθηματικά θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης», σελίδα 251

Α2. Βλέπε σχολικό βιβλίο «Μαθηματικά θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης», σελίδα 151.

Α3. 1) Σωστό 2) Λάθος 3) Σωστό 4) Σωστό 5) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1.

α. Είναι $z_1^2=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=\frac{1}{4}-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$

Άρα

$$1+z_1+z_1^2=1-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=0$$

β. Προφανώς είναι $z_1\neq 1$. Επομένως

$$1+z_1+z_1^2=0\Leftrightarrow\ z_1-1\ \ 1+z_1+z_1^2\ =\ z_1-1\ \cdot 0\Leftrightarrow z_1^3-1=0\Leftrightarrow z_1^3=1.$$

γ. Έχουμε

$$z_2^{2\nu+1}=-z_1^{\nu+2}\ \Leftrightarrow\ 1+z_1\ ^{2\nu+1}=-z_1^{\nu+2}$$

$$\Leftrightarrow\ -z_1^2\ ^{2\nu+1}=-z_1^{\nu+2}$$

$$\Leftrightarrow z_1^{4\nu+2}=z_1^{\nu+2}$$

$$\Leftrightarrow z_1^{3\nu}=1$$

$$\Leftrightarrow\ z_1^3\ ^{\nu}=1$$

που ισχύει.

Ομοίως

$$z_2^{2\nu} = z_1^{\nu} \Leftrightarrow 1 + z_1^{\ 2\nu} = z_1^{\nu}$$
$$\Leftrightarrow -z_1^{2\ 2\nu} = z_1^{\nu}$$
$$\Leftrightarrow z_1^{4\nu} = z_1^{\nu}$$
$$\Leftrightarrow z_1^{3\nu} = 1$$
$$\Leftrightarrow z_1^{3\ \nu} = 1$$

που ισχύει

Β2. Λόγω της δεύτερης σχέσης του ερωτήματος (Β1 (γ))

έχουμε: $z_2^{36} = z_2^{2\cdot 18} = z_1^{18} = z_1^{3\ 6} = 1^6 = 1 + 0i$. Άρα α =1 και β = 0.

Λόγω της πρώτης σχέσης του ερωτήματος (Β1 (γ)) έχουμε:

$$z_2^{19} = z_2^{2\cdot 9+1} = -z_1^{9+2} = -z_1^2 \cdot z_1^9 = -z_1^2 \cdot z_1^{3\ 3} =$$
$$= -z_1^2 \cdot 1 = -z_1^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$$

Άρα $\gamma = \frac{1}{2}$ και $\delta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη , τότε και η $f(x) - e^{-f(x)}$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση και άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων.
Έχουμε

$$\left(f(x) - e^{-f(x)}\right)' = (x-1)'$$
$$f'(x) + f'(x)e^{-f(x)} = 1 \Leftrightarrow f'(x)\left(1 + e^{-f(x)}\right) = 1$$

Άρα $f'(x) = \dfrac{e^{f(x)}}{1 + e^{f(x)}}$, $x \in R$ (1)

Γ2. **Α**πό τη σχέση (1) προκύπτει ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in R$ και, αφού η f είναι συνεχής για κάθε $x \in R$, έπεται ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Από την υπόθεση έχουμε ότι $f(0)=0$, δηλαδή η $x=0$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ και είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1-1.

Εφ' όσον η f είναι γνησίως αύξουσα στο R και έχει μοναδική ρίζα την $x=0$, έπεται ότι :

για $x<0 \Rightarrow f(x)<f(0)=0$ και

για $x>0 \Rightarrow f(x)>f(0)=0$.

Συνεπώς για το πρόσημο της συνάρτησης f ισχύει :

$$f(x)<0\ ,\quad x\in(-\infty,0)$$
$$f(0)=0$$
$$f(x)>0\ ,\quad x\in(0,+\infty)$$

Γ3. Επειδή η $f'(x)=\dfrac{e^{f(x)}}{1+e^{f(x)}}$, $x\in R$ είναι παραγωγίσιμη έχουμε

$$f''(x)=\frac{f'(x)e^{f(x)}}{\left(1+e^{f(x)}\right)^2}>0\ ,\ \text{για καθε } x\in R\ .$$

Άρα η f είναι κυρτή στο R.

Γ4.

- Θα αποδείξουμε ότι : $\frac{1}{2}x<f(x)<xf'(x)$, για κάθε $x>0$.

Για τη συνάρτηση f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ του διαφορικού λογισμού στο διάστημα $[0,x]$ αφού είναι :

- συνεχής στο $[0,x]$.
- παραγωγίσιμη στο $(0,x)$

Επομένως θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,x)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}\quad ,\quad (2).$$

Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο R, (αφού η f είναι κυρτή) τότε

για $0<\xi<x \Rightarrow f'(0)<f'(\xi)<f'(x)\overset{(2)}{\Rightarrow}\frac{1}{2}<\frac{f(x)}{x}<f'(x)\Rightarrow\frac{1}{2}x<f(x)<xf'(x)\ ,\ x>0.$

- Θα αποδείξουμε ότι : $xf'(x)<x$, για $x>0$. Πράγματι , από τη σχέση (1) έχουμε προφανώς ότι $f'(x)<1\overset{x>0}{\Leftrightarrow}xf'(x)<x.$

Γ5. Από το (Γ4) ερώτημα έχουμε ότι :

$$\frac{x}{2}<f(x)<x\ ,\quad x>0\quad (3),$$

και εφ' όσον $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, τότε από τη σχέση (3) λόγω του κριτηρίου παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-f(x)}=0$, (4).

Έχουμε :

$$f(x)-e^{-f(x)}=x-1\Leftrightarrow f(x)-(x-1)=e^{-f(x)},$$

και λόγω της (4), προκύπτει ότι : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=0$,

άρα η ευθεία $y=x-1$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, όταν $x\to+\infty$.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Η συνάρτηση $\dfrac{t+1}{t\left(e^{f(t)}+1\right)}$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, το $1\in(0,+\infty)$, άρα η συνάρτηση

$f(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{t+1}{t\left(e^{f(t)}+1\right)}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\dfrac{x+1}{x(e^{f(x)}+1)}$.

Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$f'(x)=\dfrac{x+1}{x(e^{f(x)}+1)}\Leftrightarrow xe^{f(x)}f'(x)+xf'(x)=x+1\Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x)+f'(x)=1+\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(e^{f(x)}+f(x)\right)'=\left(x+\ln x\right)'\Leftrightarrow e^{f(x)}+f(x)=x+\ln x+c.$

Για $x=1$ έχουμε $e^{f(1)}+f(1)=1+\ln1+c\Leftrightarrow e^0+0=1+0+c\Leftrightarrow c=0.$

Άρα για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε $e^{f(x)}+f(x)=x+\ln x$.

Δ2. Για κάθε $x\in R$ είναι $\varphi'(x)=e^x+1>0$, οπότε η συνεχής συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα στο R, άρα είναι και «$1-1$».

Δ3. Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$e^{f(x)}+f(x)=x+\ln x\Leftrightarrow e^{f(x)}+f(x)=e^{\ln x}+\ln x\quad(1).$$

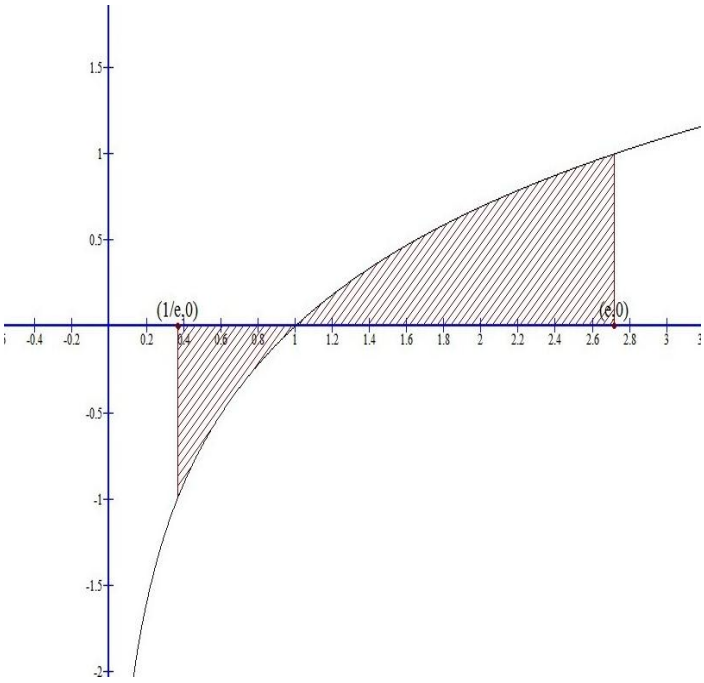
Από (1) ισοδύναμα έχουμε $\varphi(f(x))=\varphi(\ln x)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}f(x)=\ln x$, $x\in(0,+\infty)$.

Δ4. α) Για $\frac{1}{e} \le x \le 1$ είναι $\ln x < 0$ και για $1 \le x \le e$ $\ln x > 0$. Άρα

$$E = \int_{\frac{1}{e}}^{e} |f(x)|\, dx = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\, dx + \int_{1}^{e} f(x)\, dx = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} \ln x\, dx + \int_{1}^{e} \ln x\, dx =$$

$$= -\int_{\frac{1}{e}}^{1} x' \ln x\, dx + \int_{1}^{e} x' \ln x\, dx = \left[-x\ln x\right]_{\frac{1}{e}}^{1} + \int_{\frac{1}{e}}^{1} 1\, dx + \left[x \ln x\right]_{1}^{e} - \int_{1}^{e} 1\, dx =$$

$$= \frac{1}{e}\ln\frac{1}{e} + \left[x\right]_{\frac{1}{e}}^{1} + e\ln e - \left[x\right]_{1}^{e} = -\frac{1}{e} + 1 - \frac{1}{e} + e - e + 1 = \left(2 - \frac{2}{e}\right)\tau\mu$$



β) Για να ορίζεται το κλάσμα $\frac{x}{\ln x}$, πρέπει $x > 0$ *και* $\ln x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne 1$ **(2)**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(t) = \frac{1}{\ln t}$ η οποία είναι συνεχής και έχει πεδίο ορισμού το $D_k = (0,1) \cup (1,+\infty)$. Για να ορίζεται η συνάρτηση $\int_e^x \frac{1}{\ln t}\, dt$ πρέπει τα άκρα του ολοκληρώματος να ανήκουν στο ίδιο διάστημα του D_k και αφού $e \in (1,+\infty)$ έπεται ότι και $x \in (1,+\infty)$ **(3)**

Από **(2)** και **(3)** προκύπτει ότι $D_G = (1,+\infty)$.

Η G είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγισίμων συναρτήσεων του πηλίκου $\frac{x}{\ln x}$ και της $\int_e^x \frac{1}{\ln t}\, dt$ η οποία είναι παραγωγίσιμη ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης $k(t) = \frac{1}{\ln t}$.

Παραγωγίζοντας τη G προκύπτει $G'(x)=\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}-\frac{1}{\ln x}=\frac{\ln x-1-\ln x}{\ln^2 x}=\frac{-1}{\ln^2 x}<0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$ και αφού η G είναι συνεχής θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$.

Επομένως :

$$e<e^2 \overset{G\ \gamma\nu.\phi\theta.}{\Rightarrow} G(e)>G(e^2)\Rightarrow \frac{e}{\ln e}>\frac{e^2}{\ln e^2}-\int_e^{e^2}\frac{1}{\ln t}\,dt\Rightarrow \frac{e}{1}>\frac{e^2}{2}-\int_e^{e^2}\frac{1}{\ln t}\,dt\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_e^{e^2}\frac{1}{\ln t}\,dt>\frac{e^2}{2}-e.$$