ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Θετικής - Τεχνολογικής κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου

4ο Επαναληπτικό Διαγώνισμα: (Σε όλη την ύλη)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αποδείξτε ότι αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

(Μονάδες 10)

Α2. Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση της f στο Δ ;

(Μονάδες 5)

Α3. *Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις με **Σωστό (Σ)**, αν είναι σωστή, ή με **Λάθος (Λ)**, αν είναι λανθασμένη:*

1) Αν $z=a+\beta i$, $a,\beta\in R^*$, τότε $\frac{1}{z}=\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}i$. **Σ , Λ**

2) Η εξίσωση $|z-z_1|=|z-z_2|$ με άγνωστο τον $z\in C$ και $z_1,z_2\in C$ έχει μόνο μια λύση.

Σ , Λ

3) Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [α,β]. Αν $f(\alpha)f(\beta)>0$, η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει ρίζα στο διάστημα (α,β).

Σ , Λ

4) Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και δεν είναι 1-1, τότε υπάρχει $x_0\in\Delta$ στο οποίο η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια εφαπτομένη.

Σ , Λ

5) Για κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής στο διάστημα [α , β] , το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα x′x και τις ευθείες x=α και x=β είναι $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$

Σ , Λ

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1 , z_2 για τους οποίους ισχύουν:

$|z_2| = 1$, $|z_1 - z_2| = |z_1|$ και $z_2 = z_1\ 1-2\lambda i$, όπου λ πραγματικός αριθμός διάφορος του μηδενός.

Β1. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}) = \frac{1}{2}$ **(Μονάδες 5)**

Β2. Να αποδείξετε ότι $|z_1| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **(Μονάδες 5)**

Β3. Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό λ. **(Μονάδες 5)**

Β4. Αν A και B είναι οι εικόνες των z_1 και z_2 αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο στο Α και ισοσκελές . (Ο η αρχή των αξόνων).

(Μονάδες 5)

Β5. Να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού αριθμού w, για τον οποίο ισχύει $iw = \frac{z_2 + i}{z_2}$, κινείται στο μιγαδικό επίπεδο σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. **(Μονάδες 5)**

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x+2)-5}{x-1} = 6$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(3)=5$ και **β)** $f'(3)=6$ **(Μονάδες 6)**

Γ2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+2 - f(x)}{\eta\mu(x-3)}$ **(Μονάδες 7)**

Γ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = xf(x)-3x-7\sigma\upsilon\nu x$, $x \in R$, τέμνει τον άξονα $x'x$ τουλάχιστον σε ένα σημείο. **(Μονάδες 5)**

Γ4. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $g: R \to R$, για την οποία ισχύει $g'(x) \le f'(3)$, για κάθε $x \in R$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $g(x) = x^6$, έχει το πολύ μία ρίζα μεγαλύτερη του 1. **(Μονάδες 7)**

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$, για την οποία ισχύουν:

$$f(0) =1 \quad \text{και} \quad \int_0^x \left(\int_0^u f(t)\, dt \right) du = x \int_0^x f(t)\, dt + \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2} \ , \ x,u,t \in R.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in R$. **(Μονάδες 7)**

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία , τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της. **(Μονάδες 5)**

Δ3. Να αποδείξετε ότι ισχύει $\int_0^x e^{-t^2} dt \ \ge \ x \cdot e^{-x^2}$, για κάθε $x \ \ge 0$. **(Μονάδες 4)**

Δ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x f(x-t)dt - x}{x^3}$ **(Μονάδες 4)**

Δ5. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,k)$ $k>0$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\int_0^k e^{-t^2} dt = k \cdot e^{-\xi^2}$$ **(Μονάδες 5)**