ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
5^{ο} ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ -ΘΕΜΑΤΑ (Σε όλη την ύλη)

ΘΕΜΑ Α

1. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αποδείξτε ότι αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β). **Μονάδες 10**

2. Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση της f στο Δ; **Μονάδες 5**

3. *Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις με **Σωστό(Σ)**, αν είναι σωστή, ή με **Λάθος(Λ)**, αν είναι λανθασμένη:*

1) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to x_0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

2) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε η f' είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

3) Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [α,β]. Αν $f(\alpha)f(\beta)>0$, η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει ρίζα στο διάστημα (α,β).

4) Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και δεν είναι 1-1, τότε υπάρχει $x_0\in\Delta$ στο οποίο η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια εφαπτομένη.

5) Για κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής στο διάστημα [α,β], το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ είναι $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο 0 με $f'(0)=1$ και για κάθε $x,y\in R$ ισχύει:
$f(x+y)=\dfrac{f(x)}{e^y}+\dfrac{f(y)}{e^x}$.

1. Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0\in R$, με $f'(x_0)=\dfrac{1}{e^{x_0}}-f(x_0)$.

Μονάδες 8

2. Αποδείξτε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$. **Μονάδες 4**

3. Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **Μονάδες 6**

4. Αν Ε είναι το εμβαδόν της C_f, του άξονα x΄x και των ευθειών x=2 & x=3, αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{3}{e^3} < E < \frac{2}{e^2}$. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x+2)-5}{x-1}=6$

1. Να αποδείξετε ότι: α) $f(3)=5$ και β) $f'(3)=6$ **Μονάδες 6**

2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+2-f(x)}{\eta\mu(x-3)}$. **Μονάδες 7**

3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=xf(x)-3x-7\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\mathbb{R}$ τέμνει τον άξονα $x'x$ τουλάχιστον σε ένα σημείο. **Μονάδες 5**

4. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$g'(x)\le f'(3)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $g(x)=x^6$, έχει το πολύ μία ρίζα μεγαλύτερη του 1. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ Δ΄

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάστηση $f:R\to R$ έτσι ώστε $f^3(x)+f(x)=2x$.

α). Να βρείτε το πρόσημο της f . **Μονάδες 3**

β). Βρείτε τις ρίζες και τη μονοτονία της f . **Μονάδες 3**

γ). Αποδείξτε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και εξετάστε την ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. **Μονάδες 5**

δ). Αποδείξτε ότι για κάθε x>0 ισχύει: $xf'(x)<f(x)<2x$. **Μονάδες 6**

ε). Βρείτε την αντίστροφη της f . **Μονάδες 3**

στ). Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=0 και x=5. **Μονάδες 5**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ