ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΒΙΒΛΙΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ	**Δημήτριος Αργυράκης,** *Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Β/θμιας Εκπαίδευσης* **Παναγιώτης Βουργάνας**, *Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Β/θμιας Εκπαίδευσης* **Κωνσταντίνος Μεντής**, *Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Β/θμιας Εκπαίδευσης* **Σταματούλα Τσικοπούλου**, *Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Β/θμιας Εκπαίδευσης* **Μιχαήλ Χρυσοβέργης,** *Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών*
ΚΡΙΤΕΣ - ΑΞΙΟΛΟΓΗΤΕΣ	**Εμμανουήλ Μανατάκης,** *Επίκουρος καθηγητής Πολυτεχνικής Σχολής Πανεπιστημίου Πατρών* **Μιχαήλ Σαλίχος**, *Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών* **Νικόλαος Παπαευστρατίου**, *Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Β/θμιας Εκπαίδευσης*
ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ	**Νικόλαος Μαρουλάκης**, *Σκιτσογράφος - Εικονογράφος*
ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ	**Ευγενία Βελάγκου**, *Φιλόλογος*
ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΥΠΟΕΡΓΟΥ ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΥΓΓΡΑΦΗ	**Δημήτριος Κοντογιάννης**, *Σύμβουλος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου*
ΕΞΩΦΥΛΛΟ	**Παναγιώτης Γράββαλος**, *Ζωγράφος*
ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ	ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ

Γ΄ Κ.Π.Σ. / **ΕΠΕΑΕΚ ΙΙ** / **Ενέργεια 2.2.1.** / Κατηγορία Πράξεων 2.2.1.α:
«Αναμόρφωση των προγραμμάτων σπουδών και συγγραφή νέων εκπαιδευτικών πακέτων»

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
Δημήτριος Γ. Βλάχος
Ομότιμος Καθηγητής του Α.Π.Θ.,
Πρόεδρος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή νέων βιβλίων και παραγωγή υποστηρικτικού εκπαιδευτικού υλικού με βάση το ΔΕΠΠΣ και τα ΑΠΣ για το Γυμνάσιο»

Επιστημονικός Υπεύθυνος Έργου
Αντώνιος Σ. Μπομπέτσης
Σύμβουλος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

Αναπληρωτές Επιστημονικοί Υπεύθυνοι Έργου
Γεώργιος Κ. Παληός
Σύμβουλος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου
Ιγνάτιος Ε. Χατζηευστρατίου
Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

Έργο συγχρηματοδοτούμενο 75% από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο και 25% από εθνικούς πόρους.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Δημήτριος Αργυράκης
Παναγιώτης Βουργάνας
Κωνσταντίνος Μεντής
Σταματούλα Τσικοπούλου
Μιχαήλ Χρυσοβέργης

ΑΝΑΔΟΧΟΣ ΣΥΓΓΡΑΦΗΣ
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ′ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΒΙΒΛΙΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Αγαπητοί συνάδελφοι,

Βασικός σκοπός του βιβλίου αυτού είναι η υποστήριξη του έργου του διδάσκοντος, καθώς παρέχει μια πρώτη οργάνωση των διδακτικών ωρών που απαιτούνται για τη διδασκαλία κάθε ενότητας, σημειώνει τους κύριους και δευτερεύοντες διδακτικούς στόχους της, υπογραμμίζει τις βασικές έννοιες που πρέπει να διδαχθούν σ' αυτή και προτείνει ενδεικτικές οδηγίες διδασκαλίας. Το πλήθος των διδακτικών ωρών που απαιτούνται για τη διδασκαλία κάθε ενότητας, είναι αυτό που ορίζει το αναλυτικό πρόγραμμα του Π.Ι.

Καταβλήθηκε συστηματική προσπάθεια για την εισαγωγή συγκεκριμένων μεθόδων αξιολόγησης του μαθητή και της διδασκαλίας (κριτήρια αξιολόγησης), σε μεγάλη συχνότητα και με συγκροτημένη μορφή, εναλλακτικές προτάσεις διδασκαλίας με τη βοήθεια Η/Υ (διερευνητικές προσεγγίσεις) δραστηριότητες από την ιστορία των Μαθηματικών και διαθεματικά σχέδια εργασίας.

Είναι ευνόητο, ότι ο διδάσκων έχει την ευχέρεια να τροποποιήσει και να βελτιώσει τις προτάσεις αυτές κατά την κρίση του, ανάλογα με τις ώρες διδασκαλίας που έχει στη διάθεσή του τη συγκεκριμένη χρονιά, τη διδακτέα ύλη και κυρίως το επίπεδο των μαθητών της τάξης του.

Οι ώρες διδασκαλίας είναι ενδεικτικές. Ο διδάσκων έχει τη δυνατότητα να τις αναπροσαρμόζει, έτσι ώστε να ολοκληρώνεται η διδακτέα ύλη στις προβλεπόμενες ώρες.

Η πρόθεσή μας δεν είναι να περιορίσουμε την ελευθερία και την παιδαγωγική αυτονομία του εκπαιδευτικού, αλλά να του προσφέρουμε ιδέες που θα τον βοηθήσουν να αυξήσει τα όρια της πρωτοβουλίας του, παρέχοντάς του συγχρόνως τη δυνατότητα να αντλήσει υλικό από το σχολικό βιβλίο.

Οι συγγραφείς

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ: Η δομή του βιβλίου του μαθητή

Το βιβλίο του μαθητή γράφτηκε ώστε να είναι σύμφωνο με το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά της Γ′ Γυμνασίου, που εκπόνησε το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. Σύμφωνο όχι μόνο με το περιεχόμενο και τη διάταξη της ύλης, αλλά κυρίως με το πνεύμα αυτού του προγράμματος, όπως αυτό διαχέεται στους κύριους και εξειδικευμένους στόχους, τις προδιαγραφές που το συνοδεύουν και κυρίως τις ενδεικτικά προτεινόμενες δραστηριότητες.
Η ύλη στο βιβλίο του μαθητή οργανώνεται σε δύο μέρη. Το Α′ μέρος αποτελείται από 5 κεφάλαια, τα οποία αναφέρονται στην Άλγεβρα. Το Β′ μέρος αποτελείται από 2 κεφάλαια, τα οποία αναφέρονται στη Γεωμετρία και στην Τριγωνομετρία αντίστοιχα.
Κάθε κεφάλαιο χωρίζεται σε θεματικές ενότητες, και κάθε ενότητα περιλαμβάνει: τους κυρίους στόχους της, μια εισαγωγική δραστηριότητα, το μαθηματικό περιεχόμενο της ενότητας, δηλαδή τη βασική θεωρία, παραδείγματα – εφαρμογές, ερωτήσεις κατανόησης και προτεινόμενες ασκήσεις και προβλήματα.

- Κύριοι Στόχοι

  Στην αρχή κάθε ενότητας αναγράφονται οι κύριοι στόχοι της όπως αυτοί διατυπώνονται στο αναλυτικό πρόγραμμα. Οι διδακτικοί στόχοι κάθε ενότητας δεν είναι χρήσιμοι μόνο για το διδάσκοντα, άλλα και για τους μαθητές. Κι αυτό γιατί η γνώση των στόχων στους οποίους αποβλέπει η διδασκαλία κάθε ενότητας, επηρεάζει τη στάση τους στην επιλογή της μεθόδου και της στρατηγικής που ακολουθεί ο διδάσκων. Με τον τρόπο αυτό τίθενται οι προϋποθέσεις για την επιτυχία τους. Άλλωστε θεμελιακή αρχή της μάθησης είναι η επίγνωση του σκοπού.

- Δραστηριότητα

  Κάθε ενότητα ξεκινά με μια δραστηριότητα που συχνά είναι ένα πρόβλημα το οποίο βρίσκεται όσο το δυνατόν πιο κοντά στα ενδιαφέροντα του μαθητή. Παράλληλα οδηγεί στην αναγκαιότητα της εισαγωγής των εννοιών που θα διδαχτούν στη συνέχεια ή της επανάληψης και διερεύνησης άλλων που ήδη έχουν διδαχτεί.

  Η δραστηριότητα στοχεύει να ενθαρρύνει τη συνεργασία και την ομαδική εργασία παροτρύνοντας τους μαθητές ή τις ομάδες των μαθητών σε πνευματικό, διανοητικό ανταγωνισμό. Με κατάλληλα ερωτήματα γίνεται προσπάθεια να επικεντρωθεί η προσοχή τους σε ορισμένες ενέργειες που θα δώσουν ευκαιρίες για ουσιαστική συμμετοχή όλων των μαθητών. Οι δραστηριότητες αυτές δίνουν επιπλέον στο διδάσκοντα τη δυνατότητα να προκαλέσει τη συμμετοχή των μαθητών του στη διαδικασία της μάθησης μέσα στην τάξη, ενθαρρύνοντας τη συνεργασία. Τα συμπεράσματα των δραστηριοτήτων στα οποία θα καταλήξουν οι μαθητές οδηγούν στο μαθηματικό περιεχόμενο της ενότητας. Με τη δραστηριότητα επιδιώκεται να δημιουργηθεί ένας προβληματισμός μεταξύ των μαθητών γύρω από το θέμα που διαπραγματεύονται και για το λόγο αυτό δε συνοδεύεται από τη λύση της. Κατά την ανάπτυξη όμως του κυρίως μαθήματος λύνονται οι εξισώσεις, ανισώσεις κ.τ.λ. στις οποίες καταλήγει.

  Η εισαγωγική δραστηριότητα δεν είναι δεσμευτική για τον διδάσκοντα είναι απλώς ενδεικτική και συνεπώς μπορεί να αντικατασταθεί με κάποια άλλη που εκείνος κρίνει κατάλληλη για το επίπεδο και τις δυνατότητες των μαθητών της τάξης του.

- Μαθηματικό περιεχόμενο της ενότητας (Η βασική θεωρία)

  Περιλαμβάνει τις γνώσεις που απαιτούνται να μάθει, να συγκρατήσει και να μπορεί να εφαρμόσει ο μαθητής, όπως ορισμούς και ιδιότητες, που θα του επιτρέψουν να επιλύει προβλήματα και να διατυπώνει συλλογισμούς. Σε πολλές ενότητες δίνεται και η απόδειξη της βασικής πρότασης της ενότητας. Οι μαθητές της Γ′ τάξης είναι πλέον σε θέση να αντιληφθούν καλύτερα την αποδεικτική διαδικασία απ’ ότι στις προηγούμενες τάξεις. Γι’ αυτό στο βιβλίο υπάρχουν ευκαιρίες να ασκηθούν σε απλές και σύντομες αποδείξεις.

Η μύηση στη λειτουργία της αποδεικτικής διαδικασίας έχει ως στόχο να συνειδητοποιήσουν οι μαθητές τη δύναμη της στον έλεγχο της αλήθειας μιας πρότασης.

- Παραδείγματα – Εφαρμογές
  Πρόκειται για ένα σύνολο λυμένων παραδειγμάτων (ασκήσεων και προβλημάτων) που σκοπεύουν να δώσουν στο μαθητή τη δυνατότητα να μάθει πώς πρέπει να αντιμετωπίζει ανάλογες ασκήσεις και προβλήματα, να διαπιστώσει την ευρύτητα των εφαρμογών που έχουν τα Μαθηματικά, να αποκτήσει νέες εμπειρίες επίλυσης προβλημάτων, να ερμηνεύσει κανόνες και γενικότερα να διευρύνει το πεδίο των γνώσεων του με γνώσεις συμπληρωματικές. Οι γνώσεις αυτές δεν περιλαμβάνονται στους κύριους στόχους της ενότητας αλλά κρίνεται σκόπιμο να τους γνωρίζει ο μαθητής.
- Ερωτήσεις κατανόησης (κριτήρια αξιολόγησης της μαθησιακής διαδικασίας)
  Είναι απλά ερωτήματα στα οποία οφείλει ο μαθητής να είναι σε θέση να απαντήσει μετά την ολοκλήρωση του μαθήματος. Με τις ερωτήσεις αυτές δίνεται η ευκαιρία στον καθηγητή να διαπιστώσει τον βαθμό επιτυχίας του μαθήματος, να αναδειχθούν τυχόν δυσκολίες και παρανοήσεις, αλλά και να συζητηθούν διάφορα θέματα τα οποία σχετίζονται με το περιεχόμενο της ενότητας.
- Προτεινόμενες ασκήσεις και προβλήματα
  Ιδιαίτερη προσπάθεια καταβλήθηκε για την συλλογή και την ταξινόμηση των ασκήσεων. Με τη χαρακτηριστική ποικιλία τους από απλές ασκήσεις ως τα πιο πολυσύνθετα προβλήματα για απαιτητικούς μαθητές, επεκτείνεται η εμβέλεια τους σε κάθε τομέα εφαρμογής,τον οποίο επιτρέπουν η ηλικία και οι γνώσεις των μαθητών (Φυσική – Χημεία – Οικονομία, κ.τ.λ), καθώς και σε καταστάσεις της καθημερινής ζωής. Είναι γνωστό άλλωστε, ότι η μαθηματική εκπαίδευση πρέπει να στοχεύει μεταξύ άλλων και στην απόκτηση εφαρμόσιμης γνώσης αλλά και στην κατανόηση πρακτικών εφαρμογών.

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι η κυρίαρχη μορφή που επικρατεί στην περιγραφή των μαθηματικών γνώσεων και η οποία υπαγορεύει και τη διδακτική πορεία που θα ακολουθήσει ο διδάσκων, αποτελεί σύνθεση της επαγωγικής και παραγωγικής πορείας και είναι αυτή που δηλώνει το ακόλουθο διάγραμμα.

Η εισαγωγική δραστηριότητα που προτείνεται σε κάθε ενότητα δεν είναι παρά ένα συγκεκριμένο παράδειγμα το οποίο παροτρύνει τους μαθητές να διατυπώσουν μια εικασία. Στην προσπάθεια να επαληθεύσουν την εικασία αυτή καταλήγουν στη διατύπωση ενός νόμου. Ο νόμος είναι μια ισότητα, μια ανισότητα, μια ιδιότητα, μια συνθήκη ή ένας αλγόριθμος. Όταν κρίνεται δυνατό, υλοποιείται και το στάδιο της απόδειξης. Για τη μετάβαση στο στάδιο των εφαρμογών είναι αρκετή η κατανόηση του νόμου.

Σε ορισμένες ενότητες παρουσιάζονται **θέματα από την ιστορία των Μαθηματικών** στα οποία επιχειρείται να δοθεί η περιγραφή του προβλήματος που τέθηκε και η παρουσίαση των εννοιολογικών εργαλείων που εφαρμόστηκαν προκειμένου να λυθεί. Τα θέματα αυτά μαζί με τα συνοδευτικά ερωτήματα έχουν ως στόχο να αξιοποιηθεί με τον καλύτερο δυνατό τρόπο η ιστορία των Μαθηματικών. Η αξιοποίηση της ιστορίας των Μαθηματικών έχει γίνει διεθνώς αντικείμενο συστηματικών μελετών. Η θετική συμβολή στοιχείων από την ιστορία των Μαθηματικών τεκμηριώνεται σε τρεις κατηγορίες επιχειρημάτων:

α) Προκαλεί το ενδιαφέρον των μαθητών και συμβάλλει στη συγκρότηση μιας θετικής στάσης απέναντι στα Μαθηματικά.
β) Αναδεικνύει και υπογραμμίζει τον ανθρώπινο χαρακτήρα της μαθηματικής δραστηριότητας ανά τους αιώνες.
γ) Συνεισφέρει στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και προβλημάτων, αναδεικνύοντας όχι μόνο τα πλαίσια και τις συνθήκες προέλευσης τους αλλά και τους όρους της εξέλιξής τους.

Τα θέματα αυτά, καθώς και όσα επιπλέον αναφέρονται στο βιβλίο του καθηγητή δεν μπορούν να θεωρηθούν ολοκληρωμένες μελέτες και γι' αυτό υπάρχουν βιβλιογραφικές αναφορές για όσους μαθητές και καθηγητές εκδηλώνουν ένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Βιβλιογραφία

– *Η ιστορία των Μαθηματικών ως μέσο διδασκαλίας των μαθηματικών στο Δημοτικό και το Γυμνάσιο, πρακτικά 1ου διημέρου διαλόγου για τη διδασκαλία των Μαθηματικών, επιμέλεια Δημήτρης Χασάπης, Θεσσαλονίκη 8-9 Μαρτίου 2002, (διάφορα άρθρα).*

Προτείνονται ακόμη θέματα για την εκπόνηση **Διαθεματικών εργασιών** οι οποίες αποτελούν πρόκληση για ομαδική έρευνα και συνεργασία μεταξύ των μαθητών.

Η διαθεματική προσέγγιση των Μαθηματικών με τις δραστηριότητες και τα σχέδια εργασιών (projects), που προτείνονται στο νέο Αναλυτικό Πρόγραμμα του Γυμνασίου, φιλοδοξεί να δώσει τη δυνατότητα σε καθηγητές και μαθητές για μια νέα προσέγγιση των Μαθηματικών, αφού επιδιώκεται να τα συνδέσουν μ' άλλα γνωστικά αντικείμενα καθώς και με καταστάσεις που αντιμετωπίζουν στην καθημερινή τους ζωή.

Βιβλιογραφία

– *K. Frey, Η «Μέθοδος Projects», εκδοτικός οίκος Αδελφών Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη 2002.*
– *Ηλ. Ματσαγγούρας: Η Διαθεματικότητα στη σχολική γνώση, Εννοιοκεντρική αναπλαισίωση και σχέδια εργασίας, εκδόσεις Γρηγόρη, Αθήνα 2003.*
– *Οδηγός σχεδίων εργασίας (Πολυθεματικό βιβλίο, Ευέλικτη ζώνη, Διαθεματικότητα) για τον εκπαιδευτικό, έκδοση ΥΠΕΠΘ-Π.Ι, Αθήνα 2002.*
– *Σκούρας Α., Πολύζος Γ. Τα μαθηματικά στην καθημερινή ζωή, στην τέχνη και τον πολιτισμό. Οδηγός για την εφαρμογή της Ευέλικτης Ζώνης καινοτόμων Δράσεων, Βιβλίο για τον καθηγητή ΥΠΕΠΘ-Π.Ι, Αθήνα 2001.*

Τέλος προτείνονται εναλλακτικές προτάσεις διδασκαλίας με **Η/Υ** (διερευνητικές προσεγγίσεις) καθώς και διευθύνσεις με ανάλογες προτάσεις στο Διαδίκτυο, το οποίο αποτελεί μια πολύτιμη πηγή άντλησης διδακτικού υλικού. Για την αξιοποίηση του όμως δεν επαρκεί η εξοικείωση με την τεχνολογία. Ο διδάσκων πρέπει να επιλέγει και να συνδυάζει το ποιοτικό διδακτικό υλικό ώστε αυτό να είναι αξιοποιήσιμο στις συνθήκες της τάξης του και της σχολικής πραγματικότητας της χώρας μας. Πρέπει να υπογραμμίσουμε ότι η εξοικείωση των μαθητών με τους υπολογιστές δεν αντικαθιστά αλλά συμπληρώνει τον κλασσικό τρόπο διδασκαλίας.

Βιβλιογραφία

– *Κ. Γαβρίλης - Δ. Γαβρίλης, Μαθαίνοντας στο Internet Μαθηματικά, εκδ. Καστανιώτη, 2001.*
– *Τουμάσης Μ. - Αρβανίτης Τ. Διδασκαλία μαθηματικών με χρήση Η/Υ, εκδ. Σαβάλλας, Αθήνα 2003.*
– *Εκπαιδευτική Πύλη του ΥΠΕΠΘ www.e-yliko.gr, http://pi-schools.gr, http://www.sch.gr*

Στο τέλος κάθε κεφαλαίου υπάρχει μια σύντομη **περίληψη-ανακεφαλαίωση** με τα βασικότερα σημεία του, που δίνει τη δυνατότητα μιας άμεσης επανάληψης της ύλης, καθώς και **γενικές ασκήσεις** που αναφέρονται στην ύλη όλου του κεφαλαίου.

Το βιβλίο κλείνει με απαντήσεις-υποδείξεις για τη λύση των ασκήσεων και με ευρετήριο όρων.

Στο βιβλίο του εκπαιδευτικού για την εμπέδωση των εννοιών των διαφόρων ενοτήτων προτείνονται διάφορα **συμπληρωματικά θέματα** όπως προβλήματα, ασκήσεις, δραστηριότητες, σταυρόλεξα και κρυπτόλεξα. Όταν για τη διδασκαλία μιας ενότητας απαιτούνται περισσότερες από δύο διδακτικές ώρες τότε προτείνεται **ενδεικτικός σχεδιασμός της διδασκαλίας** για την καλύτερη οργάνωση της και την αποτελεσματικότερη αξιοποίηση του βιβλίου του μαθητή. Προτείνονται ακόμα **ενδεικτικά σχέδια κριτηρίων αξιολόγησης**.

Τέλος θα θέλαμε να υπογραμμίσουμε ότι κατά την υλοποίηση του αναλυτικού προγράμματος, το οποίο επιλέγει και δομεί σε μια διατεταγμένη σειρά τις έννοιες που θα συγκροτήσουν το μαθηματικό υλικό που πρέπει να διδαχθεί, προσπαθήσαμε να προσαρμόσουμε την επιστημονική γνώση στις σχολικές αναγκαιότητες λαμβάνοντας υπόψη τρεις κυρίως παράγοντες:

- **Τη δυνατότητα αφομοίωσης του γνωστικού αντικειμένου από τους μαθητές**. Μια μαθηματική έννοια που κατά γενική παραδοχή εμφανίζει δυσκολίες στην αφομοίωση της, μας απασχόλησε περισσότερο. Προσπαθήσαμε να βρούμε παραδείγματα και εποπτικούς τρόπους παρουσίασή της που όχι μόνο να κάνουν την έννοια κατανοητή, αλλά και να επιτρέπουν την πολύπλευρη χρήση της από τους μαθητές.
- **Το ρόλο του μαθηματικού αντικειμένου μέσα στο δομημένο σύνολο των γνώσεων που πρόκειται να διδαχθεί ο μαθητής**. Προσπαθήσαμε να δώσουμε περισσότερη έμφαση στις έννοιες κλειδιά για τη μαθηματική ύλη της τάξης αυτής π.χ. ρίζες, ταυτότητες, παραγοντοποίηση, συστήματα, συναρτήσεις, ισότητα,ομοιότητα κ.τ.λ.
- **Την ιδιαιτερότητα κάθε τάξης, στην οποία απευθύνεται το βιβλίο αυτό**. Το χαμηλό επίπεδο μιας τάξης απαιτεί ως γνωστόν, μεγαλύτερη προσοχή και προσπάθεια εκ μέρους του καθηγητή κατά τη διδακτική προσέγγιση της έννοιας που διδάσκει. Για το λόγο αυτό προτείνονται ερωτήσεις, παραδείγματα – εφαρμογές και ασκήσεις κλιμακούμενης δυσκολίας ώστε να απευθύνονται σε όλους τους μαθητές.

Βιβλιογραφία

- *Α. Γαγάτσης, Διδακτική των μαθηματικών, εκδόσεις ART of text Α. Ε, Θεσσαλονίκη 1995.*
- *Ε.Γ. Κολέζα – Κ.Ν. Μακρής – Κ.Β. Σουρλάς: Θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών (Διδακτικοί στόχοι, ταξινομίες, δραστηριότητες), εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα 1993.*
- *Γ. Φιλίππου – Κ. Χρίστου, Διδακτική των μαθηματικών, εκδόσεις Γ. Δαρδανός, Αθήνα 2002.*

Το πρόβλημα και η λύση του

Ένας από τους σημαντικότερους στόχους των αναλυτικών προγραμμάτων και της διδασκαλίας των Μαθηματικών σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης, είναι να καταστήσει τους μαθητές ικανούς να λύνουν προβλήματα και να αξιοποιούν τα συμπεράσματά τους. Το πρόβλημα και η λύση του αποτελούν την πεμπτουσία των Μαθηματικών και της διδασκαλίας τους. Άλλωστε, *ο σπουδαιότερος λόγος για τον οποίο μαθαίνουμε Μαθηματικά είναι για να λύνουμε προβλήματα, αλλά και ο μοναδικός ίσως δρόμος για να μάθουμε Μαθηματικά είναι λύνοντας προβλήματα.*

Σε αντίθεση με την άσκηση, το πρόβλημα είναι αποτελεσματικότερο μέσο για την εμπέδωση και τον έλεγχο των γνώσεων που έχουν αποκτηθεί (εδραιωθεί). Η διαδικασία λύσης μιας άσκησης δεν είναι παρά μια επανάληψη γνωστών ενεργειών που στηρίζει την κατανόηση και αφομοίωση κάθε νέας μαθηματικής έννοιας και στοχεύει στην ενίσχυση μιας δεξιότητας που έχει αποκτηθεί. Είναι επομένως μια μονοδιάστατη νοητική πράξη, που εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τη μνήμη και την αυτοματοποιημένη επανάληψη αφομοιωμένων δεξιότητων. Η λύση όμως ενός προβλήματος είναι η κατάληξη μιας σύνθετης νοητικής λειτουργίας που περιλαμβάνει την ανάκληση αφομοιωμένων εννοιών, διαδικασιών και δεξιοτήτων, την οργάνωση, την λογική επεξεργασία και ερμηνεία δεδομένων, την ανακάλυψη σχέσεων και νόμων, τη διατύπωση και τον έλεγχο υποθέσεων, την εξαγωγή και την αξιολόγηση συμπερασμάτων.

Σύμφωνα με τη Θεωρία Κατασκευής της γνώσης (κονστρουκτιβισμός) η γνώση κατασκευάζεται ενεργητικά από το υποκείμενο και δε «συλλαμβάνεται» παθητικά από το περιβάλλον. Η μαθηματική γνώση μπορεί να κατανοηθεί μόνο διαμέσου δραστηριοτήτων που μας επιτρέπουν να κατανοούμε τις μαθηματικές έννοιες και σχέσεις και επομένως μόνο διαμέσου των προβλημάτων που αυτή η μαθηματική γνώση λύνει. Τα Μαθηματικά δεν είναι απλώς ένα λογικά συνεπές εννοιολογικό σύστημα για την ανάπτυξη αυστηρών αποδείξεων· είναι πρωτίστως, μια δραστηριότητα που πραγματώνεται διαμέσου καταστάσεων προβληματισμού και μέσα σε ένα περιβάλλον που ευνοεί την ανάπτυξή τους. Αυτό σημαίνει ανάπτυξη της τάξης ως «μαθηματικής κοινότητας», όπου ο δάσκαλος των Μαθηματικών αξιολογεί και οικοδομεί πάνω στις μεθόδους και τις λύσεις των μαθητών. Άλλωστε,οι σημαντικές ιδέες δεν παρουσιάζονται σε συγκεκριμένους αλγόριθμους αλλά εμφανίζονται όταν οι διαδικασίες επίλυσης προβλήματος, οι συλλογισμοί και η συζήτηση των μαθηματικών ιδεών είναι κεντρικές επιλογές της διδασκαλίας.

Η επίλυση ενός προβλήματος είναι μια διαδικασία πολύπλοκη και γι' αυτό είναι πολύ δύσκολο να διδαχθεί, καθώς αποτελείται από μια σειρά σταδίων και απαιτεί τη σύνθεση μιας πορείας σκέψης, η οποία είναι πολλές φορές πρωτότυπη. Η διδασκαλία επίλυσης προβλημάτων είναι μια πολύπλοκη δραστηριότητα. Ωστόσο **ο διδάσκων είναι ο μόνος που μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές του να αποκτήσουν εμπειρία στη λύση προβλημάτων** δημιουργώντας μέσα στην τάξη ένα περιβάλλον που να ευνοεί την παρατήρηση, τη διατύπωση ερωτημάτων και την ανάπτυξη κατάλληλων στρατηγικών με σκόπο την απάντηση των ερωτημάτων αυτών.

Για να γίνουν καλύτεροι λύτες προβλημάτων οι μαθητές, πρέπει να μάθουν να ανιχνεύουν δρόμους για την επίλυση τους και όχι να εφαρμόζουν γνωστές τεχνικές. Σύμφωνα με τον Polya πρέπει να μάθουν να προσπαθούν για την:

- **Κατανόηση του προβλήματος:** Να διαβάζουν καλά το πρόβλημα, ώστε να καταλάβουν τι προσπαθούν να βρουν, να καταγράφουν τα δεδομένα και τα ζητούμενα, να εντοπίζουν τις λέξεις και τις φράσεις-κλειδιά, να προσπαθούν να χρησιμοποιούν κατάλληλο συμβολισμό, να σχεδιάζουν ένα σχήμα, ένα πίνακα, ένα διάγραμμα ή μια γραφική παράσταση που μπορεί να τους βοηθήσει.
- **Επινόηση ενός σχεδίου επίλυσης:** Να διατυπώνουν εικασίες, να κάνουν υποθέσεις, να συσχετίζουν τα δεδομένα και τα συμπεράσματα με άλλα παρόμοια προβλήματα που έχουν λύσει προηγουμένως, να επιλέγουν και να δοκιμάζουν στρατηγικές, όπως "βρες τον κανόνα", "φτιάξε ένα σχήμα", "λύσε ένα πιο απλό πρόβλημα" κ.τ.λ.
- **Εκτέλεση του σχεδίου επίλυσης:** Να πραγματοποιούν την επιλεγμένη στρατηγική, να εφαρμόζουν μια αποδεικτική διαδικασία, επαγωγή, απαγωγή σε άτοπο κ.τ.λ..
- **Ανασκόπηση και έλεγχο του αποτελέσματος:** Να ελέγχουν αν χρησιμοποίησαν όλες τις πληροφορίες, αν η απάντηση που έδωσαν είναι λογική, να αναρωτηθούν αν μπορούν να φθάσουν στο αποτέλεσμα με διαφορετικό τρόπο και τέλος να αναρωτηθούν τι έμαθαν από τη λύση του προβλήματος.

Σύμφωνα με τον Polya: *«Το να λύνεις προβλήματα είναι μια πρακτική επιδεξιότητα, όπως ας πούμε το κολύμπι. Αποκτούμε πρακτική επιδεξιότητα με τη μίμηση και την πρακτική εξάσκηση. Προσπαθώντας να κολυμπήσετε μιμείστε αυτό που κάνουν οι άλλοι με τα πόδια και τα χέρια τους, για να κρατήσουν το κεφάλι έξω από το νερό και τελικά μαθαίνετε να κολυμπάτε κάνοντας εξάσκηση. Καθώς προσπαθείτε να λύσετε προβλήματα πρέπει να παρατηρείτε και να μιμείστε τι κάνουν οι άλλοι όταν λύνουν προβλήματα και τελικά μαθαίνετε να λύνετε προβλήματα καθώς προσπαθείτε να τα λύσετε».*

Βιβλιογραφία

- Burkhardt H. – Shoenfeld A.: Problem solving – An Overview in problem solving – A wold view, First Congress of Mathematical Education, 1984.
- Καραγιώργος Δ.: Το πρόβλημα και η επίλυσή του, εκδόσεις Σαββάλας, Αθήνα 2000.
- Κλαουδάτος Ν. : Σημειώσεις του μαθήματος «Διδακτική των Μαθηματικών», Τμήμα Μαθηματικών, Τομέας Διδακτικής των Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών.

- Κλαουδάτος Ν.: Η διδασκαλία των Μαθηματικών ως λύση προβλήματος, Ο ρόλος των ερευνητικών δραστηριοτήτων. Ερευνητική διάσταση της διδακτικής των μαθηματικών τεύχος 2, 1997, περιοδική έκδοση του Παραρτήματος Κεντρικής Μακεδονίας της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας..
- N.C.T.M(National Council of Theathers of Mathematics), The teaching and Assessing of mathematical Problem solving, volume 3, (Research agenda for mathematics education), 1988.
- N.C.T.M (National Council of Teachers of Mathematics), Problem solving in school mathematics, 1980 yearbook.
- A.H Shoenfeld: Mathematical problem solving, Academic Press, London,1985.
- G.Polya: Πώς να το λύσω, εκδόσεις Καρδαμίτσα, Αθήνα 1991, Επιμέλεια: Τάσος Πατρώνης

Internet και Μαθηματικά – Τα προβλήματα και η λύση τους

Σε διάφορες ιστοσελίδες στο Internet προτείνονται καθ' όλη τη διάρκεια της χρονιάς προβλήματα για λύση από την Άλγεβρα και τη Γεωμετρία. Η τάξη, αφού χωριστεί σε ομάδες, μπορεί να συμμετέχει στη λύση εβδομαδιαίων ή μηνιαίων προβλημάτων. Κάθε ομάδα επιλέγει μια ιστοσελίδα, λύνει το πρόβλημα το οποίο προτείνεται και στη συνέχεια το παρουσιάζει στην τάξη.
Με τη δραστηριότητα αυτή οι μαθητές θα εμπλακούν στη λύση προβλημάτων που δεν είναι απλές εφαρμογές της αντίστοιχης θεωρίας. Έτσι θα αναγκαστούν να διατυπώσουν εικασίες, να κατασκευάσουν μοντέλα για τη λύση τους και να εφαρμόσουν δικές τους στρατηγικές με σκοπό να δώσουν απάντηση στα ερωτήματα που θέτει το πρόβλημα.
Επειδή οι ιστοσελίδες δημοσιεύουν και σχολιάζουν συνήθως τις απαντήσεις των αναγνωστών τους, θα τους δοθεί η ευκαιρία να δουν τις λύσεις τους όσο και τις λύσεις άλλων συνομηλίκων τους απ' όλο τον κόσμο.
http://mathforum.org/library/problems, http://nrich.maths.org,
http://www.geom.uiuc.edu/java/, http://www.mathgoodies.com/lessons/,
www.bbc.co.uk/schools, αλλά και στο www. derive, www.hms.gr, www.pi-schools.gr, www.e-yliko.gr, www.telemath.gr

Μια ενδιαφέρουσα πρόταση «Λύση προβλήματος και αθλητικές σελίδες» θα βρει ο διδάσκων στο http://www.col-ed.org/cur/math/math25.txt, η οποία μπορεί να αποτελέσει και σχέδιο εργασίας.

ΜΕΡΟΣ Α′
ΑΛΓΕΒΡΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο - Αλγεβρικές Παραστάσεις

1.1. Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς (Επαναλήψεις-συμπληρώσεις)

Η ενότητα αυτή έχει σκοπό να προετοιμάσει τους μαθητές για την ομαλή εισαγωγή τους στον αλγεβρικό λογισμό που ακολουθεί. Το περιεχόμενό της έχει διδαχτεί στις προηγούμενες τάξεις και επομένως η διδασκαλία της, στην τάξη αυτή, θα έχει κυρίως επαναληπτικό χαρακτήρα. Στόχος της ενότητας είναι να θυμηθούν οι μαθητές τις πράξεις με τους πραγματικούς αριθμούς, να εμπεδώσουν τις ιδιότητες των δυνάμεων και να συμπληρώσουν τις γνώσεις τους στις ιδιότητες των ριζών.
Σύμφωνα άλλωστε με τη σπειροειδή διάταξη της διδακτέας ύλης, με την οποία είναι διαρθρωμένο το αναλυτικό πρόγραμμα, ορισμένες γνώσεις από τις προηγούμενες τάξεις επαναλαμβάνονται σε πιο προχωρημένη μορφή, ενώ παράλληλα εισάγονται και νέες. Έτσι οι γνώσεις που έχουν αφομοιωθεί, ανανεώνονται και οι ικανότητες και οι δεξιότητες των μαθητών σταθεροποιούνται και εμπλουτίζονται με νέα στοιχεία που είναι απαραίτητα για τη συμπλήρωση της μαθηματικής τους εκπαίδευσης.

Α Οι πραγματικοί αριθμοί και οι πράξεις τους (2 διδακτικές ώρες)

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές πρέπει με απλά παραδείγματα :

- Να θυμηθούν ποιοι αριθμοί λέγονται ρητοί, άρρητοι, πραγματικοί και τι ονομάζεται απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού.
- Να εμπεδώσουν τις τεχνικές των τεσσάρων πράξεων μεταξύ πραγματικών αριθμών και τις βασικές ιδιότητές τους, ώστε να μπορούν να τις αξιοποιούν στο λογισμό.

Διδακτικές οδηγίες

- Να τονιστεί ότι όλες οι ρίζες δεν είναι άρρητοι αριθμοί π.χ. $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$ και ότι υπάρχουν άρρητοι που δεν εκφράζονται υποχρεωτικά ως ρίζα πραγματικού αριθμού π.χ. ο αριθμός π. (ερωτ. κατ. 1).
- Η άσκηση 2 έχει σκοπό να προκαλέσει το ενδιαφέρον των μαθητών και ταυτόχρονα να ασχοληθούν με τις τεχνικές των τεσσάρων πράξεων.
- Με την άσκηση 3 επιδιώκεται να συνδέσουν οι μαθητές την απόλυτη τιμή της διαφοράς δύο αριθμών με την απόσταση των σημείων με τα οποία παριστάνονται πάνω στον άξονα.
- Το παράδειγμα 2 και οι ασκήσεις 9, 10 αναδεικνύουν τη χρησιμότητα των ιδιοτήτων των πράξεων.
- Στην άσκηση 11 οι μαθητές αφού διαπιστώσουν ότι το άθροισμα όλων των αριθμών είναι μηδέν, θα πρέπει να προσδιορίσουν τρεις τριάδες αριθμών που κάθε μια τους θα έχει άθροισμα μηδέν (-7+2+5, -6-3+9, -5+1+4).
- Με το λογισμό και τη χρήση μεταβλητών οι μαθητές έχουν εξοικειωθεί στις προηγούμενες τάξεις. Να δοθεί όμως ιδιαίτερη βαρύτητα στην **επιμεριστική ιδιότητα** που είναι βασική ιδιότητα του αλγεβρικού λογισμού. Αν και η ιδιότητα αυτή είναι ήδη γνωστή στους μαθητές, εμφανίζονται δυσκολίες στην εφαρμογή της ακόμα και στις πιο απλές περιπτώσεις (ερώτηση κατανόησης 3 - άσκηση 8).

Απαντήσεις στις ερωτήσεις κατανόησης

1.

	-3	$\frac{1}{2}$	6	$0,\overline{3}$	$-0,8$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{16}$	$3,14$	π	$\frac{22}{7}$
Ακέραιος	Χ		Χ				Χ			
Ρητός	Χ	Χ	Χ	Χ	Χ		Χ	Χ		Χ
Άρρητος						Χ			Χ	

2. α) 4, β) 0, γ) –11, δ) $-\frac{2}{3}$, ε) 0, στ) 1, ζ) $\frac{5}{2}$, η) $-\frac{2}{5}$, θ) –1

3. α) –11x, β) –6 + 15x, γ) 9x, δ) –3, –2x, ε) 6 +3y + 2x + xy, στ) 3x, 2
4. i) β ii) δ
5. Σ – Λ – Λ – Σ

Συμπληρωματικά θέματα

1. Να συμπληρώσετε τα κενά ώστε στην κατακόρυφη στήλη να προκύψει το έτος γέννησή σας.

$-5+12-3\ldots\ldots=\square$

$3-9-1\ldots\ldots=\square$

$2(-3)-4\ldots\ldots=\square$

$-3(-4)+7\ldots\ldots=\square$

2. Να συμπληρωθεί ο πίνακας αν το άκρο κάθε βέλους δείχνει το άθροισμα της αντίστοιχης στήλης ή γραμμής.

6	–5	–4	8	→	
7		3	6	→	7
	8		–6	→	
–18	7	18	–15	→	
↓	↓	↓	↓		↓
–2				→	0

Εννοιολογική προσέγγιση της λέξης Ρητός

Η λέξη **ρητός** είναι επίθετο και προέρχεται από το ρήμα λέγω, του οποίου ο παθητικός μέλλων και ο αόριστος β′ είναι αντιστοίχως ’ρηθήσομαι, και ερρήθην. Ως γνωστόν κάθε ρηματικό επίθετο σε –τος δηλώνει κάτι που μπορεί να γίνει. Επομένως, ρητός είναι αυτός που μπορεί να διατυπωθεί γλωσσικά, που **μπορεί να λεχθεί**, **να εκφραστεί**, **να προσδιοριστεί σαφώς** και επομένως δεν αφήνει περιθώρια παρανοήσεων για το περιεχόμενό του. Για παράδειγμα λέμε «Πήρε ρητές εντολές για το τι έπρεπε να κάνει», «Παρά την ρητή απαγόρευση του γιατρού, συνέχισε να καπνίζει» κ.τ.λ.

Στα Μαθηματικά η λέξη ρητός χρησιμοποιείται με ανάλογη σημασία καθώς ρητό θεωρούμε τον αριθμό ο οποίος μπορεί να λεχθεί και να προσδιοριστεί επακριβώς και ο οποίος εκφράζεται ως τερματιζόμενος ή περιοδικός δεκαδικός αριθμός. Σε αντιδιαστολή με το ρητό, ο άρρητος ούτε μπορεί να λεχθεί αλλά ούτε και να προσδιοριστεί επακριβώς. Το δεκαδικό μέρος ενός άρρητου αριθμού αποτελείται από άπειρα δεκαδικά ψηφία, μη περιοδικά.

Β Δυνάμεις πραγματικών αριθμών (1 διδακτική ώρα)

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές πρέπει να εμπεδώσουν τις ιδιότητες των δυνάμεων και να αντιληφθούν τη χρησιμότητά τους στον υπολογισμό αριθμητικών παραστάσεων.

Διδακτικές οδηγίες

- Να συνηθίσουν οι μαθητές να διατυπώνουν και λεκτικά τις ιδιότητες των δυνάμεων και να μην περιοριστούν μόνο στην αναγραφή τους.
- Να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στην προτεραιότητα των πράξεων για την αποφυγή λαθών που οφείλονται στην αδυναμία εφαρμογής τους (παράδειγμα 3).

Απαντήσεις στις ερωτήσεις κατανόησης

1. Λ – Σ – Σ – Σ – Σ – Λ – Λ, 2. " = " (α, γ, δ) και " ≠ " (β, ε, στ, ζ, η)
3. i) γ, ii) δ, iii) β 4. α → 5, β → 6, γ → 1, δ → 4

Συμπληρωματικά θέματα

1. Να συμπληρωθεί το τετράγωνο, ώστε κάθε στήλη, γραμμή και διαγώνιός του, να έχει το ίδιο γινόμενο.

2^0		2^2
	2^{-1}	
		2^{-2}

(Απ: $2^0 \cdot 2^{-1} \cdot 2^{-2} = 2^{-3}$...)

2. Να γράψετε καθεμιά από τις παρακάτω παραστάσεις ως μια δύναμη

$Α = 3^{77} + 3^{77} + 3^{77}$ $\quad Β = 2^{102} – 2^{101} – 2^{100}$

$Γ = 2^{59} – 4^{29}$ $\quad Δ = 2^{17} \cdot 3^{18} – 2^{18}\ 3^{17}$

(Απ: $Α = 3^{78}$, $Β = 2^{100}$, $Γ = 2^{58}$, $Δ = 6^{17}$)

3. Να λυθεί η εξίσωση $(–2)^ν \cdot x = 2^{ν+1}$

(Απ: $x = 2$ αν ν άρτιος, $x = –2$ αν ν περιττός)

Γ Ρίζες (2 διδακτικές ώρες)

Δραστηριότητα

Με τη δραστηριότητα δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές με αριθμητικά παραδείγματα να οδηγηθούν σε μια εικασία για τις ιδιότητες των ριζών, την οποία στη συνέχεια θα κληθούν να αποδείξουν.

Οι μαθητές θα αναγνωρίσουν την αναγκαιότητα απόδειξης και της γενίκευσης μόνο εφόσον έχουν βρει τα δικά τους αποτελέσματα και έχουν αναπτύξει τις δικές τους εικασίες. Γι' αυτό ο διδάσκων δεν πρέπει να τους παρουσιάσει τις αποδείξεις, πριν οι μαθητές προσεγγίσουν το θέμα διαισθητικά – εμπειρικά. Η μετάβαση από τις εμπειρικές – διαισθητικές αντιλήψεις σε αποδεικτικές μεθόδους έχει ως σκοπό να αποσπάσει τη σκέψη του μαθητή από τα στενά πλαίσια του συγκεκριμένου προβλήματος και να τον εισάγει στη μαθηματική δομή του θέματος που πραγματεύεται.

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές πρέπει με απλά παραδείγματα:

- Να θυμηθούν τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας και τις άμεσες συνέπειές του.
- Να γνωρίζουν τις ιδιότητες των ριζών, να μπορούν να τις αποδεικνύουν και να μάθουν να τις χρησιμοποιούν.

Διδακτικές οδηγίες

- Να διευκρινιστεί η έννοια του μη αρνητικού αριθμού που συναντάμε στις ιδιότητες των ριζών.
- Να τονιστεί ότι η τετραγωνική ρίζα συνδέεται άμεσα με το τετράγωνο ενός αριθμού και επομένως ο λογισμός των ριζών στηρίζεται στις ιδιότητες των δυνάμεων.
- Με αριθμητικά παραδείγματα να εμπεδώσουν οι μαθητές ότι, αν $\alpha \geq 0$, τότε $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$ ή $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$ ενώ για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$ (ερωτήσεις κατανόησης 4δ, 4ε).
- Με κατάλληλα αριθμητικά παραδείγματα να επισημανθεί το συνηθισμένο λάθος $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha+\beta}$ (ερώτηση κατανόησης 3).
- Η χρησιμότητα των ιδιοτήτων των ριζών θα αναδειχθεί στην προσπάθεια λύσης συγκεκριμένων προβλημάτων (παράδειγμα 4, ασκήσεις 9, 10).
- Με την άσκηση 4 δίνεται η ευκαιρία να διαπιστώσουν οι μαθητές ότι απ' όλα τα ορθογώνια με την ίδια περίμετρο, μεγαλύτερο εμβαδόν έχει το τετράγωνο.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις κατανόησης

1. **α)** $4\sqrt{3}$, **β)** $2\sqrt{2}$, **γ)** 0, **δ)** 6, **ε)** 3, **στ)** 12
2. α→3, β→2, γ→1, δ→3, ε→3, στ→12
3.

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	Άθροισμα: $\sqrt{\alpha+\beta}$	Άθροισμα: $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$	Γινόμενο: $\sqrt{\alpha\beta}$	Γινόμενο: $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$	Πηλίκο: $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$	Πηλίκο: $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$
4	1	2	1	$\sqrt{5}$	3	2	2	2	2
9	16	3	4	5	7	12	12	3/4	3/4
64	36	8	6	10	14	48	48	4/3	4/3

4. Σ – Λ – Σ – Σ – Λ –Λ – Σ
5. ΝΑΙ

Συμπληρωματικά θέματα

1. Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι διαφορετικός από τους άλλους;

α) $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{3}{\sqrt{3}}$, $\frac{2}{\sqrt{12}}$ (Απ: $\frac{3}{\sqrt{3}}$)

β) $3\sqrt{8}$, $\sqrt{72}$, $2\sqrt{18}$, $6\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}$ (Απ: $3\sqrt{2}$)

2. Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι ίσοι;

i) $\alpha = \sqrt{8}$, $\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\gamma = 2\sqrt{2}$, $\delta = \frac{4}{\sqrt{2}}$, $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sigma\tau = \sqrt{\frac{2}{4}}$

(Απ: α=γ=δ, β=ε=στ)

ii) $\alpha = \sqrt{3}+\sqrt{3}$, $\beta = 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$, $\gamma = \sqrt{12}$, $\delta = \sqrt{3+3}$, $\varepsilon = \sqrt{27} - \sqrt{3}$

(Απ: α=γ=ε)

3. Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων

$A = \sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{1}}}}}$ $\quad B = \sqrt{57+\sqrt{44+\sqrt{15+\sqrt{99+\sqrt{1}}}}}$ (Απ: Α=5, Β=8)

4. Να υπολογιστούν οι ρίζες

$\sqrt{1} =$

$\sqrt{121} =$

$\sqrt{12321} =$

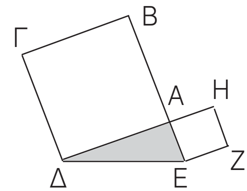
$\sqrt{1234321} =$

....

$\sqrt{12345678987654321} =$

(Απ: 1,11,111,..., αριθμός με ψηφία μονάδες το πλήθος των οποίων είναι $\frac{\nu+1}{2}$ όπου ν το πλήθος των ψηφίου του υπορρίζου)

5. Αν το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι $80cm^2$ και του ΑΕΖΗ, $45cm^2$, να αποδείξετε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΕ είναι $12\sqrt{5}$.



6. Να συμπληρώσετε το διπλανό τετράγωνο ώστε να γίνει μαγικό.

(Υποδ: $\sqrt{128} + \sqrt{50} + \sqrt{8} = ... = 15\sqrt{2}$ ...)

$\sqrt{32}$		$\sqrt{128}$
	$\sqrt{50}$	
$\sqrt{8}$		

7. Να βρεθεί η πλευρά τετραγώνου που έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν κύκλου ακτίνας r = 10cm.
Με αφορμή το τελευταίο πρόβλημα είναι δυνατόν να συζητηθεί το «πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου.

Ο τετραγωνισμός του κύκλου

Ο «τετραγωνισμός του κύκλου» είναι ένα από τα τρία άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας. Στα τέλη του 5ου αιώνα π. Χ. ήταν πολύ δημοφιλές ζήτημα στην Αθήνα, αφού ήταν συνώνυμο του «ακατόρθωτου». Το πρόβλημα έγκειται στην κατασκευή με κανόνα και διαβήτη της πλευράς ενός τετραγώνου που το εμβαδόν του να είναι ίσο με το εμβαδόν κύκλου γνωστής ακτίνας. Η κατασκευή αυτή, όπως αποδείχθηκε, μόλις το 1882 μ.Χ., είναι αδύνατη με κανόνα και διαβήτη. Σ' αυτό βοήθησαν αλγεβρικές έννοιες που ήταν άγνωστες στους αρχαίους Έλληνες. Όπως σημειώνει ο Dirk Struik στη Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών: *«Παλαιότεροι και σύγχρονοι μαθηματικοί έχουν επισημάνει τη σύνδεση αυτών των αρχαίων ελληνικών(άλυτων) προβλημάτων και της σύγχρονης θεωρίας των εξισώσεων, σχετικά με θέματα που αναφέρονται σε ρητές αναλύσεις, σε αλγεβρικούς αριθμούς και στη θεωρία ομάδων».*

Αν x η πλευρά του τετραγώνου και r η ακτίνα του κύκλου, τότε $x^2 = \pi r^2$, $x = \sqrt{\pi r^2}$, $x = r\sqrt{\pi}$.

Ο Lindemann απέδειξε ότι ο π δεν είναι αλγεβρικός* αλλά υπερβατικός αριθμός, δηλαδή δεν μπορεί να είναι ρίζα πολυωνυμικής εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές. Επομένως ότι είναι αδύνατη η κατασκευή με κανόνα και διαβήτη ενός ευθυγράμμου τμήματος μήκους π.

(* Όταν ένας αριθμός είναι ρίζα πολυωνυμικής εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές, ονομάζεται αλγεβρικός αριθμός. Π.χ. ο $\sqrt{2}$ είναι αλγεβρικός αριθμός, αφού είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2 - 2 = 0$ και επομένως κατασκευάζεται με κανόνα και διαβήτη).

1.2. Μονώνυμα – Πράξεις με μονώνυμα

Α Αλγεβρικές παραστάσεις – Μονώνυμα (1 διδακτική ώρα)

Δραστηριότητα

Με τη βοήθεια των γνωστών τύπων του εμβαδού και της περιμέτρου του ορθογωνίου και του τετραγώνου εισάγονται οι έννοιες της αλγεβρικής παράστασης και του μονωνύμου. Δίνεται ακόμα η ευκαιρία να κατανοήσουν οι μαθητές την έννοια της αριθμητικής τιμής μιας παράστασης.

Με τον τρόπο που είναι διαρθρωμένη η δραστηριότητα, δίνεται η δυνατότητα να διαπιστωθεί η **ομοιότητα - διαφορά** μεταξύ αριθμητικής και αλγεβρικής παράστασης και **η αλληλεπίδραση** μεταξύ των τιμών των μεταβλητών και της αριθμητικής τιμής μιας παράστασης (δεδομένα - τελικό αποτέλεσμα).

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές πρέπει να μάθουν να βρίσκουν την αριθμητική τιμή μιας παράστασης, να διακρίνουν πότε μια παράσταση είναι μονώνυμο και να προσδιορίζουν τον βαθμό του.

Διδακτικές οδηγίες

- Η διδασκαλία να περιοριστεί μόνο στις ακέραιες αλγεβρικές παραστάσεις και να μη διατεθεί χρόνος για άλλες παραστάσεις π.χ. ρητές ή κλασματικές. Ειδικότερα με τις ρητές παραστάσεις θα ασχοληθούν οι μαθητές εκτεταμένα στις ενότητες 1.9 και 1.10.
- Με τον όρο μονώνυμο θεωρούμε το ακέραιο μονώνυμο.
- Να μάθουν οι μαθητές να εκφράζουν με αλγεβρικές παραστάσεις διάφορα μεγέθη (παράδειγμα 3, ασκήσεις 5, 6, 7).
- Στην ενότητα αυτή οι μαθητές έρχονται σε επαφή με πολλές νέες έννοιες και στην καλύτερη εμπέδωσή τους θα συμβάλει η λύση του σταυρόλεξου της ερώτησης κατανόησης 5.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις κατανόησης

1. α, δ, ε, στ **2.** α, στ, η – β, δ, ζ, ι – γ, ε θ **3.**

5	xy^4	1	4	5
-1	xy^2	1	2	3
1/7	x^2y^5	2	5	7
$-\sqrt{3}$	x^4	4	0	4

4. $-\frac{1}{3}xy^2\omega^3$, $\frac{1}{3}xy^2\omega^3$

5. Λύση του σταυρόλεξου

Οριζόντια: **1.** ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ, **2.** ΣΤΑΘΕΡΑ, **3.** ΜΗΔΕΝ, **4.** ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ, **5.** ΙΣΑ, **6.** ΜΟΝΑΔΑ, **7.** ΚΥΡΙΟ ΜΕΡΟΣ, **8.** ΜΟΝΩΝΥΜΟ

Κάθετα: **1.**ΜΗΔΕΝΙΚΟ, **2.** ΒΑΘΜΟΣ, **3.** ΑΚΕΡΑΙΑ, **4.** ΑΝΤΙΘΕΤΑ, **5.)** ΟΜΟΙΑ, **6.** ΤΙΜΗ, **7.** ΜΗΔΕΝ, **8.** ΑΦΑΙΡΕΣΗ

Συμπληρωματικά θέματα

1. Ένα ορθογώνιο έχει μήκος τριπλάσιο από το πλάτος του x. Το μονώνυμο που εκφράζει το εμβαδόν του είναι :
   α) $3x$, **β)** $3x^2$, **γ)** x^2, **δ)** $4x$ (Απ: β)

2. Η Μαρία έχει x ευρώ, ενώ η Ελένη έχει 2 ευρώ λιγότερα από το τριπλάσιο ποσό της Μαρίας. Η αλγεβρική παράσταση που εκφράζει το χρηματικό ποσό της Ελένης είναι:
   α) $x - 2$, **β)** $3x + 2$, **γ)** $3x$, **δ)** $3x - 2$ (Απ: δ)

3. Χρησιμοποιώντας τους τύπους του παραδείγματος 2 (σελ. 27 βιβλίο μαθητή) να υπολογίσετε το ιδανικό βάρος ενός άνδρα ηλικίας 25 ετών και ύψους 174 cm και μιας γυναίκας ηλικίας 24 ετών και ύψους 167 cm.
   (Απ: 68,85, 55,52)

Εννοιολογική προσέγγιση της λέξης Παράσταση

Η λέξη παράσταση ή αναπαράσταση δε χρησιμοποιείται μόνο στα Μαθηματικά, αλλά τη συναντάμε πολύ συχνά και σημαίνει την παρουσίαση ή την απόδοση (με εικόνες, σύμβολα, σχήματα κ.τ.λ.) δεδομένων, φαινομένων, γεγονότων και καταστάσεων ώστε αυτά να γίνουν περισσότερο κατανοητά. Τα δεδομένα ή τα γεγονότα τα οποία μπορούν να παρασταθούν είναι ιστορικά, θρησκευτικά, αλλά και γεγονότα που αφορούν ανθρώπινες σχέσεις ή φυσικά φαινόμενα, τα οποία προτιμάμε να τα παριστάνουμε με διάφορους τρόπους, έτσι ώστε να τα αντιλαμβανόμαστε καλύτερα αλλά και να εξάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα από αυτά.

Τα κινηματογραφικά και θεατρικά έργα είναι «ζωντανές παραστάσεις» πραγματικών ή ιδεατών καταστάσεων, όπως αυτές διαμορφώθηκαν από τους συγγραφείς, που τις κατέγραψαν σε βιβλία ή σε σενάρια. Οι ηθοποιοί με τις οδηγίες του σκηνοθέτη αναπαριστάνουν τα σενάρια των συγγραφέων. Οι γλύπτες, οι ζωγράφοι, οι φωτογράφοι, κάνουν παραστάσεις με τις οποίες αποτυπώνουν εικόνες από τον εσωτερικό ή τον εξωτερικό τους κόσμο (προτομές, πορτραίτα, τοπία κ.τ.λ.). Για παράδειγμα η ζωφόρος του Παρθενώνα κοσμείται με ανάγλυφες παραστάσεις της πομπής των Παναθηναίων.

Ο τοπογράφος παριστάνει μια εδαφική περιοχή, όταν τη σχεδιάζει σ' ένα χαρτί υπό κλίμακα. Οι γνωστοί μας χάρτες είναι παραστάσεις γεωγραφικών εκτάσεων, ενώ η υδρόγειος σφαίρα είναι μια αναπαράσταση της γήινης σφαίρας. Ο κατασκευαστής ενός έργου κάνει την αναπαράστασή του σε μια μακέτα. Ο μηχανικός, ο αρχιτέκτονας ο μηχανολόγος αναπαριστούν σε σχέδια όλα τα στοιχεία ενός κτιρίου που πρόκειται να κατασκευαστεί. Σχεδιάζουν τις κατόψεις των διαμερισμάτων, την πρόσοψη του κτιρίου, το δίκτυο των εγκαταστάσεων ύδρευσης, θέρμανσης ηλεκτρισμού, πυρασφάλειας, τα σχέδια των σιδερένιων κατασκευών (κάγκελα, κιγκλιδώματα κ.τ.λ.).

Οι διωκτικές αρχές κάνουν αναπαράσταση ενός εγκλήματος για να αντιληφθούν καλύτερα τον τρόπο και τις συνθήκες που αυτό συνέβη.

Παραστάσεις κάνουμε και στα μαθηματικά προβλήματα, όταν διατυπώνουμε την εκφώνησή τους με συμβολική γραφή (αριθμητική-αλγεβρική παράσταση), με σχήματα (γεωμετρική παράσταση) ή με σχέσεις (γραφική παράσταση) ή όταν παριστάνουμε με τη μορφή πινάκων ή διαγραμμάτων τα στατιστικά δεδομένα μιας έρευνας.

Σχέδιο διαθεματικής εργασίας
ΘΕΜΑ: Η κατανόηση φαινομένων, γεγονότων ή καταστάσεων μέσα από την κατασκευή αναπαραστάσεων

Η αποτύπωση με διαφόρους τρόπους (εικόνες, σχέδια, πίνακες, γραφικές παραστάσεις, διαγράμματα κ.τ.λ.) φαινομένων, γεγονότων ή καταστάσεων και η συγκριτική μελέτη τους θα μπορούσε να αποτελέσει θέμα για την οργάνωση και ανάπτυξη ενός σχεδίου εργασίας από τους μαθητές. Στην εργασία αυτή θα πρέπει ακόμα να εξετάζονται οι ομοιότητες - διαφορές των διαφόρων ειδών αναπαραστάσεων καθώς και η μεταβολή και η εξέλιξή τους στο χώρο και στο χρόνο. Η εργασία αυτή θα μπορούσε να είναι για παράδειγμα η εξής: Από τα σχέδια και τις μακέτες στην εικονική πραγματικότητα και τα γραφικά του Η/Υ (Μια ιστορική εξέλιξη των διαφόρων μορφών αναπαράστασης).

Η εικονική πραγματικότητα γνωρίζει μεγάλη εφαρμογή στις θετικές επιστήμες, στην εκπαίδευση και στα μουσεία (εικονικές αναπαραστάσεις αρχαίων ναών και μνημείων). Εφαρμόζεται ακόμη σε πολλά ηλεκτρονικά παιχνίδια, στον κινηματογράφο, στην προσομοίωση των πτήσεων για την εκπαίδευση των αεροπόρων, των αστροναυτών κ.τ.λ. Η νέα αυτή τεχνολογία χρησιμοποιείται για τη διαμόρφωση μιας ρεαλιστικής αντίληψης για το χώρο, το χρόνο, το αστικό και φυσικό περιβάλλον στο μέλλον κ.α.

Β Πράξεις με μονώνυμα (1 διδακτική ώρα)

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές πρέπει να μάθουν να προσθέτουν, να πολλαπλασιάζουν και να διαιρούν μονώνυμα.

Διδακτικές οδηγίες

- Να διευκρινιστεί ότι για τις πράξεις μεταξύ των μεταβλητών, που σημειώνονται σε μια παράσταση, ισχύουν οι ίδιοι κανόνες που ισχύουν και μεταξύ αριθμών, εφόσον οι μεταβλητές αντιπροσωπεύουν αριθμούς. Έτσι εξηγούνται οι τεχνικές της πρόσθεσης ομοίων μονωνύμων, του γινομένου και του πηλίκου μονωνύμων.
- Με συγκεκριμένα παραδείγματα να τονιστεί ιδιαίτερα ότι δυο μονώνυμα, τα οποία δεν είναι όμοια, έχουν άθροισμα που δεν μπορεί να γραφεί ως μονώνυμο και ότι το πηλίκο μονωνύμων δεν είναι πάντοτε μονώνυμο (ερώτηση κατανόησης 2).

Απαντήσεις στις ερωτήσεις κατανόησης

1. Σ – Λ – Σ – Λ
2. α) $-3x^2$, β) $-10x^5$, γ) $5x-2y$, δ) $3x^2y$, ε) $2xy^3$, στ) $2x^2$, ζ) $-2x^2ω$, η) $-3xy^2$, θ) $7x^2y$

Συμπληρωματικά θέματα

1. Να βρεθούν οι τιμές των κ και λ, ώστε να ισχύουν οι ισότητες

α) $(-15x^{3\kappa-1}y^{\lambda}) : (-3x^{\kappa}y^{2}) = 5x^3y$, **β)** $(4\alpha^{2\kappa-1}\beta^{3\lambda}) : (12\alpha^{\kappa+2}\beta^{\lambda+1}) = \frac{2}{3}\alpha\beta^3$

(Απ: α) $\kappa = 2, \lambda = 3$ β) $\kappa = 4, \lambda = 2$)

2. Δύο κύκλοι έχουν ακτίνες 3x και 4x αντιστοίχως. Να βρεθεί η ακτίνα του κύκλου που έχει εμβαδόν ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των δύο αρχικών κύκλων.

(Απ: 5x)

1.3. Πολυώνυμα – Πρόσθεση και Αφαίρεση πολυωνύμων (2 διδακτικές ώρες)

Δραστηριότητα

Με τη δεύτερη ερώτηση της δραστηριότητας μάς παρέχεται η δυνατότητα να δώσουμε τον ορισμό του πολυωνύμου, ενώ με την τρίτη να ορίσουμε το βαθμό του.

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές πρέπει:

- Να διακρίνουν αν μια αλγεβρική παράσταση είναι πολυώνυμο, να προσδιορίζουν το βαθμό του και να γνωρίζουν πότε δυο πολυώνυμα είναι ίσα.
- Να χρησιμοποιούν την αναγωγή ομοίων όρων για την απλούστερη γραφή μιας αλγεβρικής παράστασης, να μάθουν να προσθέτουν και να αφαιρούν πολυώνυμα.

Διδακτικές οδηγίες

- Με τον όρο πολυώνυμο εννοούμε το ακέραιο πολυώνυμο και γι' αυτό η διδασκαλία δεν πρέπει να επεκταθεί σε πιο σύνθετες αλγεβρικές παραστάσεις.
- Να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στην αναγωγή ομοίων όρων με την οποία απλουστεύεται η μορφή ενός αθροίσματος μονωνύμων ή πολυωνύμων.
- Με αφορμή το παράδειγμα 3, να εξηγηθεί για ένα πολυώνυμο P(x), πώς βρίσκονται οι παραστάσεις $P(2x)$, $P(-x)$, $P(x^2)$, κ.τ.λ.
- Με την ερώτηση κατανόησης 3 (κατακόρυφη εκτέλεση αθροίσματος – διαφοράς πολυωνύμων) προετοιμάζεται ο μαθητής για την εκτέλεση της διαίρεσης πολυωνύμων.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις κατανόησης

1. β, γ, **2.** α, γ, **3.** ναι, **4.** γ, **5. α)** 3, **β)** 0 ή 1 ή 2

Συμπληρωματικά θέματα

1. Να αποδείξετε ότι, αν από το εμβαδόν $3x^2 + 5x + 21$ ενός ορθογωνίου αφαιρέσουμε τα εμβαδά $x^2 + x + 4$, $2x^2 + 4x + 1$ δύο άλλων ορθογωνίων θα βρούμε το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς 4.
2. Αν $P(x)= 4x^2 - 3x$ και $Q(x)= 36x^2 + 9x$ να αποδείξετε ότι: $P(3x) - Q(-x) = 0$.

1.4. Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων (2 διδακτικές ώρες)

Δραστηριότητα

Με αφορμή τις αντίστοιχες πράξεις μεταξύ αριθμών οι μαθητές «ανακαλύπτουν» τον τρόπο με τον οποίο γίνεται ο πολλαπλασιασμός μονωνύμου με πολυώνυμο ή πολυωνύμου με πολυώνυμο.

Δίνεται έτσι η δυνατότητα να διαπιστώσουν για μια ακόμα φορά τις **ομοιότητες** μεταξύ αριθμητικού και αλγεβρικού λογισμού.

Διδακτικοί στόχοι

Να μάθουν οι μαθητές να πολλαπλασιάζουν μονώνυμο με πολυώνυμο και πολυώνυμο με πολυώνυμο.

Διδακτικές οδηγίες

Με συγκεκριμένα παραδείγματα να διαπιστώσουν οι μαθητές ότι ο βαθμός του γινομένου δυο πολυωνύμων ισούται με το άθροισμα των βαθμών τους προκειμένου να το χρησιμοποιήσουν αργότερα στην διαίρεση πολυωνύμων (ερώτηση κατανόησης 2).

Απαντήσεις στις ερωτήσεις κατανόησης

1. $\alpha \to 5$, $\beta \to 7$, $\gamma \to 1$, $\delta \to 3$, $\varepsilon \to 6$ **2.** Λ – Σ

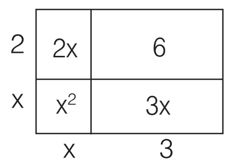
3. **α)** 4, $2x^2$, **β)** xy, $6x^2$, **γ)** $2x$, $3x$, 15, **δ)** y^2, x^3, xy, **4.** **i)** γ, **ii)** δ **5.** α, δ

Συμπληρωματικά θέματα

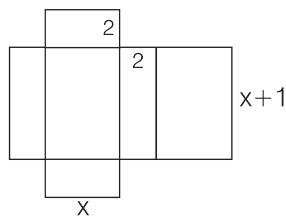
1. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση
Τα πολυώνυμα $P(x) = (x-2)(x-3)$ και $Q(x) = \alpha x^2 + \beta x + 6$ είναι ίσα, όταν
α) $\alpha = 1$ και $\beta = 5$, **β)** $\alpha = 2$ και $\beta = 3$ **γ)** $\alpha = 1$ και $\beta = -5$ **δ)** $\alpha = -5$ και $\beta = 1$
(Απ: γ)

2. Αν $P(x) = 3x(-2x+4)(x-1)$ και $Q(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, να βρείτε τις τιμές των α, β, γ, δ, ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα.
(Απ: $\alpha = -6$, $\beta = 18$, $\gamma = -12$, $\delta = 0$)

3. Να υπολογίσετε το γινόμενο $(x+2)(x+3)$ και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.
(ανάλογη είναι και η ερωτ. καταν. 5 στο βιβλίο του μαθητή)
(Απ: ⟶



4. Ένας βιοτέχνης για να κατασκευάσει ορθογώνια κουτιά χρησιμοποιεί το διπλανό σχέδιο. Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας και ο όγκος του κουτιού ως συνάρτηση του x.
(Απ: $2x^2 + 10x + 4$, $2x^2 + 2x$)



1.5. Αξιοσημείωτες ταυτότητες (6 διδακτικές ώρες)

Δραστηριότητα

Με τη δραστηριότητα δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να θυμηθούν την έννοια της ταυτότητας και να γνωρίσουν την ταυτότητα $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ μέσα από τη γεωμετρική ερμηνεία της. Η δραστηριότητα μπορεί να συμπληρωθεί με ένα ακόμη ερώτημα δ) Ισχύει η προηγούμενη ισότητα και για αρνητικές τιμές του x;

Διδακτικοί στόχοι

- Να γνωρίζουν πότε μια ισότητα λέγεται ταυτότητα, ποιές είναι οι βασικές ταυτότητες, τις οποίες να μπορούν να τις αποδεικνύουν και να τις χρησιμοποιούν.
- Να αποδεικνύουν άλλες απλές ταυτότητες.

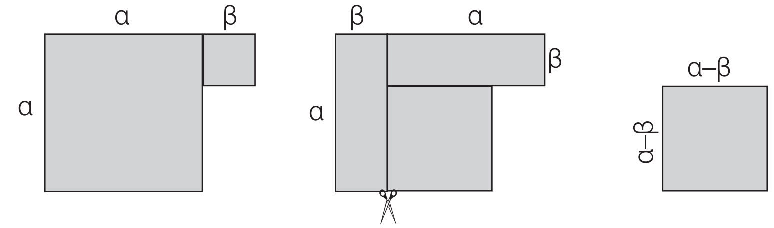
Διδακτικές οδηγίες

- Οι μαθητές πρέπει να μάθουν να διατυπώνουν λεκτικά τις βασικές ταυτότητες και να μην περιοριστούν μόνο στην αναγραφή τους γιατί τους διευκολύνει στη χρησιμοποίησή τους.
- Η ενότητα αυτή προσφέρεται για την εξάσκηση των μαθητών στην αποδεικτική διαδικασία.
- Συμπληρωματικά μπορεί να δοθεί προς συμπλήρωση και ο παρακάτω πίνακας.
  Για τους οποιουσδήποτε αριθμούς x, y να αντιστοιχίσετε σε κάθε έκφραση της στήλης Α τη συμβολική γραφή της από τη στήλη Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α. Το διπλάσιο γινόμενό τους.	**1.** $2(x+y)^2$
β. Το τετράγωνο του αθροίσματός τους.	**2.** $2xy$
γ. Το άθροισμα των τετραγώνων τους.	**3.** $(x+y)^2$
δ. Το τετράγωνο του γινομένου τους.	**4.** x^2+y^2
ε. Το διπλάσιο του αθροίσματός τους.	**5.** $(xy)^2$
στ. Το διπλάσιο του τετραγώνου του αθροίσματός τους.	**6.** $2(x+y)$

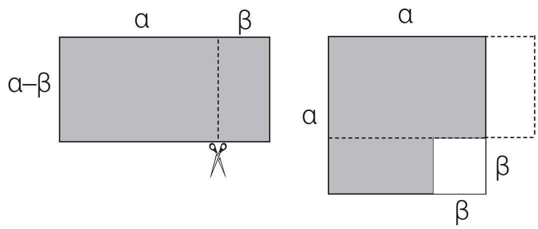
- Η άσκηση 4 μπορεί να συμπληρωθεί με ένα ακόμα παράδειγμα $(\ldots+\ldots)^2 = \ldots + 8\alpha\beta + \ldots$, το οποίο δεν έχει μια μοναδική λύση, αφού $8\alpha\beta = 2(4\alpha)\beta = 2\alpha(4\beta) = 2(2\alpha)(2\beta) = 2(8\alpha)(\frac{\beta}{2}) = \ldots$
- Η γεωμετρική ερμηνεία της ταυτότητας $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ βοηθά τους μαθητές να την κατανοήσουν καλύτερα αλλά και να δουν την αλληλεξάρτηση της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας.
- Μπορεί να δοθεί ως δραστηριότητα η γεωμετρική ερμηνεία και άλλων ταυτοτήτων. Για παράδειγμα: Να εξηγήσετε ποια ταυτότητα ερμηνεύουν τα παρακάτω σχήματα

1.



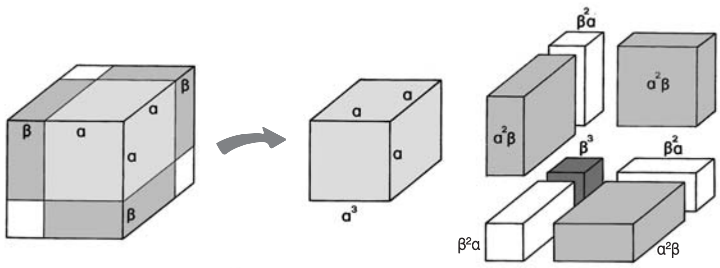
Απ: $\alpha^2+\beta^2 \quad - \quad 2\alpha\beta \quad = \quad (\alpha-\beta)^2$

2.



Απ: $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) \quad = \quad \alpha^2 - \beta^2$

3.



Απ: $(\alpha + \beta)^3 \quad = \quad \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

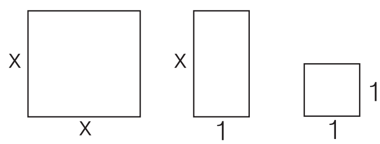
Απαντήσεις στις ερωτήσεις κατανόησης

1. α, γ, δ, **2.** i) δ , ii) γ iii) γ **3.** Λ – Σ – Λ – Λ **4.** i) γ, ii) δ **5.** Λ – Λ – Λ – Σ
6. i) γ, ii) β, iii) δ, iv) γ v) δ **7.** α→4, β→5, γ→1, δ→2, ε→7, στ→8

Συμπληρωματικά θέματα

1. (*Ανάλογο είναι και το πρόβλημα 16 της σελ. 50).*
   - *Σκεφτείτε ένα διψήφιο αριθμό και βρείτε το τετράγωνό του.*
   - *Βρείτε στη συνέχεια το τετράγωνο του αθροίσματος των ψηφίων του αριθμού που σκεφτήκατε και αφαιρέστε τα δυο αποτελέσματα.*
   - *Ο αριθμός που βρήκατε διαιρείται ακριβώς με το 9.*
     Μπορείτε να το εξηγήσετε ; (Απ: $(10\alpha + \beta)^2 - (\alpha + \beta)^2 = 99\alpha^2 + 18\alpha\beta$)

2. Πόσα από το κάθε είδος των διπλανών σχημάτων πρέπει να χρησιμοποιήσετε για να σχηματίσετε ένα τετράγωνο με πλευρά
   α) $x + 3$, β) $2x + 1$
   (Απ: α) 1 – 6 – 9 β) 4 – 4 – 1)



3. Να υπολογίσετε από μνήμης τις παραστάσεις

α) $15^2 - 5^2 =\ldots$	β) $12^2 - 8^2 =\ldots$
$105^2 - 95^2 =\ldots$	$102^2 - 98^2 =\ldots$
$1005^2 - 995^2 = \ldots$	$1002^2 - 998^2 = \ldots$

4. α) Να αποδείξετε ότι:
   $5^2 - 4^2 = 5 + 4$
   $12^2 - 11^2 = 12 + 11$
   $65^2 - 64^2 = 65 + 64$
   $134^2 - 133^2 = 134 + 133$

β) Με βάση τις προηγούμενες ισότητες να συμπληρώσετε τη φράση :
«Η διαφορά των τετραγώνων δύο...............φυσικών αριθμών ισούται με το............των αριθμών αυτών .»

γ) Να συμπληρώσετε την ισότητα
$4568^2 - \ldots\ldots = \ldots\ldots + \ldots\ldots$

5. α) Να αποδείξετε την ταυτότητα $\left(\dfrac{\nu+1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{\nu-1}{2}\right)^2 = \nu$ για $\nu \geq 2$

β) Να αποδείξετε ότι κάθε περιττός αριθμός γράφεται ως διαφορά τετραγώνων δύο αριθμών.

6. Ο τηλεφωνικός κατάλογος μιας πόλης περιέχει 9991 ονόματα γραμμένα σε λιγότερες από 100 σελίδες και κάθε σελίδα περιέχει τον ίδιο αριθμό ονομάτων. Ο Γιώργος δεν μπόρεσε να προσδιορίσει πόσες ακριβώς σελίδες περιέχει ο κατάλογος. Ο Δημήτρης όμως παρατήρησε ότι ο αριθμός 9991 = 10000 – 9 και με απλούς συλλογισμούς προσδιόρισε ακριβώς τον αριθμό των σελίδων του καταλόγου. Μπορείτε να βρείτε τους συλλογισμούς που έκανε ο Δημήτρης;
(Απ : $9991 = 10000 - 9 = 100^2 - 3^2 = 103 \cdot 97$ Άρα έχει 97 σελίδες).

Ενδεικτικά προτεινόμενος σχεδιασμός διδασκαλίας της ενότητας 1.5

(6 διδακτικές ώρες)

1η διδακτική ώρα
- Εισαγωγή στην έννοια της ταυτότητας – Τετράγωνο αθροίσματος (Απόδειξη και γεωμετρική ερμηνεία).
- Ερωτήσεις κατανόησης 1, 2i, ii.
- Προτεινόμενες ασκήσεις 1, 15.

2η διδακτική ώρα
- Τετράγωνο διαφοράς.
- Ερωτήσεις κατανόησης 2, iii, 3.
- Παραδείγματα – Εφαρμογές 1.
- Προτεινόμενες ασκήσεις 2, 3, 4, 16, 17.

3η διδακτική ώρα
- Κύβος αθροίσματος – Διαφοράς.
- Ερωτήσεις κατανόησης 4, 5.
- Παραδείγματα – Εφαρμογές 2.
- Προτεινόμενες ασκήσεις 5.
- **Εργασία:** Τρίγωνο του Pascal.

4η διδακτική ώρα
- Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά.
- Ερωτήσεις κατανόησης 6i, ii, iii.
- Παραδείγματα – Εφαρμογές 3, 4, 5.
- Προτεινόμενες ασκήσεις 6, 7, 8, 9, 18.

5η διδακτική ώρα
- Διαφορά – Αθροίσματος κύβων.
- Ερωτήσεις κατανόησης 6, iv, v.
- Παραδείγματα – Εφαρμογές 6, 7.
- Προτεινόμενες ασκήσεις 10, 13.

6η διδακτική ώρα
- Επανάληψη.
- Ερωτήσεις κατανόησης 7.
- Παραδείγματα – Εφαρμογές 11, 12, 14.
- Γενικές ασκήσεις 5, 6.
- **Εργασία:** Πυθαγόρειες τριάδες.

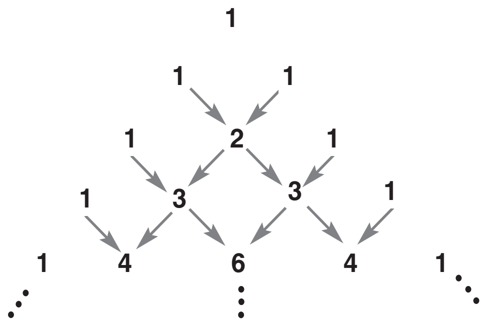
Σημείωση: Στο σχεδιασμό της διδασκαλίας κάθε ενότητας, σε κάθε διδακτική ώρα συμπεριλαμβάνονται όλες οι ερωτήσεις κατανόησης, τα παραδείγματα – εφαρμογές, οι προτεινόμενες και οι γενικές ασκήσεις που αναφέρονται στο περιεχόμενο της ενότητας. Ο διδάσκων θα κρίνει ποιες και πόσες από αυτές θα διδαχθούν.
Η σημείωση αυτή ισχύει και για όλους τους επόμενους προτεινόμενους σχεδιασμούς διδασκαλίας

Το αριθμητικό τρίγωνο του Pascal

Ανάμεσα στα αριθμητικά τρίγωνα, το τρίγωνο του Pascal (1623-1662μ.Χ) κατέχει ξεχωριστή θέση λόγω των πολλών ιδιοτήτων που έχουν οι αριθμοί που το σχηματίζουν.

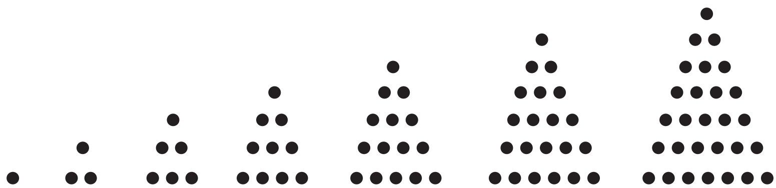
Ο πρώτος και ο τελευταίος αριθμός κάθε σειράς είναι 1. Κάθε ενδιάμεσος αριθμός μιας σειράς του τριγώνου είναι το άθροισμα των δυο πλησιέστερων αριθμών της προηγούμενης σειράς

π.χ. 3 =1+ 2, 4 =1+3,....



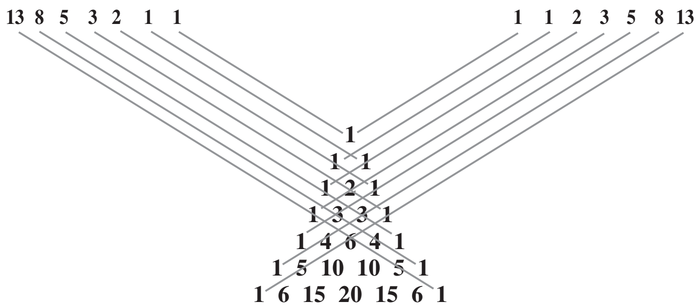
Από τις ιδιότητες του τριγώνου Pascal αναφέρουμε τις εξής :

1. Οι αριθμοί κάθε σειράς είναι οι συντελεστές των δυνάμεων του διωνύμου α + β.
   Οι συντελεστές του διωνύμου παίζουν σπουδαίο ρόλο στα προβλήματα συνδυαστικής και πιθανοτήτων, καθώς δίνουν το πλήθος όλων των δυνατών περιπτώσεων ενός πειράματος τύχης όπως θα δούμε στο αντίστοιχο κεφάλαιο. (κεφάλαιο 5 σελ. 181)
2. Το άθροισμα των αριθμών κάθε σειράς είναι δύναμη του 2, π.χ.
   $1= 2^0$, $1+1= 2 = 2^1$, $1+2+1= 4 =2^2$, $1+3+3+1= 8 =2^3$, $1+4+6+4+1=16= 2^4$....
3. Οι αριθμοί που σχηματίζουν οι πέντε πρώτες σειρές είναι δυνάμεις του 11,
   π.χ. $1=11^0$, $11=11^1$, $121 =11^2$, $1331=11^3$, $14641 = 11^4$.
4. α) Η 1η διαγώνια σειρά περιέχει μόνο τον αριθμό 1.
   β) Η 2η διαγώνια σειρά περιέχει τους φυσικούς αριθμούς 1, 2, 3, 4,...



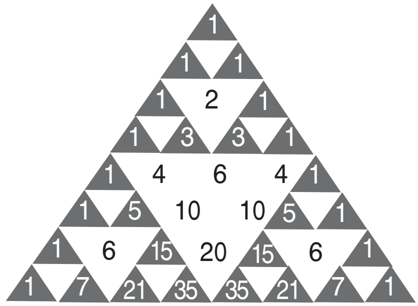
1 3 6 10 15 21 28

   γ) Η 3η διαγώνια σειρά περιέχει τους **τριγωνικούς** αριθμούς 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... δηλαδή τους αριθμούς που παριστάνονται στο επίπεδο με τη μορφή τριγώνου όπως τα παραπάνω σχήματα.
5. Στο τρίγωνο Pascal εμφανίζεται ακόμη και η ακολουθία των αριθμών Fibonaci 1, 1, 2, 3, 5,..., όπως παρατηρήθηκε τον 19^0 αιώνα.



Οι δύο πρώτοι όροι της ακολουθίας αυτής είναι μονάδες, ενώ κάθε άλλος όρος της προκύπτει από το άθροισμα των δύο προηγουμένων όρων.

6. Αν στο τρίγωνο του Πασκάλ χρωματίσουμε τις μονάδες και τους περιττούς αριθμούς, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τότε εμφανίζεται ένα σχέδιο με μικρότερα και μεγαλύτερα τρίγωνα. Σχηματίζεται έτσι ένα fractal που είναι γνωστό με το όνομα τρίγωνο Sierprinski.



Βιβλιογραφία

– *Περιοδικό «Ευκλείδης Α'», της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας , διάφορα τεύχη.*
– *Α. Αλμπινίσης κ.ά. Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου.*
– *E.T. Bell, Οι Μαθηματικοί, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης,, τόμος Ι, Ηράκλειο 1995.*
— *Χανς Εντσενσμπέργκερ, Το πειραχτήρι των αριθμών, εκδόσεις Ψυχογιός, Αθήνα 2000.*
– *http://mathforum.org/workshops/usi/pascal/pascal.links.htm*
– *http://jwilson. coe.uga.edu/* – *http://ptri1.tripod.com/*

Ένα θέμα από την Ιστορία των Μαθηματικών
Πυθαγόρειο θεώρημα και Πυθαγόρειες τριάδες

Ο Πρόκλος (5ος αιώνας μ.Χ.) στο έργο του «Σχόλιο στο πρώτο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη» αναφέρει δυο μεθόδους εύρεσης Πυθαγόρειων τριάδων στην αρχαία Ελλάδα.

Η πρώτη μέθοδος αποδίδεται στους Πυθαγόρειους οι οποίοι σχημάτιζαν τριάδες από τους αριθμούς της μορφής $\frac{\mu^2+1}{2}$, $\frac{\mu^2-1}{2}$, μ, όπου μ περιττός μ = 3, 5, 7,...

(Οι Πυθαγόρειοι και οι αρχαίοι Έλληνες δε θεωρούσαν την μονάδα ως αριθμό). Κατά τους L. Bunt κ.τ.λ οι Πυθαγόρειοι κατέληξαν στους τύπους αυτούς από την ενασχόλησή με τους παραστατικούς τετράγωνους αριθμούς).

Η δεύτερη μέθοδος αποδίδεται στο Πλάτωνα ο οποίος έδωσε ως λύση τους αριθμούς της μορφής $\frac{\mu^2}{4}+1$, $\frac{\mu^2}{4}-1$, μ, όπου μ άρτιος (μ = 4, 6, 8,...)

Οι τύποι των Πυθαγορείων και του Πλάτωνα είναι αμοιβαία συμπληρωματικοί.

Με το θέμα των Πυθαγόρειων τριάδων ασχολήθηκε και ο **Ευκλείδης**, ο οποίος μάλιστα στο λήμμα 1 της πρότασης 28 του Χ βιβλίου των Στοιχείων του δίνει μια μέθοδο εύρεσης δυο τετράγωνων αριθμών των οποίων το άθροισμα είναι τετράγωνος αριθμός (δηλαδή Πυθαγόρειες τριάδες) με γεωμετρική κατασκευή και με την προϋπόθεση ότι οι αριθμοί είναι και οι δυο άρτιοι ή και οι δυο περιττοί.

Το πρόβλημα της κατασκευής Πυθαγόρειων τριάδων από οποιουσδήποτε αριθμούς λύθηκε οριστικά από τον **Διόφαντο** ο οποίος στηριζόμενος σε μια ταυτότητα, η οποία ήταν γνωστή και στον Ευκλείδη, ανακάλυψε ότι οι αριθμοί της μορφής $\lambda^2+\mu^2$, $\lambda^2-\mu^2$, $2\lambda\mu$, όπου λ, μ θετικοί άνισοι ακέραιοι αριθμοί, αποτελούν Πυθαγόρεια τριάδα. Η λύση περιέχεται στο Βιβλίο του Αριθμητικά, ένα έργο το οποίο πιθανότητα γράφτηκε τον 3ο μ.Χ. αιώνα και αναφέρεται σε προβλήματα των οποίων οι λύσεις είναι ακέραιοι ή γενικότερα ρητοί αριθμοί.

Το πρόβλημα των πυθαγόρειων τριάδων, παρόλο που θυμίζει το Πυθαγόρειο θεώρημα για ορθογώνια τρίγωνα στην ουσία είναι ένα αλγεβρικό πρόβλημα, αφού σχετίζεται με την εύρεση των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $z^2 = x^2 + y^2$.

Όταν λύθηκε το πρόβλημα των Πυθαγόρειων τριάδων πολλά συναφή προβλήματα κίνησαν το ενδιαφέρον των μεταγενέστερων μαθηματικών. Ένας από αυτούς ο Pierre de Fermat (1601-1665), στο περιθώριο του αντιτύπου των Αριθμητικών του Διόφαντου που διέθετε και πλάι στον ισχυρισμό του ότι δεν υπάρχουν φυσικοί αριθμοί x, y, z, n με $n>2$ ώστε $x^n + y^n = z^n$, έγραψε : *«Έχω ανακαλύψει μια πραγματικά θαυμάσια απόδειξη, αλλά το περιθώριο αυτό είναι πολύ στενό για να το χωρέσει».*

Αν διέθετε ή όχι μιαν απόδειξη, δεν θα το μάθουμε ποτέ. Η αναζήτηση όμως για περισσότερα από 350 χρόνια της απόδειξης της πρότασης αυτής, γνωστής ως **το τελευταίο θεώρημα του Fermat**, που «υπήρχε και χάθηκε», συνεισέφερε πολλά στην ανάπτυξη των Μαθηματικών. Η απόδειξη δόθηκε τελικά το 1995 από τον Andrew Wiles.

Επισήμανση

Κατά την πραγμάτευση του θέματος αυτού η τάξη μπορεί να χωριστεί σε ομάδες και καθεμιά από αυτές να ασχοληθεί με μια μόνο περίπτωση .

Βιβλιογραφία

- *A. Aczel: Το τελευταίο θεώρημα του Fermat , εκδόσεις Τροχαλία, Αθήνα 1998.*
- *L.Bunt- Ph. Jones - J.Bedient : Οι ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών Μαθηματικών, μετάφραση Άννα Φερεντίνου, εκδόσεις Γ. Α. Πνευματικός , Αθήνα 1981*
- *Th. L.Heath : Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών, Κέντρο Έρευνας Επιστήμης και Εκπαίδευσης, Αθήνα 2001.*
- *Ε. Σ. Σταμάτη : Ιστορία των Ελληνικών μαθηματικών, Αθήνα 1975.*
- *Π. Βερύκιος : Πυθαγόρειες τριάδες και ταυτότητες, περιοδικό της ΕΜΕ «Ευκλείδης Α», τεύχη 37-38.*

Ενδεικτικό σχέδιο κριτηρίου αξιολόγησης

Διδακτική Ενότητα **(Διάρκεια 45 min)**

- Αξιοσημείωτες ταυτότηπτες

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να συμπληρώσετε τον πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παράσταση της στήλης Α το ανάπτυγμά της από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Α
	1. $α^3 - 1$
α. $(α + 4)^2$	**2.** $α^3 - 3α + 3α^2 - 1$
β. $(-4 + α)^2$	**3.** $α^2 + 8α + 8$
γ. $(4α - 3)(4α + 3)$	**4.** $4α^2 - 9$
δ. $(α - 1)^3$	**5.** $α^3 - 3α^2 + 3α - 1$
ε. $(α - 1)(α^2 + α + 1)$	**6.** $α^2 - 8α + 16$
	7. $16α^2 - 9$
	8. $α^2 + 8α + 16$

α	
β	
γ	
δ	
ε	

(2,5 Μονάδες)

Β. Να αποδείξετε ότι $(α + β)^3 = α^3 + 3α^2β + 3αβ^2 + β^3$ **(4,5 Μονάδες)**

ΘΕΜΑ 2ο

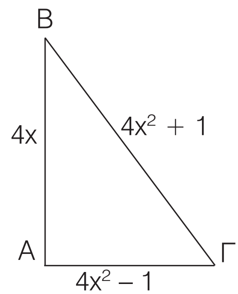
Να αποδείξετε ότι $(x + 2y)^2 - (y - 2x) \cdot (y + 2x) + (2x - y)^2 = 9x^2 + 4y^2$ **(6,5 Μονάδες)**

ΘΕΜΑ 3ο

Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $ΑΓ = 4x^2 - 1$, $ΑΒ = 4x$, $ΒΓ = 4x^2 + 1$.

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

(6,5 Μονάδες)



Internet και Μαθηματικά – Οι ταυτότητες

Σε διάφορους δικτυακούς τόπους και ιστοσελίδες στο Internet υπάρχουν πολλές αλληλεπιδραστικές δραστηριότητες με τις βασικές ταυτότητες (π.χ. www.e-yliko.gr του ΥΠΕΠΘ, προτάσεις διδασκαλίας). Ακόμα σε διάφορες ιστοσελίδες υπάρχουν τέστ αυτοαξιολόγησης στα οποία μπορεί να ανατρέξει ο μαθητής προκειμένου να ελέγξει τις γνώσεις του.

Σχέδιο διαθεματικής εργασίας
ΘΕΜΑ: Η έννοια της «απόδειξης»

Απόδειξη σημαίνει εξήγηση, διασάφηση, τεκμηρίωση, ορθός συλλογισμός. Είναι η επιβεβαίωση της αλήθειας κατά τρόπο αναμφισβήτητο και χαρακτηρίζεται ως απτή, χειροπιαστή, τεκμηριωμένη, αδιάσειστη, πειστική, αδιαφιλονίκητη κ.ά. Σημαίνει ακόμα αποδεικτική μέθοδο (μαρτυρική, πειραματική, απόδειξη δια της εις άτοπον απαγωγής κ.τ.λ.). Στην απόδειξη φτάνει κανείς από τις προκείμενες προτάσεις (υποθέσεις) στο συμπέρασμα με επιχειρήματα με τέτοιο τρόπο, ώστε να μην προκύψει κανένα κενό τόσο στη σύνδεση υποθέσεων και συμπεράσματος, όσο και στη διαδοχή των επιχειρημάτων.
Τον 4ο αιώνα π.Χ ο Αριστοτέλης, μελετώντας τους συλλογισμούς, που ήταν ήδη γνωστοί από τα Μαθηματικά, έγραφε: ***«....δεῖ τόν λέγοντα μή φάναι μόνον, ἀλλά καί τήν αἰτίαν αὐτοῦ λέγειν καί μή τίθεσθαι μηδέν, μήδ᾽ ἀξιοῦν ἀξίωμα ἄλογον, ἀλλ᾽ ἤ ἐπαγωγήν ἤ ἀπόδειξιν φέρειν»*** (Αριστοτέλης, Φυσικά Θ2, 252α22). Δηλαδή *«...πρέπει όποιος λέει κάτι, να μην περιορίζεται σε ισχυρισμούς, αλλά να αναφέρεται και στην αιτία των όσων ισχυρίζεται και να μην αυθαιρετεί ούτε να αξιώνει να γίνει αποδεκτό κανένα παράλογο αξίωμα ή ισχυρισμός, αλλά να προσκομίζει απόδειξη των όσων υποστηρίζει.»*
Στο απόσπασμα αυτό περιγράφεται με σαφήνεια η ιδιαίτερη αποδεικτική μέθοδος κατάκτησης της γνώσης, την οποία αποδέχονταν αλλά και καλλιεργούσαν, οι φιλόσοφοι στον αρχαίο ελληνικό χώρο. Στους προελληνικούς πολιτισμούς της Ανατολικής Μεσογείου (Βαβυλώνιοι–Αιγύπτιοι), η γνώση δε στηριζόταν στην απόδειξη, αλλά απέρρεε από την αυθεντία τού ιερατείου, που κατείχε την εξουσία. Είχε επομένως χαρακτήρα **αποκαλυπτικό**. Αυτή ήταν η μορφή τής γνώσης που ταίριαζε περισσότερο στις δεσποτικές και θεοκρατικές εκείνες κοινωνίες. Όμως, ο Ελληνικός πολιτισμός, εκφραστής ιστορικών ανατροπών και ανακατατάξεων, από τον 6ο π.Χ. αιώνα καθιέρωσε διαφορετική στάση απέναντι στη γνώση με την ανάπτυξη της φιλοσοφίας και το πέρασμα από το μύθο στο λόγο. Απέκρουσε τη στήριξή της γνώσης στην αυθεντία και επιζήτησε τη στήριξη της στην λογική που αναδείχθηκε μέσα από την προβολή του ατόμου. Έτσι, η γνώση έπαψε να αποτελεί πειθαναγκασμό για τον μελετητή, ο οποίος με δική του πλέον ευθύνη, αφού πεισθεί, την αποδέχεται. Η πνευματική αυτή διεργασία, που ιστορικά πρωτοεμφανίζεται στην περιοχή των Ελληνικών Μαθηματικών, πήρε το όνομα «απόδειξη» και «αποδεικτικός συλλογισμός» και θεωρείται η αρχή της επιστημονικής σκέψης. Η δημόσια κριτική συζήτηση των απόψεων στο πλαίσιο της πόλης, γνώρισμα της δημοκρατίας, απαιτούσε επιχειρήματα για την υποστήριξή τους καθώς η δημόσια αποδοχή ή η κριτική των ιδεών αποτελούσαν μέρος της διαδικασίας νομιμοποίησή τους.
Η πρώτη απόδειξη στην ιστορία των Μαθηματικών αποδίδεται στον Θαλή τον Μιλήσιο (624-547 π. Χ), ο οποίος απέδειξε ότι η διάμετρος χωρίζει τον κύκλο σε δυο ίσα μέρη. Από τότε η απόδειξη έβαλε στέρεα θεμέλια στην ανάπτυξη των Μαθηματικών και έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην εξέλιξή τους. Η απόδειξη συνέβαλε ακόμη στη δημιουργία, όχι μόνο νέων μαθηματικών θεωριών, αλλά και νέων κλάδων στα Μαθηματικά, των οποίων η θεωρητική θεμελίωση καθόρισε την ιστορία τής ανθρωπότητας.

«Η έννοια της απόδειξης» θα μπορούσε να αποτελέσει θέμα για την οργάνωση και ανάπτυξη ενός σχεδίου εργασίας. Σκοπός της εργασίας αυτής θα είναι η διερεύνηση του ρόλου τής απόδειξης στην καθημερινή ζωή, στον πολιτικό λόγο, στο μάθημα της Γλώσσας, της Ιστορίας, των Μαθηματικών και των άλλων επιστημών.

Ενδεικτικές επισημάνσεις

Η μαθηματική απόδειξη θα γίνει καλύτερα αντιληπτή μέσα από την ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών. Η διαφορά των υπολογιστικών-προσεγγιστικών Μαθηματικών που χρησιμοποιούσαν οι λαοί τής Μεσοποταμίας σε σχέση με τα αποδεικτικά Μαθηματικά των αρχαίων Ελλήνων να αποτελέσει την κύρια ιδέα της μαθηματικής απόδειξης. Το θέμα θα ολοκληρωθεί με τη χρησιμότητα της απόδειξης στην καθημερινή συλλογιστική και πρακτική (π.χ. απόδειξη της ενοχής – αθωότητας στο δικαστήριο, κ.τ.λ.).

Προτεινόμενες δραστηριότητες

Οι μαθητές προτείνεται να χωριστούν σε **3 ομάδες**.

Η πρώτη ομάδα θα ασχοληθεί με την ιστορική εξέλιξη της απόδειξης στα Μαθηματικά. Θα διερευνήσει τα υπολογιστικά προσεγγιστικά Μαθηματικά των Βαβυλωνίων και των Αιγυπτίων από τα οποία απουσιάζει η απόδειξη (προβλήματα που περιέχονται στον πάπυρο του Ριντ (Rhind) και τις βαβυλωνιακές πινακίδες), καθώς και τις απαρχές της μαθηματικής απόδειξης από τους αρχαίους Έλληνες (Θαλής, Πυθαγόρας, Ευκλείδης κ.ά.). Τη διαφοροποίηση αυτή πρέπει να τη συνδέσει με την οργάνωση και τη δομή των κοινωνιών τους (μαζική κοινωνία, δεσποτισμός και θεοκρατία σε αντιδιαστολή με την προβολή της αξίας της προσωπικότητας και τη δημοκρατία).

Η δεύτερη ομάδα θα ασχοληθεί με τη έννοια και τη χρήση της απόδειξης:

Στο μάθημα της <u>Γλώσσας</u>: Να ζητηθεί η χρήση της απόδειξης για την αιτιολόγηση μιας άποψης, την υποστήριξη μιας θέσης, τη διευκρίνιση-επεξήγηση ενός θέματος, τη προβολή επιχειρημάτων, την ανάπτυξη συλλογισμών κ.τ.λ. εκ μέρους του πομπού ενός μηνύματος. Να ζητηθεί να ασκήσουν οι μαθητές κριτική στην πειθώ ενός άλλου κειμένου ως δέκτες ενός μηνύματος. Μπορεί να τους ζητηθεί ακόμα να γράψουν μια παράγραφο με αιτιολόγηση ενός θέματος που έχει επιλεγεί από τους ίδιους.

Στην <u>Ιστορία</u>: Να χρησιμοποιηθεί για την ανάδειξη γεγονότων μέσα από τη χρήση πηγών και ιστορικών μαρτυριών και την τεκμηρίωση ιστορικών κρίσεων.

Στην <u>Αρχαιολογία</u>: Χρησιμεύει στη χρονολογική κατάταξη ευρημάτων, στη διατύπωση πορισμάτων, επιστημονικών υποθέσεων κ.ά.

Στην <u>καθημερινή ζωή</u> (στις εμπορικές συναλλαγές, στο δικαστήριο, στη διαφήμιση κ.τ.λ.).

Η τρίτη ομάδα θα εντοπίσει τα είδη των αποδείξεων που χρησιμοποιούνται στα Μαθηματικά (ευθεία – άμεση απόδειξη, απαγωγή στο άτοπο, κ.τ.λ.), όπως τα έμαθαν μέσα από τα σχολικά τους βιβλία και θα τα συνδέσει με τις αντίστοιχες μορφές απόδειξης που χρησιμοποιούμε στη γλώσσα. Ακόμα μπορεί να τους ζητηθεί να βρουν και άλλα είδη αποδείξεων, π.χ. παραστατικές αποδείξεις δηλαδή αποδείξεις δίχως λόγια.

Πηγές: Διαδίκτυο, βιβλία ιστορίας των Μαθηματικών, λεξικά, εγκυκλοπαίδειες κ.α. Συμπληρωματικά προτείνονται και τα εξής βιβλία:

- *Θεόδωρος Εξαρχάκος : Ιστορία των Μαθηματικών, τόμος Α', Τα μαθηματικά των Βαβυλωνίων και των Αρχαίων Αιγυπτίων, Αθήνα 1997.*
- *Morris Kline : Τα μαθηματικά στο Δυτικό πολιτισμό, τόμος Α', εκδόσεις Κώδικας.*
- *O. Neugebauer : Οι θετικές επιστήμες στην αρχαιότητα, Β' έκδοση, Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης, Αθήνα 1990.*
- *B.L. van der Waerden : Η αφύπνιση της επιστήμης (Αιγυπτιακά, Βαβυλωνιακά και Ελληνικά Μαθηματικά) Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2000.*
- *Ιστορία του Ελληνικού Έθνους, Κλασικός Ελληνισμός (2), σελ 523, Εκδοτική Αθηνών.*

1.6. Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων (7 διδακτικές ώρες)

Δραστηριότητα

Με τη χρησιμοποίηση της επιμεριστικής ιδιότητας ο υπολογισμός των συγκεκριμένων αριθμητικών παραστάσεων γίνεται εύκολα και γρήγορα. Δίνεται έτσι η ευκαιρία στους μαθητές να διαπιστώσουν ότι σε ορισμένες περιπτώσεις είναι απαραίτητος ο μετασχηματισμός μιας παράστασης από άθροισμα σε γινόμενο.
Στο δεύτερο ερώτημα μέσα από ένα πρόβλημα και με τη βοήθεια της γνωστής ταυτότητας $R^2 - \rho^2 = (R + \rho)(R - \rho)$ θα διαπιστώσουν τη χρησιμότητα της παραγοντοποίησης στον υπολογισμό της αριθμητικής τιμής μιας παράστασης.

Με την παραγοντοποίηση επιτυγχάνουμε την <u>μεταβολή</u> (μετασχηματισμό) της μορφής μιας παράστασης με τη βοήθεια ενός <u>συστήματος</u> κανόνων.

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να μετατρέπουν αλγεβρικές παραστάσεις σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, όταν στην παράσταση υπάρχει:

α. Κοινός παράγοντας σε όλους τους όρους ή σε ομάδες όρων
β. Διαφορά τετραγώνων
γ. Διαφορά ή άθροισμα κύβων
δ. Ανάπτυγμα τετραγώνου.
ε. Τριώνυμο της μορφής $x^2+(\alpha + \beta)x + \alpha\beta$

Διδακτικές οδηγίες

- Να επισημανθεί ότι η παραγοντοποίηση μιας παράστασης είναι η αντίστροφη διαδικασία της ανάπτυξης ενός γινομένου. Έτσι, αν η επιμεριστική ιδιότητα και οι ταυτότητες γραφούν από «δεξιά» προς τα «αριστερά», δείχνουν πώς ένα συγκεκριμένο άθροισμα γίνεται γινόμενο. Με την παρατήρηση αυτή οι μαθητές θα συνειδητοποιήσουν ότι με την παραγοντοποίηση αλλάζει μόνο η μορφή της παράστασης.
- Η παραγοντοποίηση μιας παράστασης δεν πρέπει να παρουσιαστεί μόνο σαν μια τεχνική. Οι μαθητές θα πειστούν να ασχοληθούν μ' αυτή όταν διαπιστώσουν πόσο χρήσιμο εργαλείο είναι για τον μετασχηματισμό παραστάσεων. Η σημασία της αναδεικνύεται μέσα από την επίλυση εξισώσεων (παράδειγμα 1, ασκήσεις 3,11) και προβλημάτων (παράδειγμα 2, ασκήσεις 17, 18, 22, 24) . Σε επόμενη ενότητα θα διαπιστώσουν τη σημασία της στην απλοποίηση και τις πράξεις των ρητών παραστάσεων.
- Να μη διατεθεί πολύς χρόνος στην επίλυση εξισώσεων και την παραγοντοποίηση τριωνύμου, γιατί στο επόμενο κεφάλαιο υπάρχει σχετική ενότητα.
- Να επισημανθεί ότι υπάρχουν τριώνυμα που δεν παραγοντοποιούνται και άλλα που με τη συγκεκριμένη μέθοδο παραγοντοποιούνται δύσκολα, π.χ. $2x^2$-5x-3,.......

Απαντήσεις στις ερωτήσεις κατανόησης

1. α – γ – στ – ζ
2. **α)** $x + 2$, **β)** $3α – y$, **γ)** $6x$ **δ)** $x – 2$, **ε)** $x +1$, **στ)** $x – 2$
3. γ
4. Σ – Λ – Σ – Λ – Σ – Λ
5. Σωστό
6. **α)** $α^2 + 2α + 4$, **β)** $α^2 – 3α +9$, **γ)** $4x^2 + 2x +1$, **δ)** $1 – 5y +25y^2$
7. Λ – Σ – Λ – Σ **8. α)** $x + 3$, **β)** $2α – 1$, **γ)** $y^2 – 1$, **δ)** $5 + x^3$ **9.** γ

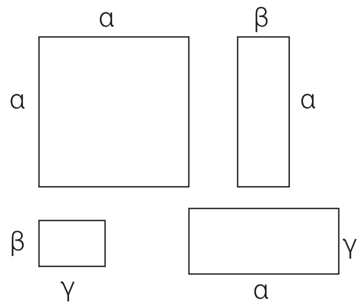
10.

αβ	α + β	α	β	(x+α)(x+β)
2	3	1	2	(x +1)(x + 2)
2	–3	–1	–2	(x – 1)(x – 2)
–6	5	6	–1	(x + 6)(x – 1)
6	5	2	3	(x + 2)(x + 3)
–2	–1	–2	1	(x – 2)(x + 1)
–2	1	2	–1	(x + 2)(x – 1)

11. **α)** $(x +α)(x +2)$, **β)** $(x + \sqrt{2})(x + \sqrt{3})$

Συμπληρωματικά θέματα

1. **α)** Πώς πρέπει να τοποθετήσουμε τα τέσσερα σχήματα ώστε να προκύψει ένα ορθογώνιο.
   β) Ποιες θα είναι οι διαστάσεις του;



(Απ: Οι διαστάσεις του θα είναι $α + β$, $α + γ$, αφού $α^2 + αβ + βγ +αγ = (α+β)(α+γ)$)

2. **α)** Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $α^2β – α + β – αβ^2$.
   β) Αν για τους άνισους αριθμούς α, β ισχύει: $α^2β – α = αβ^2 – β$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι.

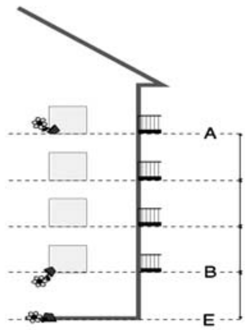
(Απ: $α^2β – α + β – αβ^2 = (α – β)(αβ – 1)$)

3. Αν δυο ακέραιοι διαιρούμενοι με το 6 δίνουν το ίδιο υπόλοιπο, τότε να αποδείξετε ότι, η διαφορά τετραγώνων τους είναι πολλαπλάσιο του 12.

(Απ: $α = 6κ + υ$, $β = 6λ + υ$, $α^2 – β^2 =....= 12 (κ – λ) (3κ + 3λ + υ)$)

4. Αν αφήσουμε ένα σώμα να πέσει από το σημείο Α, τότε μέχρι να φτάσει στο έδαφος θα μεσολαβήσει χρόνος t_1 sec. Αν το αφήσουμε να πέσει από το σημείο Β, θα μεσολαβήσει χρόνος t_2 που είναι 2 sec μικρότερος.
Αν το άθροισμα των χρόνων t_1, t_2 είναι 6 sec, να υπολογίσετε την απόσταση ΑΒ. (g = 10m/sec).

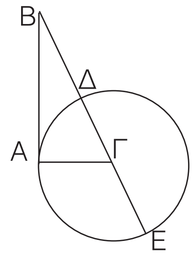
(Απ: $AB = \frac{1}{2}g(t_1^2 - t_2^2) = \ldots = 60m$)



Οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι με το πρόβλημα αυτό, γιατί ανάλογο είναι και το παράδειγμα 2 της ενότητας 1.2

5. Αν στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α = 90˚) είναι:
ΒΔ = 12cm, ΒΕ = 27 cm, να εξηγήσετε γιατί ΑΒ = 18 cm

(Απ: $AB^2 = B\Gamma^2 - \rho^2 = \ldots = B\Delta \cdot BE = 18^2$)



6. Να αποδείξετε ότι:

α) Ο αριθμός $\kappa^2 + \kappa$ είναι άρτιος, όπου κ ακέραιος αριθμός.

β) Ο αριθμός $\kappa^2 + 7\kappa$ είναι άρτιος, όπου κ ακέραιος αριθμός.

γ) Το τετράγωνο ενός περιττού ακεραίου διαιρούμενο δια 8 δίνει υπόλοιπο 1.

Ενδεικτικά προτεινόμενος σχεδιασμός διδασκαλίας της ενότητας 1.6

(7 διδακτικές ώρες)

1η διδακτική ώρα
- Εισαγωγή στην έννοια της παραγοντοποίησης με τη Δραστηριότητα – Κοινός παράγοντας.
- Ερωτήσεις κατανόησης 1, 2.
- Παραδείγματα – Εφαρμογές 1.
- Προτεινόμενες ασκήσεις 1, 2, 3.

2η διδακτική ώρα
- Κοινός παράγοντας κατά ομάδες.
- Ερωτήσεις κατανόησης 3.
- Παραδείγματα – Εφαρμογές 2.
- Προτεινόμενες ασκήσεις 4, 5, 6, 7.

3η διδακτική ώρα
- Διαφορά τετραγώνων.
- Ερωτήσεις κατανόησης 4, 5.
- Παραδείγματα – Εφαρμογές 3.
- Προτεινόμενες ασκήσεις 8, 9, 10, 11.

4η διδακτική ώρα
- Διαφορά – Άθροισμα κύβων
- Ερωτήσεις κατανόησης 6, 7.
- Προτεινόμενες ασκήσεις 12, 13, 14.

5η διδακτική ώρα
- Ανάπτυγμα τετραγώνου.
- Ερωτήσεις κατανόησης 8, 9.
- Προτεινόμενες ασκήσεις 15, 16, 17, 18.

6η διδακτική ώρα
- Τριώνυμο της μορφής $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$
- Ερωτήσεις κατανόησης 10, 11.
- Προτεινόμενες ασκήσεις 19, 20, 21.

7η διδακτική ώρα
- Επανάληψη – συμπλήρωση.
- Παραδείγματα – Εφαρμογές 4.
- Προτεινόμενες ασκήσεις 22, 23, 24.
- Γενικές ασκήσεις 9, 10.

Ενδεικτικό σχέδιο κριτηρίου αξιολόγησης

Διδακτική Ενότητα (Διάρκεια 45 min)

- Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες.

α) $5x^2 + 15xy - 10x\omega - 25x = 5x$ (.........................)

β) $\alpha(x^3 + 2) - \beta(x^3 + 2) + (x^3 + 2) =$ (..........)(............)

γ) $25x^2 - 9 =$ (.......-.3)(.......+ 3)

δ) $16x^2 - 24x + 9 =$(...........)^2

ε) $x^2 + (3 + 2)x + 3 \cdot 2 =$ (........)(........) (4 Μονάδες)

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες

α) $x^2(\alpha + \beta) - (\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)x^2$ β) $9 - 6\alpha + \alpha^2 = (\alpha - 3)^2$.

γ) $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)$. (3 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 2ο

α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $3x^3 - 12x$. (3 Μονάδες)

β) Να λύσετε την εξίσωση $4x^3 = 12x + x^3$. (3,5 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 3ο

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

$A = x^4 - x^2$, $B = x^3 + 2x^2 - x - 2$ και $A - B$. (6,5 Μονάδες)

1.7. Διαίρεση πολυωνύμων (3 διδακτικές ώρες)

Δραστηριότητα

Στο πρώτο ερώτημα οι μαθητές αφού κάνουν τη διαίρεση θα γράψουν την ισότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης ($325 = 19 \cdot 17 + 2$ δηλαδή $\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$). Την ισότητα αυτή θα τη χρησιμοποιήσουν για να απαντήσουν στο δεύτερο ερώτημα ($\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)$.) Αφού κάνουν τις πράξεις και προσδιορίσουν τον διαιρετέο Δ(x), θα συνειδητοποιήσουν την αναγκαιότητα της διαίρεσης, όταν ξέρουν τα πολυώνυμα Δ(x) και δ(x) και αναζητούν τα π(x) και υ(x).

Διδακτικοί στόχοι

- Να μάθουν οι μαθητές να βρίσκουν το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης δυο πολυωνύμων και να γράφουν την αντίστοιχη ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης.
- Να μάθουν πότε ένα πολυώνυμο είναι παράγοντας ενός άλλου πολυωνύμου και να μπορούν να το αποδεικνύουν.

Διδακτικές οδηγίες

- Να τονιστεί ότι ο βαθμός του πηλίκου είναι η διαφορά των βαθμών του διαιρέτη από το διαιρετέο (Ερώτηση κατανόησης 2).
- Η μοναδικότητα των πολυωνύμων π(x) και υ(x) εξασφαλίζεται αν υ(x) = 0 ή αν βαθμός υ(x) < βαθμός δ(x).
- Να επισημανθεί η χρησιμότητα της τέλειας διαίρεσης στην παραγοντοποίηση (παράδειγμα 1, ασκήσεις 5, 6, 9, 10, 11).
- Η εύρεση του υπολοίπου της διαίρεσης ενός πολυωνύμου με το x – ρ χωρίς να γίνει η διαίρεση δεν συμπεριλαμβάνεται στη διδακτέα ύλη της τάξης αυτής και επομένως η διδασκαλία να μην επεκταθεί στην εύρεσή του.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις κατανόησης

1. i) δ, ii) γ, iii) β **2.** 5 – 5 – 9 **3.** Σ – Λ – Λ – Σ – Σ

1.8. Ε.Κ.Π. – Μ.Κ.Δ ακεραίων αλγεβρικών παραστάσεων (1 διδακτική ώρα)

Δραστηριότητα

Με τη δραστηριότητα επιδιώκεται να θυμηθεί ο μαθητής πώς βρίσκεται το Ε.Κ.Π. και ο Μ.Κ.Δ θετικών ακεραίων αριθμών και με ανάλογο τρόπο να οδηγηθεί στον προσδιορισμό του Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ μονωνύμων και πολυωνύμων.

Διδακτικοί στόχοι

Να μάθουν οι μαθητές να βρίσκουν το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ ακεραίων αλγεβρικών παραστάσεων (μονωνύμων και πολυωνύμων).

Διδακτικές οδηγίες

- Η διδασκαλία να περιοριστεί στην εύρεση του Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ παραστάσεων οι οποίες, όταν αναλυθούν σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, έχουν αριθμητικούς παράγοντες θετικούς ακέραιους αριθμούς.
- Να τονιστεί ότι η εύρεση του Ε.Κ.Π. και του Μ.Κ.Δ. πολυωνύμων γίνεται αφού πρώτα αναλυθούν σε γινόμενο **πρώτων παραγόντων**.
- Να μη γίνει κατάχρηση με ΕΚΠ αφού ανάλογες ασκήσεις θα υποχρεωθούν οι μαθητές να λύσουν στις επόμενες ενότητες.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις κατανόησης

1. α→4, β→2, γ→1 **3.** α→2, β→4, γ→3

2.

$12x^3$	$6x^2(x-1)$	$18x^2(x-1)^2$
$4x^3(x-1)$	$2x^2(x-1)$	$9x^2(x-1)^2$
$8x^5$	$8x^5(x-1)$	$72x^5(x-1)^2$

4.

$3x$	$x(x-2)^2$	$6(x-2)^2$
x^2	$x^3(x-2)$	$2(x-2)$
$3x^2$	$x^3(x-2)^2$	$3(x-2)^3$

1.9. Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις (2 διδακτικές ώρες)

Δραστηριότητα

Με τη δραστηριότητα επιδιώκεται να «ανακαλύψουν» οι μαθητές πότε ορίζεται μια ρητή αλγεβρική παράσταση και πότε απλοποιείται. Με τη βοήθεια των αριθμητικών κλασμάτων, που προηγούνται, μπορούν να διαπιστώσουν πότε και πώς γίνεται η απλοποίηση ενός κλάσματος και το ίδιο θα μεταφέρουν στην απλοποίηση των αντίστοιχων ρητών παραστάσεων.

Διδακτικοί στόχοι

Να μάθουν οι μαθητές:
- Ποια παράσταση λέγεται ρητή και πότε αυτή ορίζεται.
- Να απλοποιούν ρητές αλγεβρικές παραστάσεις.

Διδακτικές οδηγίες

- Να τονιστεί ιδιαίτερα ότι **απλοποίηση σημαίνει διαίρεση** και των δυο όρων του κλάσματος με τον κοινό τους παράγοντα.
- Να τονιστεί ότι η απλοποίηση ρητών παραστάσεων γίνεται όταν ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι γινόμενα (Ερώτηση κατανόησης 2).
- Στην ενότητα αυτή βασικός στόχος είναι η απλοποίηση και όχι η εύρεση των τιμών για τις οποίες ορίζεται η παράσταση. Επομένως οι μεταβλητές των παραστάσεων που δίνονται, εννοείται ότι δεν παίρνουν τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή. Οι περιορισμοί για τις δυνατές τιμές των μεταβλητών ρητής παράστασης, να γράφονται εφόσον τούτο ζητείται και όχι σε κάθε περίπτωση.
- Να επισημανθούν τα συνηθισμένα λάθη που κάνουν οι μαθητές κατά την απλοποίηση ρητών παραστάσεων:

  π.χ. $\dfrac{\cancel{3x}+y}{\cancel{3x}} = y$ ή $\dfrac{x+\cancel{2}}{y+\cancel{2}} = \dfrac{x}{y}$ (Σχετική είναι και η ερώτηση κατανόησης 2)

Απαντήσεις στις ερωτήσεις κατανόησης

1. α→6, β→3, γ→4, δ→1, ε→5 **2.** Λ – Σ – Σ – Λ – Σ – Λ

3. **α)** $x-2$, **β)** $\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$, **γ)** $x+1$, **δ)** x, **ε)** $2(\alpha+\beta)$, **στ)** $(x+2)^2$

4. όχι γιατί πρέπει και $x \neq 0$.

Συμπληρωματικά θέματα

1. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

   α) $\dfrac{3+6+9 \ldots +300}{2+4+6 \ldots +200}$, **β)** $\dfrac{3x+6x+9x \ldots +300x}{2x+4x+6x \ldots +200x}$ $\left(\text{Απ: α) } \dfrac{3}{2}, \text{ β) } \dfrac{3}{2}\right)$

2. Ένα ορθογώνιο έχει εμβαδόν x^2+5x+6 και μήκος $x+3$. Ποιο είναι το πλάτος του;
   (Απ: $x+2$)

3. Να απλοποιηθεί το κλάσμα $\dfrac{x^3+1}{x^4+x^2+1}$. $\left(\text{Απ: } \dfrac{x+1}{x^2+x+1}\right)$

4. Να αντιστοιχίσετε σε κάθε κλάσμα της 1[ης] γραμμής το αντίστοιχό του απλοποιημένο κλάσμα από τη 2[η] γραμμή.

α) $\dfrac{x^2+x}{x}$, β) $\dfrac{x^2-x}{x-1}$, γ) $\dfrac{x^2-x}{x}$, δ) $\dfrac{x^2-x}{x^2-1}$

1. $\dfrac{x}{x+1}$, 2. $\dfrac{1}{x-1}$, 3. $x-1$, 4. $x+1$, 5. $\dfrac{x^2-x}{x^2-1}$, 6. x

(Απ: α ⟶ 4, β ⟶ 6, γ ⟶ 3, δ ⟶1)

1.10. Πράξεις ρητών παραστάσεων

Α Πολλαπλασιασμός – Διαίρεση ρητών παραστάσεων (1 διδακτική ώρα)

Δραστηριότητα

Με τη δραστηριότητα επιδιώκεται να θυμηθούν οι μαθητές τούς κανόνες με τους οποίους πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε αριθμητικά κλάσματα και με ανάλογο τρόπο να πολλαπλασιάζουν και να διαιρούν ρητές παραστάσεις.

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές πρέπει να μάθουν να πολλαπλασιάζουν και να διαιρούν ρητές παραστάσεις και να μετατρέπουν σύνθετα κλάσματα σε απλά.

Διδακτικές οδηγίες

- Οι πράξεις με τα αριθμητικά κλάσματα ολοκληρώνονται όταν καταλήξουμε σε ανάγωγο κλάσμα. Έτσι, μετά τις πράξεις ρητών παραστάσεων γίνονται και οι δυνατές απλοποιήσεις.
- Τα σύνθετα κλάσματα να εξηγηθούν ως διαίρεση δυο ρητών παραστάσεων για να κατανοηθεί καλύτερα ο κανόνας με τον οποίο τα μετατρέπουμε σε απλά.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις κατανόησης

1. Λ – Σ – Λ – Σ – Σ – Λ – Λ – Σ

2. α) $2x$, β) xy, γ) $4x$, δ) $\dfrac{x-1}{x+2}$, ε) $\dfrac{x+2}{x-1}$, στ) y

Συμπληρωματικά θέματα

1. Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις παρακάτω ισότητες με (Σ) αν είναι σωστή ή με (Λ) αν είναι λανθασμένη.

α) $\dfrac{x}{3}\cdot\dfrac{x+2}{y}=\dfrac{x\cdot x+2}{3y}$, β) $\dfrac{7}{x}\cdot\dfrac{x}{x+4}=\dfrac{7}{x+4}$, γ) $\dfrac{1+\dfrac{2}{y}}{\dfrac{3}{x}}=\dfrac{1+2x}{3y}$

δ) $x : \dfrac{y}{\omega + 1} = \dfrac{x \cdot \omega + 1}{y}$, ε) $\dfrac{\frac{5x}{\omega}}{\frac{y}{x}} = \dfrac{\omega y}{5x^2}$, στ) $\dfrac{x}{y} : \dfrac{x^2}{y^2} = \dfrac{y}{x}$

(Απ: Λ – Σ – Λ – Λ – Λ – Σ)

Β Πρόσθεση – Αφαίρεση ρητών παραστάσεων (2 διδακτικές ώρες)

Δραστηριότητα

Με τη δραστηριότητα, οι μαθητές αξιοποιούν τις γνώσεις που έχουν για την πρόσθεση – αφαίρεση ομώνυμων και ετερώνυμων αριθμητικών κλασμάτων και τις εφαρμόζουν στις αντίστοιχες πράξεις μεταξύ ρητών παραστάσεων.

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές πρέπει να μάθουν να προσθέτουν και να αφαιρούν ρητές αλγεβρικές παραστάσεις.

Διδακτικές οδηγίες

- Να τονιστεί ότι η μετατροπή ετερώνυμων ρητών παραστάσεων σε ομώνυμες γίνεται αφού προηγουμένως οι παρονομαστές αναλυθούν σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.
- Να επισημανθούν τα συνηθισμένα λάθη

$$\left(\text{π.χ. } \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta + \gamma}{\beta} = \frac{\alpha - \beta + \gamma}{\beta} \text{ αντί } \frac{\alpha - \beta - \gamma}{\beta}\right)$$

- Να μη γίνει κατάχρηση στον υπολογισμό του αθροίσματος υπερβολικά μεγάλων παραστάσεων οι οποίες κουράζουν τους μαθητές και των οποίων η παιδαγωγική σημασία είναι αμφίβολη.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις κατανόησης

1. Σ – Λ – Σ – Σ – Λ – Λ 2. Στο ερώτημα *β* το σωστό είναι $\dfrac{x + 3}{x + 1}$ και όχι 1.

3. α) $\dfrac{x}{x + 6}$, β) $\dfrac{6}{x + 6}$, γ) $\dfrac{x}{x + 1}$, δ) $\dfrac{6}{x + 2}$, ε) $\dfrac{1}{x}$, στ) $\dfrac{8}{x}$

Συμπληρωματικά θέματα

1. Αν μεταξύ των πλευρών α, β, γ τριγώνου ΑΒΓ ισχύει $\dfrac{\beta}{\alpha + \gamma} - \dfrac{\gamma}{\alpha + \beta} = 0$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

(Απ: β = γ)

2. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{x^2 + y^2}{x^2} + \dfrac{2y}{x} = \left(1 + \dfrac{y}{x}\right)^2$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο - Εξισώσεις – Ανισώσεις

2.1. Η εξίσωση αx + β = 0 (1 διδακτική ώρα)

Δραστηριότητα

Με τη δραστηριότητα, δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές μ' ένα πρόβλημα να καταλήξουν και στις τρεις μορφές της εξίσωσης $αx + β = 0$ $[x+(x+1)+(x+2) = 15$, $x+(x+1) + (x+2) = 3x$, $x +(x+1) + (x+2) = 3(x+1)$ ή αντιστοίχως $3x = 12$, $0x = -3$, $0x = 0]$.

Διδακτικοί στόχοι

Η ενότητα αυτή έχει διδαχθεί στις προηγούμενες τάξεις και επομένως η διδασκαλία της θα έχει **επαναληπτικό** χαρακτήρα. Στόχος είναι να θυμηθούν οι μαθητές πώς λύνεται μια εξίσωση πρώτου βαθμού καθώς και να αναγνωρίζουν πότε μια εξίσωση της μορφής $αx + β = 0$ έχει μια λύση είναι αδύνατη ή είναι ταυτότητα.

Διδακτικές οδηγίες

- Δεν πρέπει να διατεθούν επιπλέον ώρες για επανάληψη, αφού οι μαθητές θα έχουν και άλλες ευκαιρίες να ασχοληθούν με εξισώσεις α′ βαθμού.
- Η άσκηση 5 προσφέρεται για να καταλάβουν οι μαθητές καλύτερα πότε μια εξίσωση είναι ταυτότητα. Στην συνέχεια, θα μπορούσε να ζητηθεί από τους μαθητές να φτιάξουν και εκείνοι ανάλογα προβλήματα.
- Να μη διατεθεί χρόνος σε σύνθετες ασκήσεις διερεύνησης.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις κατανόησης

1. $α \to 1$, $β \to 3$, $γ \to 2$, $δ \to 1$ **2.** Σ – Λ – Σ – Λ – Σ

2.2. Εξισώσεις 2ου βαθμού (5 διδακτικές ώρες)

Δραστηριότητα

Με τη δραστηριότητα, δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να ασχοληθούν μ' ένα πρόβλημα με το οποίο καταλήγουν και στις τρεις μορφές της εξίσωσεις $αx^2 + βx + γ = 0$ με $α \neq 0$ $[x^2 = 9$, $(x + 3)^2 = 9(x + 1)$, $(x + 3)^2 + 9(x + 1) = 34$ ή αντιστοίχως $x^2 - 9 = 0$, $x^2 - 3x = 0$, $x^2 + 15x - 16 = 0]$.

Α Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων (2 διδακτικές ώρες)

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές πρέπει:

- Να μάθουν τη γενική μορφή μιας εξίσωσης 2ου βαθμού με έναν άγνωστο x και να διακρίνουν τους συντελεστές της.

- Να μπορούν να επιλύουν εξισώσεις 2ου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων (ελλιπείς μορφές $αx^2 + βx = 0$, $αx^2 + γ = 0$ και πλήρη μορφή με συμπλήρωση τετραγώνου).

Διδακτικές οδηγίες

– Ασκήσεις επίλυσης εξισώσεων με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων, οι μαθητές έχουν ήδη αντιμετωπίσει και στην ενότητα της παραγοντοποίησης. Με ανάλογο τρόπο θα επιλύσουν και εξισώσεις της μορφής $αx^2 + βx = 0$ με $α \neq 0$. Να επισημανθεί ότι τη μέθοδο αυτή τη χρησιμοποιούμε μόνο στην περίπτωση που το πρώτο μέλος της εξίσωσης είναι γινόμενο και το δεύτερο μέλος είναι μηδέν, γιατί έχει παρατηρηθεί ότι οι μαθητές την εφαρμόζουν και σε άλλες περιπτώσεις π.χ.:
Για τη λύση της εξίσωσης $(x + 3) + (x – 5) = 0$ γράφουν $x + 3 = 0$ και $x – 5 = 0$.
Για τη λύση της εξίσωσης $(x – 1) + (x – 2) + 12 = 0$ γράφουν $x – 1 = 0$ και $x – 2 = 0$.
Για την αποφυγή των προηγούμενων λαθών μπορεί να δοθεί συμπληρωματικά και η επίλυση των παρακάτω εξισώσεων
α) $x – 3(2x – 1) = 0$, β) $(x – 3) – (2x – 1) = 0$,
γ) $(x – 3)(2x – 1) = 0$, δ) $(x – 3)(2x – 1) = 3$.

– Με το παράδειγμα 2 γίνεται επέκταση της μεθόδου αυτής και για τη λύση εξισώσεων που έχουν βαθμό μεγαλύτερο από 2 και αναλύονται σε γινόμενο παραγόντων.

– Η συμπλήρωση τετραγώνου είναι σημαντική μέθοδος για την επίλυση μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο αυτή, στη λύση εξισώσεων $2^{ου}$ βαθμού που έχουν αριθμητικούς συντελεστές, προετοιμάζεται ο μαθητής και για την απόδειξη του τύπου που θα διδαχθεί στο επόμενο μάθημα. (άσκηση 5).

– Από τη λύση των ασκήσεων με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να αντιληφθούν ότι μια εξίσωση 2ου βαθμού μπορεί να έχει μια (διπλή), καμιά ή δύο λύσεις.

– Με την ερώτηση κατανόησης 3 δίνεται η ευκαιρία να συζητηθεί ένα πολύ συνηθισμένο λάθος των μαθητών.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις κατανόησης

1. Λ – Σ – Σ – Λ – Σ – Σ **2.** Σ – Λ – Σ, Σ **3.** Η απλοποίηση με x γίνεται εφόσον είναι $x \neq 0$

Συμπληρωματικά θέματα

1. Αν μια ρίζα της εξίσωσης $x^2 + αx – 4 = 0$ είναι το 2, ποια είναι η άλλη ρίζα της;
(Απ: –2)

2. Να λύσετε την εξίσωση $4x^2 + αx + 9 = 0$ αν η εξίσωση αυτή έχει κοινή λύση με την εξίσωση $2x + 1 = 0$. $\left(\text{Απ: } α = –20,\ x = -\frac{1}{2},\ x = -\frac{9}{2}\right)$

Β Επίλυση εξισώσεων 2ου βαθμού με τη βοήθεια τύπου (3 διδακτικές ώρες)

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές πρέπει:

- Να μάθουν να επιλύουν εξισώσεις δευτέρου βαθμού με τη βοήθεια του τύπου και να κατανοήσουν τη σημασία της διακρίνουσας για τον προσδιορισμό του πλήθους των λύσεων της εξίσωσης.
- Με απλά παραδείγματα να μάθουν να μετατρέπουν ένα τριώνυμο σε γινόμενο παραγόντων.

Διδακτικές οδηγίες

– Η άσκηση 3 δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να αντιληφθούν ότι σε ορισμένες περιπτώσεις η παραγοντοποίηση είναι συντομότερος τρόπος για την επίλυση των εξισώσεων δευτέρου βαθμού.

– Να τονιστεί ότι στην πλήρη μορφή ο πιο σύντομος τρόπος δεν είναι πάντοτε ο ίδιος,αλλά εξαρτάται από τη μορφή της εξίσωσης. Για παράδειγμα, οι ασκήσεις 6γ, 7α, 7β της προηγούμενης ενότητας (σελ. 93 βιβλίο μαθητή) λύνονται ευκολότερα με παραγοντοποίηση.

– Δεν πρέπει να διατεθεί χρόνος για:
  α) τη διερεύνηση πολύπλοκων εξισώσεων δευτέρου βαθμού
  β) την επίλυση προβλημάτων που θα διδαχτούν στην επόμενη ενότητα και τα οποία παρουσιάζουν ιδιαίτερη δυσκολία.

– Με συγκεκριμένο παράδειγμα (π.χ. $x^2 - 8x + 12$) να επισημανθεί στους μαθητές ότι η παραγοντοποίηση τριωνύμου που έμαθαν στην ενότητα 1.6 με $α = 1$ (εύρεση δύο αριθμών με άθροισμα –8 και γινόμενο 12, σελ. 57 στο βιβλίο του μαθητή) μπορεί να επιτευχθεί και με τον τύπο της παραγοντοποίησης αυτής της ενότητας. Πρέπει όμως να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στον τρόπο που χρησιμοποιούμε τα πρόσημα σε κάθε περίπτωση.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις κατανόησης

1. α → 2, β → 3, γ → 1, δ → 4 **2.** Λ – Σ – Λ **3.** β, δ

Απάντηση στην άσκηση 8 της σελ. 93 του βιβλίου του μαθητή ⟶

1	2		1	5
0		3	2	
	1	0		1
2	5		3	2

Συμπληρωματικά θέματα

Η κρυμμένη φράση

□	⊡	◧	★	□		∵	✶	✶	◆

Για να σχηματίσετε το πρώτο μέρος της φράσης, αντικαταστήστε κάθε σύμβολο με το γράμμα της αλφαβήτου που αντιστοιχεί στον αριθμό που βρήκατε (π.χ. 1 → Α, 2 → Β, ..., 24 → Ω).

□	Η λύση της εξίσωσης	$x^2 + 1 = 2x$
⊡	Το άθροισμα των λύσεων της εξίσωσης	$x^2 - 8x + 7 = 0$
◧	Η μεγαλύτερη λύση της εξίσωσης	$(x - 2)^2 = 25$
★	Η διαφορά των λύσεων της εξίσωσης	$x^2 - 17x + 30 = 0$
∵	Η μικρότερη λύση της εξίσωσης	$2(x - 8)^2 = 72$
✶	Λύση της εξίσωσης μικρότερη του 5	$(x - 2)^2 = 2x + 4$
◆	Η μεγαλύτερη λύση της εξίσωσης	$x^2 - \frac{9}{2}x + 2 = 0$

Απάντηση: □ 1 →Α, ⊡ 8 →Θ, ◧ 7 →Η, ★ 15 – 2 = 13 →Ν, ∵ →2, ✶ →0, ◆ →4

Ενδεικτικά προτεινόμενος σχεδιασμός διδασκαλίας της ενότητας 2.2

(5 διδακτικές ώρες)

Α. Επίλυση εξισώσεων 2ου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων

1η διδακτική ώρα
- Εισαγωγή στην έννοια της εξίσωσης 2ου βαθμού με τα 2 πρώτα ερωτήματα της Δραστηριότητας. Επίλυση εξισώσεων 2ου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων.
- Παραδείγματα – Εφαρμογές 1.
- Προτεινόμενες ασκήσεις 1, 2, 3, 4.

2η διδακτική ώρα
- 3ο ερώτημα Δραστηριότητας. Επίλυση εξίσωσης 2ου βαθμού με συμπλήρωση τετραγώνου.
- Ερωτήσεις κατανόησης 1, 2, 3.
- Παραδείγματα – Εφαρμογές 2.
- Προτεινόμενες ασκήσεις 5, 6, 7, 8.

Β. Επίλυση εξισώσεων 2ου βαθμού με τη βοήθεια τύπου

1η διδακτική ώρα
- Επίλυση εξισώσεων 2ου βαθμού με τη βοήθεια τύπου (απόδειξη-διερεύνηση).
- Ερωτήσεις κατανόησης 1.
- Παραδείγματα – Εφαρμογές 1.
- Προτεινόμενες ασκήσεις 1, 2, 3.

2η διδακτική ώρα
- Παραδείγματα εφαρμογές 2.
- Προτεινόμενες ασκήσεις 4, 5, 7, 8.

3η διδακτική ώρα
- Παραδείγματα – Εφαρμογές 3.
- Παραγοντοποίηση τριωνύμου
- Ερωτήσεις κατανόησης 2, 3.
- Προτεινόμενες ασκήσεις 6.
- **Εργασία:** Ένα θέμα από την ιστορία των μαθηματικών.

Ένα θέμα από την Ιστορία των Μαθηματικών
Οι Βαβυλώνιοι και η επίλυση της εξίσωσης 2ου βαθμού

Το θέμα από την Ιστορία των Μαθηματικών αφορά τον τρόπο επίλυσης των εξισώσεων δευτέρου βαθμού από τους Βαβυλώνιους. Οι βαβυλωνιακές πλάκες με μαθηματικό περιεχόμενο, που έχουν μεταφραστεί, περιέχουν προβλήματα της καθημερινής ζωής. Προβλήματα θεωρητικού περιεχομένου δεν υπάρχουν στα βαβυλωνιακά μαθηματικά. Το πρόβλημα που παρουσιάζεται στο βιβλίο του μαθητή είναι το δεύτερο από τα είκοσι τέσσερα προβλήματα που περιέχονται στην πήλινη βαβυλωνιακή πλάκα με τον κωδικό αριθμό 13901 και η οποία βρίσκεται στο Βρετανικό Μουσείο. Από το πρόβλημα αυτό αλλά και από άλλα προβλήματα αναλόγου περιεχομένου, διαπιστώνουμε ότι τους Βαβυλωνίους δεν τους απασχολούσε η γεωμετρική έννοια της ποσότητας, αφού πρόσθεταν επιφάνεια με μήκος, αλλά η ίδια η ποσότητα όπως αυτή εκφράζεται από τους συγκεκριμένους αριθμούς. Οι Βαβυλώνιοι την εποχή της πρώτης βαβυλωνιακής δυναστείας (1830 – 1530 π.Χ.) αν και δεν γνώριζαν αλγεβρικές μεθόδους και δεν είχαν αλγεβρικούς συμβολισμούς, κατείχαν με πρακτικό τρόπο την τεχνική επίλυσης των δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Με βάση τη σημερινή ορολογία και το σύγχρονο συμβολισμό ορισμένα από τα προβλήματα που έχουν βρεθεί γραμμένα στις διάφορες πλάκες οδηγούν στη λύση δευτεροβαθμίων εξισώσεων της μορφής

$$x^2 + \beta x = \gamma, \qquad x^2 - \beta x = \gamma, \qquad \alpha x^2 + \beta x = \gamma$$

Η βαβυλωνιακή μέθοδος επίλυσης εξίσωσης 2ου βαθμού μοιάζει με τον τρόπο που λύνουμε σήμερα μια δευτεροβάθμια εξίσωση (συμπλήρωση τετραγώνου). Η λύση του συγκεκριμένου προβλήματος που αναφέρεται στο σφηνοειδές κείμενο περιορίζεται στην απαρίθμηση των βημάτων που πρέπει να γίνουν για την επίλυση του προβλήματος χωρίς καμία διακαιολόγηση και αποτελούν ένα είδος «συνταγής». Σε κάθε βήμα δίνεται και το αντίστοιχο εξαγόμενο.

Με σύγχρονο συμβολισμό, αν εφαρμόσουμε τα βήματα των Βαβυλωνίων για την επίλυση της εξίσωσης $x^2 - \beta x = \gamma$, θα οδηγηθούμε στον τύπο $\frac{\beta + \sqrt{\beta^2+4\gamma}}{2}$ (στα βαβυλωνιακά κείμενα δεν υπάρχει πουθενά καταγεγραμμένος ένας τέτοιος τύπος).

1ο βήμα: Πάρε το $\frac{\beta}{2}$

2ο βήμα: Πολλαπλασίασέ το με τον εαυτό του $\frac{\beta}{2} \cdot \frac{\beta}{2} = \frac{\beta^2}{4}$

3ο βήμα: Πρόσθεσε στο αποτέλεσμα το σταθερό αριθμό γ $\left(\frac{\beta^2}{4} + \gamma\right)$ και υπολόγισε την τετραγωνική του ρίζα (Οι Βαβυλώνιοι έβρισκαν τις τετραγωνικές ρίζες είτε από πίνακες τετραγώνων αριθμών είτε προσεγγιστικά).

4ο βήμα: Για να βρεις το ζητούμενο πρόσθεσε στο αποτέλεσμα το $\frac{\beta}{2}$

$$\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \gamma} = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2+4\gamma}}{2}$$

Π.χ. για τη λύση της εξίσωσης $x^2 + x = \frac{3}{4}$ οι αριθμοί που προέκυπταν σύμφωνα με τα προηγούμενα βήματα ήταν $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} + \frac{3}{4}, = 1, \sqrt{1} = 1$ και επομένως η τιμή του x είναι $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Για την εξίσωση $x^2 + \beta x = \gamma$ ακολουθούσαν τα ίδια βήματα με τη διαφορά ότι στο 4ο βήμα αφαιρούσαν το $\frac{\beta}{2}$. Έτσι κατέληγαν στον τύπο $\sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \gamma} - \frac{\beta}{2} = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2+4\gamma}}{2}$

(0ι Βαβυλώνιοι καθώς και όλοι οι αρχαίοι λαοί δε χρησιμοποιούσαν αρνητικούς αριθμούς).

Οι Βαβυλώνιοι μπορούσαν να επιλύουν δευτεροβάθμιες εξισώσεις στις οποίες ο συντελεστής του x^2 δεν ήταν 1. Για παράδειγμα, για να λύσουν την εξίσωση $7x^2 + 6x = 1$, η οποία αναγράφεται σε μια άλλη πλάκα, πολλαπλασίαζαν και τα δύο μέλη της με το 7, οπότε η εξίσωση έπαιρνε την μορφή $(7x)^2 + 6\cdot(7x) = 7$. Τότε θεωρούσαν νέο άγνωστο τον $y = 7x$ και λύνοντας την εξίσωση $y^2 + 6y = 7$ έβρισκαν $y = 1$, οπότε η λύση της αρχικής εξίσωσης είναι $x = \frac{1}{7}$.

Δεν την έλυναν διαιρώντας και τα δυο μέλη της με το 7, γιατί τότε θα είχαν τα κλάσματα $\frac{6}{7}, \frac{1}{7}$ των οποίων η εξηνταδική τους παράσταση είναι αριθμός μη τερματιζόμενος. (Οι Βαβυλώνιοι ως γνωστόν χρησιμοποιούσαν εξηνταδικό σύστημα αρίθμησης).

Σημείωση: *Είναι γνωστό ότι οι αρχαίοι Έλληνες έλυναν τις εξισώσεις 2ου και 3ου βαθμού γεωμετρικά όχι μόνο βρίσκοντας τις ρίζες τους αλλά και κατασκευάζοντάς τες.*

Βιβλιογραφία

– *L. Bunt – Ph. Jones – J. Bedient: Οι ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών Μαθηματικών, μετάφραση Άννα Φερεντίνου, εκδόσεις Γ.Α. Πνευματικός, Αθήνα 1981.*
– *Θ. Εξαρχάκος: Ιστορία των Μαθηματικών (τόμος Α΄). Τα μαθηματικά των Βαβυλωνίων και των Αρχαίων Αιγυπτίων, Αθήνα 1997.*

- *B. Hughes: Understanding algorithms from their history. The teaching and learning of algorithms in school mathematics, NCTM 1998.*
- *O. Neugebauer: Οι θετικές επιστήμες στην αρχαιότητα, Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τράπεζας, Αθήνα 1990.*
- *B.L. van der Waerden: Geometry and Aglebra in Ancient Civilizations, Springer–Verlag, New York, 1983.*

Η εξίσωση 2ου βαθμού και ο αλγόριθμος επίλυσής της

Η σαφής και ακριβής περιγραφή μιας σειράς πεπερασμένων οδηγιών-βημάτων που έχουν σκοπό την επίτευξη ενός καθορισμένου στόχου π.χ. τη λύση ενός προβλήματος, ονομάζεται ως γνωστόν **αλγόριθμος**. Στη μακραίωνη ιστορία της ανθρωπότητας κάθε πολιτισμός επινόησε τις δικές του μεθόδους υπολογισμού και δημιούργησε τους δικούς του αλγόριθμους για την εκτέλεσή τους. Ανάμεσα στους αρχαιότερους απ' αυτούς βρίσκουμε κανόνες εκτέλεσης των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων με πολυψήφιους αριθμούς. Έπρεπε όμως να περάσουν αιώνες για να επινοηθούν εύκολες μέθοδοι υπολογισμού όπως αυτές που χρησιμοποιούνται σήμερα. Για τη λύση προβλημάτων υπολογιστικού κυρίως χαρακτήρα χρειάζεται να γίνουν συχνά πάρα πολλές πράξεις. Επειδή η εκτέλεση τους από τον άνθρωπο είναι κουραστική, ανιαρή και απαιτεί πολύ χρόνο, ανατίθενται σήμερα στον Η/Υ. Για να είναι δυνατή η εκτέλεση ενός αλγορίθμου από τον Η/Υ πρέπει προφανώς αυτός να είναι γραμμένος σε κατάλληλη γλώσσα. Για τους σημερινούς Η/Υ έχουν κατασκευαστεί ειδικές γλώσσες, οι γνωστές γλώσσες προγραμματισμού. Τα προγράμματα που δίνονται σε Η/Υ, δεν είναι τίποτε άλλο, παρά αλγόριθμοι διατυπωμένοι σε γλώσσες προγραμματισμού.

Η ταχύτητα υπολογισμού ενός αλγόριθμου είναι ανάλογη των βημάτων του. Καλοί αλγόριθμοι είναι εκείνοι που περιέχουν τα λιγότερα δυνατά βήματα. Η εύρεση αλγορίθμων για τη λύση ενός προβλήματος, αρκεί να γίνει μία μόνο φορά. Κάθε φορά που θα συναντήσουμε το ίδιο πρόβλημα μπορούμε να εφαρμόσουμε τον ήδη έτοιμο αλγόριθμο, χωρίς να απαιτείται ξανά η επεξεργασία του προβλήματος. Για την εύρεση ενός αλγόριθμου δεν υπάρχουν γενικές μέθοδοι και κανόνες. Βασιζόμαστε απλώς στη λογική, στην ευφυΐα μας και στην εξάσκηση. Η κατασκευή αλγορίθμου για τη λύση ενός προβλήματος απαιτεί βαθιά γνώση της περιοχής απ' όπου προέρχεται το πρόβλημα και συνδέεται με προσεκτικές αναλύσεις του προβλήματος. Για την εύρεση αλγορίθμων που λύνουν κάποια δύσκολα προβλήματα, οι επιστήμονες συχνά αφιερώνουν ολόκληρα χρόνια. Από τους πιο γνωστούς αλγόριθμους είναι εκείνος της εύρεσης των ριζών της εξίσωσης δευτέρου βαθμού.

Όπως ισχυρίζεται ο D.Struik η λέξη αλγόριθμος προέρχεται από τη λατινική γραφή του ονόματος ενός μεγάλου Άραβα μαθηματικού του 9ου μ.Χ. αιώνα, του al-Khwarizmi. Ο Μωχάμμετ ïμπν Μούσα αλ-Χουαρίζμι έγραψε πολλά βιβλία μαθηματικών και αστρονομίας. Με το βιβλίο της αριθμητικής του η Δυτική Ευρώπη γνώρισε το δεκαδικό αριθμητικό σύστημα θέσης. Ο τίτλος της λατινικής μετάφρασης Algorihmi de numero Indorum (*Αλγόριθμοι των ινδικών αριθμών*) πρόσφερε στη μαθηματική μας γλώσσα τη λέξη *αλγόριθμος*, που δεν εξέφραζε παρά το εκλατινισμένο όνομα του συγγραφέα. Κάτι ανάλογο έχει συμβεί και με την άλγεβρά του. Το αραβικό κείμενο έχει τον τίτλο Χισάμπ αλ-τζάμπρ ουάλ-μουκάμπαλα («επιστήμη αναγωγής και ισοστάθμισης», ή «περί της τέχνης να συναθροίζεις αγνώστους και να τους εξισώνεις με μια γνωστή ποσότητα», δηλαδή «επιστήμη των εξισώσεων»). Η άλγεβρα του Άλ-Χουαρίζμι έγινε κι αυτή γνωστή στη Δύση από τις λατινικές της μεταφράσεις, οι οποίες αλλοιώνοντας λίγο τον τίτλο, δημιούργησαν τη λέξη *άλγεβρα*. Το νόημα που πρωτοδόθηκε σ' αυτή τη λέξη δεν συμπίπτει με το σημερινό, το οποίο αναφέρεται σε ολόκληρο τον επιστημονικό κλάδο «Άλγεβρα». Ως τα μέσα του 19ου αιώνα η άλγεβρα δεν ήταν τίποτε άλλο παρά η επιστήμη των εξισώσεων.

Στην άλγεβρα του Άλ-Χουαρίζμι γίνεται μια μελέτη των γραμμικών και των δευτεροβάθμιων εξισώσεων χωρίς όμως αλγεβρικό συμβολισμό, αλλά με λεκτική περιγραφή των βημάτων που πρέπει να ακολουθήσει κανείς για να βρει μια λύση, ανάλογη των Βαβυλωνίων. Η μέθοδος είναι όμοια με τη σημερινή διαδικασία της «συμπλήρωσης τετραγώνου». Το βιβλίο αυτό που περιείχε τις γνώσεις προηγούμενων πολιτισμών, μεταφράστηκε από τα Αραβικά τουλάχιστον τρεις φορές, και χρησιμοποιήθηκε στα σχολεία της Ευρώπης στα λατινικά ή περιληπτικά σε τοπικές διαλέκτους. Οι κανόνες που περιέγραφε ίσχυαν πάντοτε. Αν τους ακολουθούσε κανείς, μπορούσε για παράδειγμα να λύσει εξισώσεις δευτέρου βαθμού ορισμένων τύπων.

Ανάμεσα στις εξισώσεις δευτέρου βαθμού που περιέχει το βιβλίο αυτό προβάλλουν τρεις χαρακτηριστικοί τύποι: $x^2 + 10x = 39$, $x^2 + 21 = 10x$, $3x + 4 = x^2$ (ίδιοι με τους τύπους των εξισώσεων που έλυναν οι Βαβυλώνιοι). Οι εξισώσεις αυτές δεν αντιμετωπίζονται με ενιαίο τρόπο, επειδή μόνο θετικοί συντελεστές ήσαν παραδεκτοί.

Την ίδια περίοδο και οι Ινδοί έλυναν με την ίδια μέθοδο τους ίδιους τύπους εξισώσεων 2ου βαθμού μονολότι δεν είχαν ανάγκη να χωρίζουν τις εξισώσεις σε διάφορους τύπους, αφού γνώριζαν τους αρνητικούς αριθμούς. Αργότερα ο Ινδός Sridhara (1025 μ.Χ.) επινόησε τη παρακάτω μέθοδο επίλυσης της εξίσωσης 2ου βαθμού.

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$	Μεταφέρουμε το σταθερό όρο στο β′ μέλος.
$\alpha x^2 + \beta x = -\gamma$	Πολλλαπλασιάζουμε με 4α και τα δύο μέλη της εξίσωσης.
$4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x = -4\alpha\gamma$	Για να προκύψει τέλειο τετράγωνο στο πρώτο μέλος,
$4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + \beta^2 = \beta^2 - 4\alpha\gamma$	προσθέτουμε και στα δύο μέλη το β^2.
$(2\alpha x + \beta)^2 = \beta^2 - 4\alpha\gamma$	
εφόσον $\beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0$,	
τότε προκύπτει	Με τη μέθοδο αυτή το κλάσμα εμφανίζεται μόνο στο τελευταίο βήμα.
$x = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$	

Πολλοί δυτικοί όπως ο Vie και ο Harriot εφάρμοσαν πολύ αργότερα και άλλους αλγόριθμους για τον υπολογισμό των λύσεων της εξίσωσης 2ου βαθμού. Οι εξισώσεις 2ου βαθμού στη γενική τους μορφή λύθηκαν τον 16ο αιώνα μ.Χ.

Βιβλιογραφία

– *Κ. Σκανδάλης – Χ. Γουρνιεζάκης – Σ. Καλουδάκης – Μ. Τερδήμου – Α. Μίχος: Στοιχεία θεωρίας αλγορίθμων, Ινστιτούτο Υπολογιστικών Μαθηματικών – Ι.Τ.Ε., 2η έκδοση, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 1990.*

– *Dirk J. Struik: Συνοπτική ιστορία μαθηματικών, εκδόσεις Ι. Ζαχαρόπουλος, Αθήνα 1982.*

2.3. Προβλήματα εξισώσεων 2ου βαθμού (2 διδακτικές ώρες)

Δραστηριότητα

Η εισαγωγή στην ενότητα αυτή δεν κρίθηκε σκόπιμο να γίνει με μια δραστηριότητα, επειδή κάθε πρόβλημα είναι μια δραστηριότητα. Το πρόβλημα 7 με το πρωτάθλημα ποδοσφαίρου θα μπορούσε να αποτελέσει ένα ενδιαφέρον θέμα για να ασχοληθούν οι μαθητές στην τάξη. (Κάθε ομάδα έδωσε στην έδρα της $x - 1$ αγώνες οπότε $x(x - 1) = 240$).

Διδακτικοί στόχοι

Στόχος στην ενότητα αυτή είναι να ασχοληθούν οι μαθητές με τη λύση προβλημάτων τα οποία ανάγονται σε εξισώσεις δευτέρου βαθμού, αξιοποιώντας τις γνώσεις προηγούμενων ενοτήτων.

Διδακτικές οδηγίες

- Για να εξοικειωθούν οι μαθητές με την μαθηματικοποίηση των προβλημάτων (την επιλογή των άγνωστων και την κατάστρωση της εξίσωσης του προβλήματος), μπορούν να δοθούν διάφορες εκφράσεις και να τους ζητηθεί να τις παραστήσουν συμβολικά, όπως:
  Το τετράγωνο ενός αριθμού μειωμένο κατά 3.
  Το γινόμενο δυο διαδοχικών ακεραίων αριθμών κ.λ.π. (ασκήσεις 5, 6).
- Οι μαθητές, αφού λύσουν ένα πρόβλημα, πρέπει να ελέγχουν τα αποτελέσματα και να τα αξιολογούν με βάση τους περιορισμούς.
- Στο λυμένο πρόβλημα 2 να εξηγηθεί στους μαθητές ότι ο τύπος $\frac{1}{10}x^2 + 20x + 500$ δεν είναι αυθαίρετος, αφού εξηγείται ως εξής: 500 ευρώ είναι το σταθερό κόστος (μισθοί, ενοίκια, ΙΚΑ, κ.τ.λ. που είναι ίδιο για κάθε παραγωγή), 20 ευρώ είναι το κόστος των υλικών για την κατασκευή ενός πουκαμίσου, οπότε 20x είναι το κόστος υλικών για την κατασκευή x πουκαμίσων, $\frac{1}{10}x^2$ προκύπτει εμπειρικά και καλύπτει άλλα έξοδα που επηρεάζονται από την παραγωγή.

Ενδεικτικό σχέδιο κριτηρίου αξιολόγησης

Διδακτική Ενότητα (Διάρκεια 45 min)

- Εξισώσεις 2ου βαθμού
- Προβλήματα Εξισώσεων 2ου βαθμού

ΘΕΜΑ 1°

Α. Να συμπληρώσετε τα κενά στην παρακάτω πρόταση.
Η εξίσωση $2x^2 - (\sqrt{3} - 1)x - 5 = 0$ είναι της μορφής $αx^2 + βx + γ = 0$ με
α =................, β =................, γ =................ **(2 Μονάδες)**

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες
α) Ο αριθμός -1 είναι λύση της εξίσωσης $-3x^2 + 5x + 8 = 0$.
β) Η εξίσωση $(2x - 1)^2 = 4x(x + 2)$ είναι 2ου βαθμού. **(4 Μονάδες)**

ΘΕΜΑ 2°

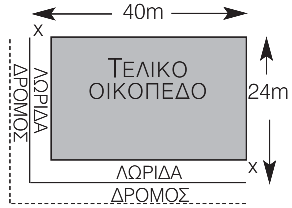
Α. Να βρείτε πόσες λύσεις έχει καθεμία από τις παρακάτω εξισώσεις:
α) $x^2 - 10x + 25 = 0$,
β) $2x^2 + 3x + 5 = 0$ **(4 Μονάδες)**

Β. Να λύσετε την εξίσωση $3x^2 - 7x + 4 = 0$ **(4 Μονάδες)**

ΘΕΜΑ 3°

Από ένα γωνιακό οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις 40 m και 24 m αποκόπτονται δύο λωρίδες ίσου πλάτους προκειμένου να γίνει διαπλάτυνση του υπάρχοντος δρόμου. Αν η τελική επιφάνεια του οικοπέδου είναι 836 m², να υπολογίσετε το πλάτος κάθε λωρίδας.

(6 Μονάδες)



2.4. Κλασματικές εξισώσεις (3 διδακτικές ώρες)

Δραστηριότητα

Με τη δραστηριότητα οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι οι κλασματικές εξισώσεις λύνονται όπως και οι εξισώσεις που έχουν παρανομαστές συγκεκριμένους αριθμούς και ότι ένας αριθμός που μηδενίζει κάποιον παρανομαστή μιας εξίσωσης δεν μπορεί να είναι λύση της.

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές πρέπει:

- Να μάθουν τι ονομάζεται κλασματική εξίσωση και πώς επιλύεται, εφόσον μετασχηματίζεται σε εξίσωση πρώτου ή δευτέρου βαθμού.
- Να λύνουν προβλήματα που ανάγονται στην επίλυση κλασματικής εξίσωσης.

Διδακτικές οδηγίες

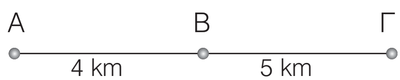
- Να διευκρινιστεί ότι στις κλασματικές εξισώσεις, αν απλοποιήσουμε τους όρους ενός κλάσματος, τότε ο όρος με τον οποίο απλοποιούμε πρέπει να είναι διάφορος του μηδενός, γιατί ενδεχομένως να προκύπτει ρίζα που πρέπει να απορριφθεί π.χ. στις εξισώσεις $\frac{1}{x-1} + \frac{x}{x} = 0$ και $\frac{4x}{x^2 - x} + \frac{x}{x+1} = \frac{4}{x^2-1}$, αν προηγηθεί η απλοποίηση προκύπτει ρίζα $x = 0$ που πρέπει να απορριφθεί.
- Ιδιαίτερη προσοχή να δοθεί στις κλασματικές εξισώσεις που περιέχουν σύνθετα κλάσματα στα οποία συχνά δεν αρκεί ο μη μηδενισμός του Ε.Κ.Π. (άσκηση 5) αλλά πρέπει όλοι οι εμφανιζόμενοι παρανομαστές να είναι διάφοροι του μηδενός.
- Να αξιοποιηθεί η μέθοδος επίλυσης κλασματικών εξισώσεων για να εξοικειωθούν οι μαθητές με την επίλυση τύπων Φυσικής, Μαθηματικών κ.τ.λ. ως προς έναν άγνωστο. (άσκηση 6)

Απαντήσεις στις ερωτήσεις κατανόησης

1. Σ – Λ – Λ – Σ **2.** γ **3.** δ **4.** όχι

Συμπληρωματικά θέματα

1. Η ταχύτητα με την οποία κινήθηκε ένας ποδηλάτης από τη θέση Α στη θέση Β είναι 2km/h μικρότερη από την ταχύτητα με την οποία κινήθηκε από τη θέση Β στη θέση Γ. Κατά την επιστροφή από το Γ στο Α κινήθηκε με ταχύτητα ίση με το ημιάθροισμα των προηγουμένων ταχυτήτων. Να βρείτε τις ταχύτητες με τις οποίες κινήθηκε ο ποδηλάτης αν, ο χρόνος μετάβασης και επιστροφής είναι ίδιος.



(**Υπ:** Έστω x η ταχύτητα με την οποία κινείται ο ποδηλάτης από τη θέση Β στη θέση Γ. Τότε η ταχύτητα με την οποία κινήθηκε από τη θέση Α στη θέση Β είναι $x - 2$. Ενώ η ταχύτητα με την οποία κινήθηκε κατά την επιστροφή είναι $\frac{x - 2 + x}{2} = x - 1$,

άρα $\frac{4}{x-2} + \frac{5}{x} = \frac{9}{x-1}$, ..., $x = 10$km/h)

2. Ένα ποταμόπλοιο εκτελεί τη διαδρομή από το Α στο Β (ΑΒ = 24km) και επιστρέφει και πάλι στο σημείο Α κάνοντας συνολικά χρόνο 5 ώρες. Κατά την μετάβαση από το Α στο Β προστίθεται και η ταχύτητα 2km/h με την οποία κινείται το νερό του ποταμού, ενώ κατά την επιστροφή αφαιρείται. Να βρείτε με ποια ταχύτητα κινείται το ποταμόπλοιο.

(Απ: $\frac{24}{x+2} + \frac{24}{x-2} = 5$, $x = 10$km/h)

3. Ένας έμπορος πλήρωσε 3000 ευρώ και προμηθεύτηκε CD ενός καλλιτέχνη. Πούλησε ορισμένα από αυτά και εισέπραξε 1800 ευρώ κερδίζοντας από το κάθε CD 3 ευρώ. Επειδή του έμειναν αδιάθετα ακόμα 100 CD, αναγκάστηκε να τα πουλήσει στην τιμή που τα προμηθεύτηκε. Να βρείτε σε ποια τιμή πούλησε ο έμπορος τα τελευταία 100 CD.

(Απ: $\frac{3000}{x} - \frac{1800}{x+3} = 100$, $x = 15$ ευρώ)

Ενδεικτικό σχέδιο κριτηρίου αξιολόγησης

Διδακτική Ενότητα **(Διάρκεια 45 min)**

- Κλασματικές εξισώσεις

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Τι ονομάζεται κλασματική εξίσωση; **(2 Μονάδες)**

Β. Αν διαιρέσουμε έναν ακέραιο αριθμό x με τον προηγούμενο του ακέραιο βρίσκουμε τον αριθμό 2. Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις εκφράζει την προηγούμενη πρόταση;

α) $\frac{x+1}{x+3} = 2$, β) $\frac{x}{x+1} = 2$,

γ) $\frac{x-1}{x} = 2$, δ) $\frac{x}{x-1} = 2$, **(2 Μονάδες)**

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες

α) Οι όροι της εξίσωσης $\frac{6}{x-3} + \frac{3}{x-2} = \frac{20}{x}$ έχουν νόημα αν

$x \neq 3$ και $x \neq 2$ ☐

β) Ο αριθμός –1 είναι λύση της εξίσωσης $\frac{x+1}{x-1} + \frac{2x}{x+2} = -2$ ☐

γ) Η εξίσωση $\frac{12}{x} + \frac{5(x+3)}{x-1} = 19$ γράφεται $12(x-1)+5x(x+3)=19$ ☐

(3 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 2ο

Να λύσετε την εξίσωση $\frac{2x}{3x-9} + \frac{1}{x} = \frac{3}{3x-x^2}$ **(7 Μονάδες)**

ΘΕΜΑ 3ο

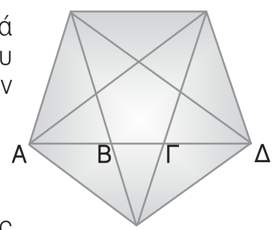
Να βρείτε τρεις διαδοχικούς ακέραιους αριθμούς τέτοιους ώστε το πηλίκο του πρώτου προς τον δεύτερο αυξημένο κατά το πηλίκο του δευτέρου προς τον τρίτο να ισούται με $\frac{7}{6}$. **(6 Μονάδες)**

Η Χρυσή τομή

Οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι οι αριθμοί μπορούν να εξηγήσουν την δομή του σύμπαντος, αφού «*οι αριθμοί είναι η ουσία των όντων*» και ότι οι αναλογίες κυριαρχούν και διέπουν την εκ του χάους δημιουργία της μορφής του κόσμου. Η πίστη αυτή τους οδήγησε στη μελέτη των αναλογιών που εμφανίζονται στη φύση. Μια από τις μελέτες αφορούσε τις παλλόμενες χορδές οι οποίες όταν έχουν αναλογία μήκους 1/2, 2/3, 3/4...., παράγουν *«αρμονικές συγχορδίες»,* δηλαδή ζεύγη από νότες που ακούγονται ευχάριστα. Από τη μελέτη των αριθμών και των ιδιοτήτων τους θεμελιώθηκε η Αριθμητική ή όπως λέγεται σήμερα Θεωρία αριθμών. Οι *μεσότητες* δηλαδή οι *αναλογίες* που χρησιμοποιήθηκαν από τους Πυθαγόρειους στα Μαθηματικά και τη Μουσική, ήταν συνολικά δέκα. Η ανακάλυψη των τριων πρώτων αποδίδεται στον ίδιο τον Πυθαγόρα (αριθμητικός, γεωμετρικός και αρμονικός μέσος). Άλλες τρεις πιστεύεται ότι ανακάλυψαν οι μαθητές του, Αρχύτας και Ίππασσος ή όπως άλλοι πιστεύουν ο Εύδοξος, μαθητής του Αρχύτα, κορυφαίος μαθηματικός στην Ακαδημία του Πλάτωνα. Οι άλλες τέσσερις προστέθηκαν από τους Πυθαγόρειους Μυονείδη και Ευφράνωρα.

Η δέκατη αναλογία είναι σήμερα γνωστή με το όνομα **χρυσή τομή**, που της έδωσε ο Kepler (1571-1630) και σχετίζεται με το πρόβλημα της διαίρεσης ευθυγράμμου τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο.

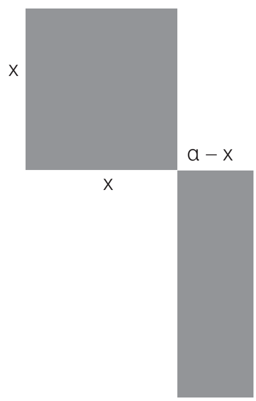
«Να χωριστεί ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = λ σε δύο άνισα μέρη ΑΓ = x και ΓΒ = λ – x, ώστε ο λόγος του ΑΒ προς το μεγαλύτερο μέρος ΑΓ να είναι ίσος με το λόγο του ΑΓ προς το μικρότερο τμήμα». Η θετική ρίζα της εξίσωσης $\frac{\lambda}{x} = \frac{x}{\lambda - x}$ είναι η $x = \lambda\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ από την οποία προκύπτει ο λόγος των τμημάτων ΑΒ και ΑΓ, $\frac{\lambda}{x} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \cong 1{,}61803... = \varphi$



Ο λόγος αυτός είναι ίσος και με το λόγο της διαγωνίου προς την πλευρά κανονικού πενταγώνου. Οι διαγώνιοι ενός κανονικού πενταγώνου σχηματίζουν ένα αστεροειδές πεντάγωνο, την πεντάλφα, που ήταν διακριτικό γνώρισμα της Πυθαγόρειας Σχολής.

Σ' αυτό ισχύει $\frac{ΑΔ}{ΑΓ} = \varphi$, $\frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \varphi$.

Έχει παρατηρηθεί ότι η τήρηση του λόγου φ στις αναλογίες καλλιτεχνικών κατασκευών δημιουργεί την αίσθηση της αρμονίας. Το πλήθος των σκαλιών στο άνω και κάτω διάζωμα του θεάτρου της Επιδαύρου, έχει κατασκευαστεί (τέλος του 4ου αιώνα π.Χ.) σύμφωνα με το λόγο φ.

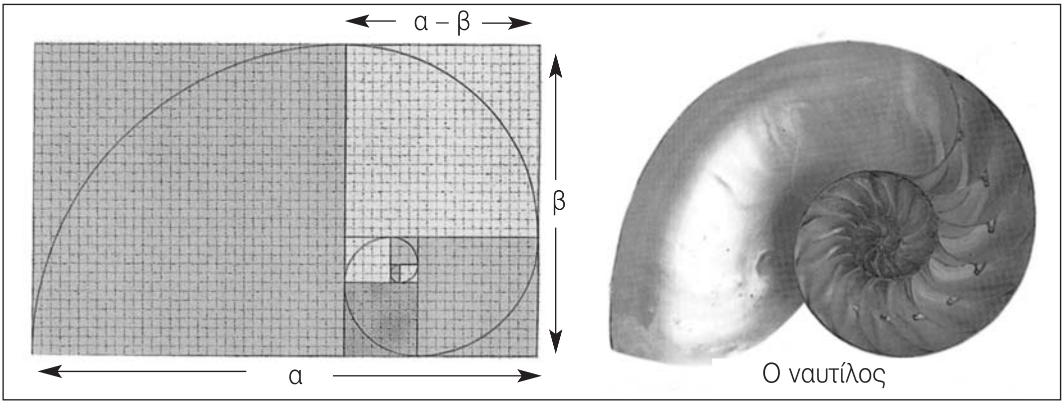


Στο II βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη περιέχεται το πρόβλημα της διαίρεσης ευθύγραμμου τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο, αλλά διατυπώνεται ως εξής: *«Να χωριστεί ένα δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα α σε δύο μέρη ώστε το ορθογώνιο που ορίζει το τμήμα α και το α – x, να είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο που έχει πλευρά το x».*

Το όνομα όμως και τη φήμη του ο αριθμός φ τα οφείλει στις αριθμητικές του ιδιότητες (αν στο φ προσθέσεις το 1, προκύπτει το τετράγωνό του, δηλαδή $\varphi^2 = \varphi + 1$ και αν από τον φ αφαιρέσεις το 1 προκύπτει ο αντίστροφός του, δηλαδή $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$) αλλά κυρίως στο γεγονός ότι φαίνεται να ενυπάρχει συχνά στη φύση, στο σύμπαν και στα ανθρώπινα δημιουργήματα, κυρίως τα καλλιτεχνικά έργα. Η sectio aurea(*χρυσή τομή*) ή proportio divine (*θεία αναλογία*) έγινε διάσημη το μεσαίωνα κυρίως με το έργο του μαθηματικού Λούκα Πιατσόλι, που εικονογραφήθηκε με 60 σχέδια από το Λεονάρντο ντα Βίντσι.

Στο έργο αυτό ο Πατσιόλι ασχολείται με το πλατωνικό δωδεκάεδρο οι έδρες του οποίου, ως γνωστόν, είναι κανονικά πεντάγωνα.

Ο φ, παρουσιάζει και γεωμετρικά σημαντικές ιδιότητες. Πιο σημαντική από όλες είναι το «*χρυσό ορθογώνιο*». Ένα ορθογώνιο λέγεται χρυσό αν ο λόγος της μεγαλύτερης πλευράς του α προς την μικρότερη πλευρά του β ισούται με φ. Αν σχηματίσουμε ένα ορθογώνιο με πλευρές β, α – β τότε προκύπτει ένα ακόμη «*χρυσό ορθογώνιο*». Αν συνεχίσουμε με την ίδια διαδικασία, θα παραγάγουμε διαρκώς μικρότερα χρυσά ορθογώνια το ένα μέσα στο άλλο. Αν σε καθένα από αυτά σχεδιάσουμε ένα τεταρτημόριο του κύκλου, θα προκύψει μια λογαριθμική σπείρα η οποία και αυτή εμφανίζεται συχνά στη φύση στο κέλυφος των μαλακίων, όπως ο ναυτίλος.



Ο ναυτίλος

Ο ντα Βίντσι, όπως λέγεται, σχεδίασε με βάση το χρυσό ορθογώνιο και τη χρυσή αναλογία τα αριστουργήματά του: Μόνα Λίζα, Ευαγγελισμός, Άγιος Ιερώνυμος κ.α. Η αναλογία της χρυσής τομής θα συναρπάσει και το διάσημο γάλλο αρχιτέκτονα του 20ου αιώνα Λε Κορμπιζιέ, που διατύπωσε το modylor (κλίμακα αναλογιών του ανθρώπινου σώματος, όπου ο ομφαλός διαιρεί το ιδανικό ανθρώπινο σώμα σε λόγο της χρυσής τομής) και ο οποίος σχεδίασε πολλά κτίρια με βάση το χρυσό λόγο.

Ο λόγος της χρυσής τομής συμβολίστηκε με το γράμμα φ προς τιμή του γλύπτη Φειδία.

Η δέκατη αναλογία είναι η αρχή του σχηματισμού της προσθετικής ακολουθίας **Fibonacci** (1180-1250 μ.Χ.) στην οποία κάθε αριθμός είναι το άθροισμα των δύο προηγουμένων: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 144...

Στην ακολουθία αυτή οι λόγοι δύο τυχαίων διαδοχικών όρων της μετά τον πέμπτο, προσεγγίζουν το λόγο της χρυσής τομής 1,618 133 98875...,

$$\frac{8}{5} = 1{,}6, \quad \frac{21}{13} = 1{,}615, \quad \frac{55}{34} = 1{,}617, \quad \frac{89}{55} = 1{,}618...$$

Τους αριθμούς Φιμπονάτσι τους συναντάμε συχνά στη φύση από τον τρόπο πολλαπλασιασμού των ζευγών των κουνελιών (Πόσα ζεύγη από κουνέλια μπορεί να γεννηθούν σε ένα χρόνο από ένα ζευγάρι, αν κάθε ζευγάρι γεννάει κάθε μήνα από ένα νέο ζευγάρι, που το δεύτερο μήνα γίνεται παραγωγικό; Απ: 1, 1, 2, 3, 5, 8,...) πάνω στην οποία δούλεψε ο Ιταλός μαθηματικός τον 13ο αιώνα, μέχρι την διάταξη των φύλλων στους μίσχους των φυτών, τους σπόρους στον ύπερο του ηλιοτροπίου, των φολίδων στο κουκουνάρι, τους έλικες των θαλασσινών οστράκων και τις σειρές που ασχηματίζουν τα πέταλα των λουλουδιών.

Στο πέρασμα των αιώνων βρέθηκαν παραδείγματα εφαρμογής της χρυσής τομής σχεδόν παντού, όχι μόνο στην αρχαία ελληνική αρχιτεκτονική αλλά και στα σύγχρονα αριστουργήματα της τέχνης. Για παράδειγμα, ο Παρθενώνας, εφόσον προστεθεί σε αυτόν το κατεστραμμένο αέτωμά του, σχηματίζει χρυσό ορθογώνιο. Αν και στο αριστούργημα αυτό της τέχνης ενσωματώνονται πολλοί κανόνες γεωμετρικής ισορροπίας, είναι αμφίβολο αν οι αρχιτέκτονες του 5ου αιώνα π.Χ. γνώριζαν τις κατοπινές «χρυσές αναλογίες».

Πολλά απ' όσα αποδίδονται στο φ και κυρίως ο χαρακτηρισμός του ως «χρυσή αναλογία» στερούνται επιστημονικού υποβάθρου. Οι (υποτιθέμενες) εφαρμογές του κυρίως στην τέχνη, την αισθητική και την αρχιτεκτονική, έχουν γίνει αντικείμενο πολλών συζητήσεων και σχολίων, καθώς σ' ένα μεγάλο μέρος από αυτές τις εφαρμογές υπεισέρχεται η υποκειμενική κρίση του μελετητή. Ο χρυσός λόγος εμφανίζεται όμως τόσο συχνά σε έργα τέχνης, ώστε να αποκλείεται η σύμπτωση.

Βιβλιογραφία

- *P.J. Davis – R. Hersh: Η μαθηματική εμπειρία, εκδόσεις Τροχαλία, Αθήνα.*
- Th. L.Heath: *Ιστορία των Ελληνικών μαθηματικών, Κέντρο Έρευνας Επιστήμης και Εκπάιδευσης, Αθήνα 2001.*
- *Jean-Francoise Mattei: Ο Πυθαγόρας και οι Πυθαγόρειοι, Ινστιτούτο του βιβλίου Μ. Καρδαμίτσα, Αθήνα 1995.*
- *B.L. van Waerden: Η αφύπνιση της επιστήμης, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2000.*
- *www.en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio*
- *http://goldennumber.net*

2.5. Ανισότητες – Ανισώσεις με έναν άγνωστο (4 διδακτικές ώρες)

Δραστηριότητα

Αφού οι μαθητές θυμηθούν πώς ορίζεται η διάταξη μεταξύ πραγματικών αριθμών, τους δίνεται η ευκαιρία με συγκεκριμένα αριθμητικά παραδείγματα να οδηγηθούν σ' ορισμένες ιδιότητες της διάταξης.

Διδακτικοί στόχοι

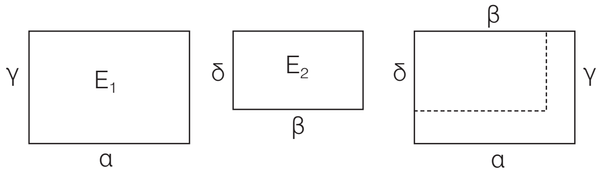
Οι μαθητές πρέπει:

- Να θυμηθούν πώς ορίζεται η διάταξη μεταξύ πραγματικών αριθμών.
- Να μάθουν να αποδεικνύουν και να χρησιμοποιούν τις ιδιότητες της διάταξης.
- Να χρησιμοποιούν τις ιδιότητες της διάταξης στην επίλυση ανισώσεων πρώτου βαθμού μ' έναν άγνωστο.

Διδακτικές οδηγίες

- Να επισημανθεί ότι υπάρχουν δύο τρόποι για να συγκρίνουμε δύο αριθμούς.
  α) Να τους παραστήσουμε με σημεία ενός άξονα, οπότε μεγαλύτερος είναι αυτός που βρίσκεται δεξιότερα.
  β) Να εξετάσουμε το πρόσημο της διαφοράς τους, όταν δεν μπορούμε να τους παραστήσουμε με σημεία ενός άξονα.
- Οι αποδείξεις των ιδιοτήτων (γ) και (δ) μπορούν να δοθούν ως άσκηση, εφόσον το κρίνει ο διδάσκων και το επίπεδο της τάξης το επιτρέπει.
- Να επισημανθεί ότι για να αποδείξουμε μια ανισότητα, συνήθως εργαζόμαστε με τους εξής τρόπους:
  1ος τρόπος: Ξεκινώντας από την υπόθεση και εφαρμόζοντας τις ιδιότητες της διάταξης, καταλήγουμε στη σχέση που ζητείται. (π.χ. ασκήσεις 1, 2, 3)
  2ος τρόπος: Με αφετηρία την ανισότητα που ζητείται να αποδείξουμε, κάνοντας πράξεις και εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των ανισοτήτων καταλήγουμε σε μια σχέση που ισχύει. (π.χ. ασκήσεις 4γ, 4δ, 11, 12, κ.τ.λ.)
- Να εξηγηθεί ότι για να αποδείξουμε μια διπλή ανισότητα, π.χ. την $α < β < γ$, αρκεί να αποδείξουμε ξεχωριστά τις ανισότητες $α < β$ και $β < γ$.

- Με συγκεκριμένα αριθμητικά παραδείγματα να εξηγηθεί γιατί δεν επιτρέπεται να αφαιρούμε ή να διαιρούμε ανισότητες κατά μέλη.
- Να τονιστεί ότι για να κάνουμε απαλοιφή παρανομαστών σε ανισωτική σχέση, πρέπει να γνωρίζουμε το πρόσημο του Ε.Κ.Π. των παρανομαστών. (π.χ. ερώτηση κατανόησης 6, ασκήσεις 9, 12)
- Η ιδιότητα της διάταξης (ε) μπορεί να ερμηνευθεί και γεωμετρικά:



$$\left.\begin{array}{l}\alpha > \beta \\ \gamma > \delta\end{array}\right\} \Rightarrow E_1 > E_2 \text{ ή } \alpha\gamma > \beta\delta$$

- Η επίλυση των ανισώσεων πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο έχει διδαχτεί στην Β′ τάξη και η επανάληψη γίνεται για εφαρμογή των ιδιοτήτων της διάταξης.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις κατανόησης

1. Σ – Σ – Σ – Λ – Λ– Σ – Σ – Σ
2 **α)** $>$, **β)** $<$, **γ)** $<$, **δ)** $\geq$, **ε)** $>$, **στ)** $\leq$.
3. Προσθέτουμε το 4 και στα δύο μέλη – Διαιρούμε και τα δύο μέλη με το 3.
4. **α)** Προσθέτουμε το 4 και στα δύο μέλη.
   β) Αφαιρούμε το 2 και από τα δύο μέλη.
   γ) Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το 5.
   δ) Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το –6.
5. Οι ανισότητες α), γ).
6. Όχι, γιατί πρέπει οι β, δ να είναι ομόσημοι. (να δοθούν αριθμητικά παραδείγματα)

Απαντήσεις στο σταυρόλεξο (σελ. 119, στο βιβλίο του μαθητή)

Οριζόντια: **1)** ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ, **2)** ΔΙΑΤΑΞΗ, **3)** ΑΟΡΙΣΤΗ, **4)** ΡΙΖΑ, **5)** ΔΙΠΛΗ, **6)** ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗ, **7)** ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗ

Κάθετα: **1)** ΔΙΑΚΡΙΝΟΥΣΑ, **2)** ΔΥΟ, **3)** ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΗ, **4)** ΜΙΑ, **5)** ΛΥΣΗ, **6)** ΑΔΥΝΑΤΗ

Ενδεικτικά προτεινόμενος προγραμματισμός διδασκαλίας της ενότητας 2.5

(4 διδακτικές ώρες)

1η διδακτική ώρα
- Εισαγωγή στην διάταξη των πραγματικών αριθμών.
- Οι ιδιότητες της διάταξης (χωρίς αποδείξεις).
- Ερωτήσεις κατανόησης 1.
- Προτεινόμενες ασκήσεις 1, 2, 3, 4.

2η διδακτική ώρα
- Αποδείξεις των ιδιοτήτων της διάταξης.
- Ερωτήσεις κατανόησης 2.
- Παραδείγματα – Εφαρμογές 1.
- Προτεινόμενες ασκήσεις 5, 6, 7, 8.

3η διδακτική ώρα
- Ερωτήσεις κατανόησης 3, 4, 5, 6.
- Παραδείγματα – Εφαρμογές 2, 3.
- Προτεινόμενες ασκήσεις 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15.

4η διδακτική ώρα
- Ανισώσεις πρώτου βαθμού μ’ έναν άγνωστο.
- Παραδείγματα – Εφαρμογές 4.
- Προτεινόμενες ασκήσεις 16, 17, 18.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο - Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων

3.1. Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης (2 διδακτικές ώρες)

Δραστηριότητα

Με τη δραστηριότητα, δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να καταλήξουν σε μια εξίσωση με δύο αγνώστους της μορφής $αx + βy = γ$ (την $2x + y = 6$) και να διαπιστώσουν ότι λύσεις της εξίσωσης είναι διατεταγμένα ζεύγη (x, y), τα οποία αν παρασταθούν με σημεία σ' ένα σύστημα αξόνων, τότε όλα βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία ε. Επιπλέον μπορούν να διαπιστώσουν ότι οι συντεταγμένες κάθε σημείου της ευθείας είναι λύση της εξίσωσή της.

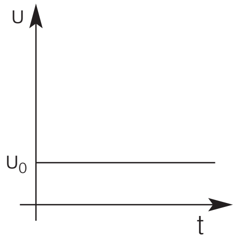
Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές πρέπει:

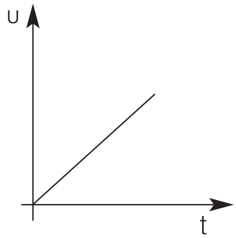
- Να μάθουν τι ονομάζεται γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους και πότε ένα διατεταγμένο ζεύγος αριθμών είναι λύση της.
- Να γνωρίζουν πότε μια γραμμική εξίσωση της μορφής $αx + βy = γ$ παριστάνει ευθεία και πώς αυτή σχεδιάζεται στις περιπτώσεις που τέμνει τους άξονες ή είναι παράλληλη σ' έναν από αυτούς.

Διδακτικές οδηγίες

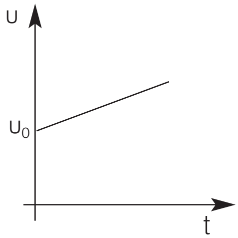
- Αν και στην προηγούμενη τάξη οι μαθητές έχουν διδαχθεί τη γραμμική εξίσωση της μορφής $αx + βy = γ$ με $α \neq 0$ ή $β \neq 0$, κρίθηκε ωστόσο αναγκαία η επανάληψη της για την κατανόηση της γραφικής επίλυσης των συστημάτων.
- Για τον σχεδιασμό της ευθείας $αx + βy = γ$ με $α \neq 0$ ή $β \neq 0$, είναι αρκετό να προσδιοριστούν οι συντεταγμένες δύο σημείων της (συνήθως βρίσκουμε τα κοινά της σημεία με τους άξονες). Για τον προσδιορισμό των σημείων αυτών δεν είναι απαραίτητο η γραμμική εξίσωση να μετασχηματιστεί στην αντίστοιχη γραμμική συνάρτηση.
- Να τονιστεί ότι η λύση μιας γραμμικής εξίσωσης $αx + βy = γ$ δεν είναι ένας αριθμός, αλλά ένα διατεταγμένο ζεύγος αριθμών.
- Να διευκρινιστεί με συγκεκριμένα παραδείγματα ότι ένα σημείο ανήκει σε μια ευθεία, αν και μόνο αν, οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της (παραδείγματα 1, 2, άσκηση 2).
- Δεν πρέπει να διατεθεί χρόνος για τη διερεύνηση ή τον προσδιορισμό της εξίσωσης της ευθείας, αλλά μόνο για τον σχεδιασμό μιας ευθείας, όταν είναι γνωστή η εξίσωση της.
- Η εξοικείωση των μαθητών με τον σχεδιασμό και την ερμηνεία των στοιχείων της ευθείας που παριστάνει μια γραμμική εξίσωση είναι βασική επιδίωξη της ενότητας αυτής και γι' αυτό επιβάλλεται οι μαθητές να χρησιμοποιούν τετραγωνισμένο χαρτί και οι ευθείες να γίνονται με επιμέλεια και προσοχή στο τετράδιο ή στον πίνακα.
- Τα διαγράμματα ταχύτητας-χρόνου ενός κινητού που εκτελεί ομαλή ή ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση προσφέρονται για να εμπεδώσουν οι μαθητές ορισμένες από τις μορφές της γραφικής παράστασης μιας γραμμικής εξίσωσης.



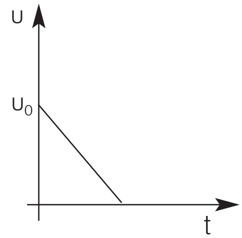
$υ = υ_0 = σταθ$



$υ = αt$



$υ = υ_0 + αt$



$υ = υ_0 - αt$

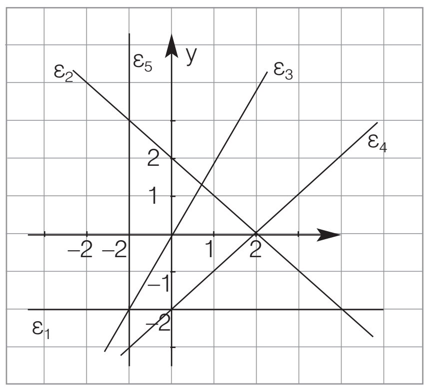
Απαντήσεις στις ερωτήσεις κατανόησης

1. (3, 2), (0, 6), (–3, 10)
2. Λ – Σ – Σ – Λ
3. α →4, β →3, γ →1, δ →2
4. i) γ, ii) δ
5. i) δ, ii) β

Συμπληρωματικά θέματα

1. Να αντιστοιχίσετε σε κάθε ευθεία $ε_1$, $ε_2$, $ε_3$, $ε_4$, $ε_5$ του διπλανού σχήματος την αντίστοιχή της εξίσωση
   α) $x - y = 2$
   β) $2x - y = 0$
   γ) $y = -2$
   δ) $x = -1$
   ε) $x + y = 2$

$ε_1$	$ε_2$	$ε_3$	$ε_4$	$ε_5$



(Απ: $ε_1$ →γ, $ε_2$ →ε, $ε_3$ →β, $ε_4$→α, $ε_5$→δ)

2. Η ευθεία ε: $αx - y = -1$ διέρχεται από το σημείο (2, 5).
   α) Να βρεθεί η τιμή του α
   β) Να βρεθεί το σημείο τομής της με τον άξονα y′y.

(Απ: α=2, (0, 1))

3. Η ευθεία ε: $2x - y = β$ διέρχεται από το σημείο (1, 3).
   α) Να βρεθεί η τιμή του β
   β) Να σχεδιάσετε την ευθεία και να βρείτε το σημείο τομής της με τον άξονα x'x.

(Απ: β=–1, $(-\frac{1}{2}, 0)$)

3.2. Η έννοια του γραμμικού συστήματος και η γραφική επίλυσή του (1 διδακτική ώρα)

Δραστηριότητα

Με τη δραστηριότητα, δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να διαπιστώσουν από το σχήμα ότι η κοινή λύση των εξισώσεων των ευθειών $ε_1 : x + y = 5$ και $ε_2 : 2x + y = 8$ είναι ένα ζεύγος αριθμών που δεν είναι άλλο από τις συντεταγμένες του κοινού σημείου των δύο ευθειών.

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές πρέπει να μάθουν:

- Τι είναι γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους και πότε ένα ζεύγος αριθμών είναι η λύση του.
- Να επιλύουν γραφικά ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους και να κατανοήσουν πότε έχει μια λύση, πότε είναι αδύνατο και πότε είναι αόριστο.

Διδακτικές οδηγίες

- Η γραφική επίλυση ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους προσφέρεται για να κατανοήσουν οι μαθητές ότι εκτός από την περίπτωση μιας λύσης ένα τέτοιο σύστημα μπορεί να είναι αδύνατο ή να έχει άπειρες λύσεις (παράδειγμα 2).
- Δεν πρέπει να διατεθεί χρόνος για τη διερεύνηση του συστήματος.
- Είναι δυνατόν μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα να διευκρινιστεί ότι για ένα σύστημα της μορφής: $\begin{cases} α_1x + β_1y = γ_1 \\ α_2x + β_2y = γ_2 \end{cases}$, ισχύουν

  Αν $\frac{α_1}{α_2} \neq \frac{β_1}{β_2}$, τότε το σύστημα έχει **μια λύση**.

  Αν $\frac{α_1}{α_2} = \frac{β_1}{β_2} \neq \frac{γ_1}{γ_2}$, τότε το σύστημα είναι **αδύνατον**.

  Αν $\frac{α_1}{α_2} = \frac{β_1}{β_2} = \frac{γ_1}{γ_2}$, τότε το σύστημα είναι **αόριστο**.
- Οι μαθητές πρέπει να μάθουν να ερμηνεύουν και να εξάγουν συμπεράσματα από τις ευθείες που παριστάνουν οι εξισώσεις ενός γραμμικού συστήματος (ασκήσεις 3, 4)
- Να δοθεί ιδιαίτερο βάρος στην εξοικείωση των μαθητών με τις γεωμετρικές και αλγεβρικές εκφράσεις που χρησιμοποιούνται ισοδύναμα στο κεφάλαιο αυτό. Η δυνατότητα «μετάβασης» από το ένα είδος έκφρασης στο άλλο είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για την κατανόηση της γραφικής επίλυσης των συστημάτων. Π.χ.

Γεωμετρική έκφραση		Αλγεβρική έκφραση
Το σημείο $Μ(x_0, y_0)$ **ανήκει** στην ευθεία ε.	$\leftrightarrow$	Οι συντεταγμένες (x_0, y_0) του σημείου Μ επαληθεύουν την εξίσωσή της.
Μια ευθεία ε **διέρχεται** από το σημείο $Μ(x_0,y_0)$.	$\leftrightarrow$	Το ζεύγος των συντεταγμένων (x_0, y_0) του σημείου Μ είναι λύση της εξίσωσή της.
Οι ευθείες $ε_1$, $ε_2$ **τέμνονται.**	$\leftrightarrow$	Το σύστημα των εξισώσεων έχει **μοναδική λύση.**
Οι ευθείες $ε_1$, $ε_2$ είναι **παράλληλες.**	$\leftrightarrow$	Το σύστημα των εξισώσεων είναι **αδύνατον.**
Οι ευθείες $ε_1$, $ε_2$ **ταυτίζονται.**	$\leftrightarrow$	Το σύστημα των εξισώσεων είναι **αόριστο.**

Απαντήσεις στις ερωτήσεις κατανόησης

1. Δ **2.** α →2, β →3, γ →1 **3.** **α)** (–3, –2), **β)** (3, 2), **γ)** (6, 0), **δ)** (0, 0)

Εναλλακτική διδασκαλία με τη χρήση Η/Υ (Διερευνητική προσέγγιση) ΘΕΜΑ: Γραφική επίλυση συστήματος

Η διδασκαλία της γραφικής επίλυσης ενός συστήματος δύο εξισώσεσων με δύο αγνώστους, προσφέρεται να υποστηριχτεί από Η/Υ. Για το σκοπό αυτό θα πρέπει καταρχήν να επιλεγεί το κατάλληλο λογισμικό το οποίο να σχεδιάζει την ευθεία που παριστάνει η γραμμική εξίσωση $αx + βy = γ$ και όχι η συνάρτηση $y = αx + β$, π.χ. το Graphmatica for windows. Στη συνέχεια θα πρέπει να σχεδιαστεί μια δραστηριότητα με βασικό στόχο:

- Να ανακαλύψουν οι μαθητές τη σχέση μεταξύ των συντεταγμένων του σημείου τομής των ευθειών που παριστάνουν οι εξισώσεις ενός γραμμικού συστήματος και της λύσης του.
- Να κατανοήσουν τη θέση των ευθειών στο επίπεδο όταν το σύστημα είναι αδύνατο ή αόριστο.

Υποστηρικτικό υλικό για τη διδασκαλία αυτή θα βρει ο διδάσκων και στην Εκπαιδευτική Πύλη του ΥΠΕΠΘ www.e-yliko.gr

3.3. Η αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος (4 διδακτικές ώρες)

Δραστηριότητα

Με τη δραστηριότητα, δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές μέσα από ένα πρόβλημα να καταλήξουν σ' ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους ($x + y = 20$, $x + 3y = 44$) η λύση του οποίου είναι και η λύση του προβλήματος.

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές πρέπει να μάθουν:

- Να λύνουν ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.
  - Με τη μέθοδο της αντικατάστασης
  - Με τη μέθοδο των αντιθέτων συντελεστών
- Να λύνουν προβλήματα με τη βοήθεια των συστημάτων.

Διδακτικές οδηγίες

– Να τονιστεί ότι ανάλογα με το σύστημα επιλέγεται και ο καταλληλότερος τρόπος επίλυσής του. (ερώτηση κατανόησης 5)
– Η επίλυση συστημάτων να μη περιοριστεί μόνο σε συστήματα με αγνώστους x, y αλλά και σε συστήματα με αγνώστους α, β, υ, t κ.τ.λ.
– Να χρησιμοποιηθεί η αλγεβρική επίλυση συστημάτων για τη λύση προβλημάτων της καθημερινής μας ζωής, της Γεωμετρίας, της Φυσικής, της Χημείας κ.τ.λ.
– Να επισημανθεί με συγκεκριμένα παραδείγματα ότι ορισμένα από τα προβλήματα που λύνονται μ' ένα σύστημα με δύο αγνώστους, μπορούν να λυθούν και με μία εξίσωση που να περιέχει έναν μόνον άγνωστο. Όμως η επιλογή δύο αγνώστων παρέχει τη δυνατότητα με ευκολότερο τρόπο να καταστρώνονται οι εξισώσεις που οδηγούν στην επίλυση του προβλήματος. Για παράδειγμα μπορεί να δοθεί το παρακάτω πρόβλημα που περιέχεται στα «Αριθμητικά» του Διόφαντου (3ος αιώνας μ.Χ.) και το οποίο ο Διόφαντος λύνει με εξίσωση. «*Να χωριστεί ο αριθμός 100 σε δύο (ακέραιους) αριθμούς οι οποίοι να έχουν μεταξύ τους διαφορά 40*». (Απ: Αν x ο μικρότερος τότε $x + 40$ ο μεγαλύτερος, οπότε $x + (x + 40) = 100$). Ευκολότερα όμως το πρόβλημα λύνεται με το σύστημα: $x + y = 100$, $x – y = 40$). Με τον ίδιο τρόπο μπορούν να αντιμετωπιστούν και τα παραδείγματα 1, 4 και οι ασκήσεις 9, 16 κ.τ.λ. Άλλωστε η μέθοδος της αντικατάστασης καταλήγει στη λύση μιας εξίσωσης με έναν άγνωστο.
– Δεν πρέπει η διδασκαλία να επεκταθεί σε επίλυση συστημάτων που δεν είναι γραμμικά ή δεν καταλήγουν άμεσα σε γραμμικά.
– Μια από τις διδακτικές ώρες θα μπορούσε να αφιερωθεί στην επίλυση προβλημάτων κίνησης που λύνονται με συστήματα. Έτσι, θα δοθεί η ευκαιρία στους μαθητές να ασχοληθούν με πραγματικά προβλήματα και να δουν την αλληλεξάρτηση της Φυσικής με τα Μαθηματικά. Ενδεικτικά προτείνεται σ' αυτή την διδακτική ώρα να λυθούν στην τάξη η άσκηση 19 (συμπληρωματικά θα μπορούσε να ζητηθεί από τους μαθητές να σχεδιάσουν και το διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου) και η άσκηση 16 από τις γενικές.
Ως εργασία για το σπίτι προτείνεται να δοθούν οι ασκήσεις 15 και 14 από τις γενικές.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις κατανόησης

1. δ **2.** δ **3.** γ

4. Με 1, – 2, τις εξισώσεις του 1ου συστήματος και με 5, 3 τις εξισώσεις του 2ου συστήματος.

5. α, δ με αντικατάσταση β, γ με αντίθετους συντελεστές. **6.** $(Σ_1)$ αδύνατον, $(Σ_2)$ αόριστο.

Συμπληρωματικά θέματα

1. Μαρία: *Αν μου δώσεις δύο, θα έχω όσα και εσύ.*
Ελένη: *Αν εσύ μου δώσεις δύο, θα έχω τα διπλάσια από σένα.*
Πόσα έχει η καθεμιά; (Απ: $x = 10$, $y = 14$)

2. $\begin{cases} \ldots x + y = 4 \\ 6x - \ldots y = 3 \end{cases}$. Οι συντελεστές του x και του y σβήστηκαν κατά λάθος. Μπορείτε να τους υπολογίσετε αν γνωριζετε ότι το σύστημα έχει λύση $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right)$; (Απ: –17, 3)

3. Να αποδείξετε ότι τα συστήματα

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} -x + 4y = 1 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$$ έχουν κοινή λύση.

(Απ: $x=3$, $y=1$)

Ενδεικτικά προτεινόμενος σχεδιασμός διδασκαλίας της ενότητας 3.3

(4 διδακτικές ώρες)

1η διδακτική ώρα
- Μέθοδος αντικατάστασης.
- Ερωτήσεις κατανόησης 1, 2.
- Παραδείγματα – Εφαρμογές 1, 2.
- Προτεινόμενες ασκήσεις 1, 2α, 3β, 4α, 20.

2η διδακτική ώρα
- Μέθοδος αντιθέτων συντελεστών.
- Ερωτήσεις κατανόησης 3, 4.
- Παραδείγματα – Εφαρμογές 3.
- Προτεινόμενες ασκήσεις 2, 3α, γ, 4β, 5.

3η διδακτική ώρα
- Ερωτήσεις κατανόησης 5, 6.
- Παραδείγματα – Εφαρμογές 4.
- Προτεινόμενες ασκήσεις 6, 7, 8, 9, 10.

4η διδακτική ώρα
- Συμπληρώσεις – Προβλήματα.
- Προτεινόμενες ασκήσεις 11, 12, 13, 14, 15...

ή εναλλακτικά

Προβλήματα κίνησης και συστήματα.

Ενδεικτικό σχέδιο κριτηρίου αξιολόγησης

Διδακτική Ενότητα **(Διάρκεια 45 min)**
- Γραμμική εξίσωση – Γραμμικά συστήματα

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Το ζεύγος (3, 2) είναι λύση της εξίσωσης $3x - 2y = 5$.

β) Η ευθεία $ε : 2x - 5y = 0$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Η εξίσωση $y = -3$ παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$.

δ) Αν δύο ευθείες είναι παράλληλες, τότε το σύστημα των εξισώσεων τους είναι αόριστο. **(4 Μονάδες)**

Β. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

i) Οι ευθείες $ε_1 : 2x - 3y = 18$ και $ε_2 : 3x + 5y = 8$ έχουν κοινό σημείο το

α) Α(9, 0), **β)** Β(1, 1), **γ)** Γ(6, –2), **δ)** Δ(3, –4)

ii) Αν για την επίλυση του συστήματος $\begin{cases} 5x - 4y = 6 \\ -2x + 4y = 3 \end{cases}$ εφαρμόσουμε τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών, τότε προκύπτει η εξίσωση:

α) $5x = 6$, **β)** $3x = 3$, **γ)** $-2x = 3$, **δ)** $3x = 9$

iii) Το σύστημα $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$

α) έχει μία λύση, **β)** είναι αόριστο, **γ)** είναι αδύνατο **(3 Μονάδες)**

ΘΕΜΑ 2ο

Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} \frac{2}{3}x + 5y = -8 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$ **(6 Μονάδες)**

ΘΕΜΑ 3ο

Αν οι ευθείες $ε_1 : (κ + 2)x + (λ - 1)y = 26$ και $ε_2 : (κ + 4)x - λy = 6$ τέμνονται στο σημείο Μ(2, 4), να υπολογίσετε τις τιμές των αριθμών κ, λ.

(7 Μονάδες)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο - Συναρτήσεις

4.1. Η συνάρτηση $y = αx^2$, $α \neq 0$ (2 διδακτικές ώρες)

Δραστηριότητα

Με τη δραστηριότητα δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να γνωρίσουν μερικές εκφράσεις που οδηγούν σε συναρτήσεις της μορφής $y = αx^2$, $α \neq 0$. Η εύρεση ορισμένων τιμών της συνάρτησης $y = x^2$ και ο προσδιορισμός των αντίστοιχων σημείων σε τετραγωνισμένο χαρτί δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να αντιληφθούν τη μορφή της γραφικής της παράστασης. Η επιλογή του συγκεκριμένου παραδείγματος, έγινε γιατί η ανεξάρτητη μεταβλητή παίρνει και αρνητικές τιμές.

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές πρέπει:

- Να μπορούν να προσδιορίζουν τη σχέση που συνδέει δύο μεταβλητά μεγέθη x, y και να θυμηθούν πότε αυτή καθορίζει μία συνάρτηση.
- Να μάθουν να σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = αx^2$, $α \neq 0$.
- Να κατανοήσουν τη σχέση του συντελεστή α με το σχήμα (άνοιγμα της παραβολής) και τη θέση της παραβολής $y = αx^2$ ως προς τους άξονες.
- Να προσδιορίζουν το συντελεστή α της συνάρτησης $y = αx^2$, $α \neq 0$ από στοιχεία της γραφικής της παράστασης.

Διδακτικές οδηγίες

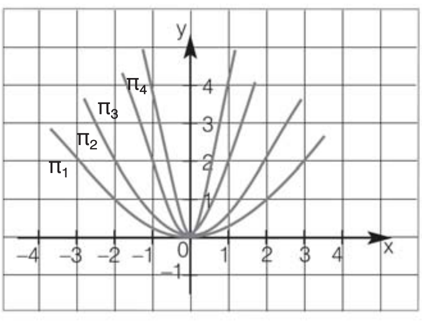
– Ο σχεδιασμός και η ερμηνεία των στοιχείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = αx^2$, $α \neq 0$ είναι ο κύριος διδακτικός στόχος της ενότητας αυτής. Γι' αυτό οι μαθητές πρέπει να ασκηθούν στο σωστό σχεδιασμό των παραβολών με τη βοήθεια τετραγωνισμένου χαρτιού.

– Προκειμένου να κατανοήσουν οι μαθητές τη σχέση του συντελεστή α με τη θέση και το άνοιγμα της παραβολής $y = αx^2$, να δοθούν κατάλληλες ερωτήσεις (ερώτ. κατανόησης 6). Συμπληρωματικά μπορεί να δοθεί και η παρακάτω άσκηση:

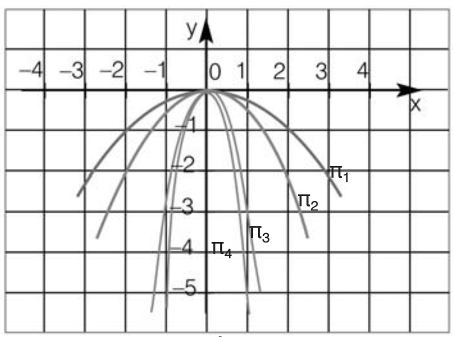
Να συμπληρώσετε τον πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παραβολή $π_1$, $π_2$, $π_3$, $π_4$ του σχήματος 1 μια από τις εξισώσεις

$π_1$	$π_2$	$π_3$	$π_4$

α) $y = 2x^2$, β) $y = 4x^2$, γ) $y = \frac{1}{2}x^2$, δ) $y = \frac{1}{4}x^2$



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Να κάνετε το ίδιο και για το σχήμα 2 με τις εξισώσεις

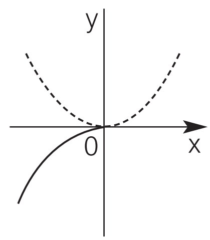
α) $y = -5x^2$, β) $y = -3x^2$, γ) $y = -\frac{1}{2}x^2$, δ) $y = -\frac{1}{4}x^2$

π_1	π_2	π_3	π_4

– Δεν πρέπει να δοθεί ιδιαίτερο βάρος στην εύρεση του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης, αλλά είναι αυτονόητο ότι οι τιμές που μπορεί να πάρει η μεταβλητή x σε μια συνάρτηση καθορίζονται από τα δεδομένα του προβλήματος. (παράδειγμα 3, άσκηση 7)
– Να αξιοποιηθεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \alpha x^2$, $\alpha \neq 0$ για την κατασκευή αντιστοίχων διαγραμμάτων (συμπληρωματικά του παραδείγματος 3) από τη Φυσική, Γεωμετρία, Οικονομία κ.τ.λ. Για παράδειγμα $S = \frac{1}{2}\alpha t^2$ για τις διάφορες τιμές του α, $E = \pi\rho^2$, $\rho > 0$ (εμβαδόν κύκλου) κ.τ.λ.

Ένα απλό εργαλείο που βοηθά στον σωστό σχεδιασμό μιας παραβολής είναι το **καμπυλόγραμμο**. Είναι ιδιαίτερα χρήσιμο, όταν στο τετραγωνισμένο χαρτί έχουν προσδιοριστεί τα σημεία από τα οποία διέρχεται η παραβολή. Η χρήση του καμπυλόγραμμου βοηθά τους μαθητές να εξοικειωθούν με τη μορφή της παραβολής και τη συμμετρικότητά της. Με τον τρόπο αυτό αποφεύγεται η χάραξή της ως ανοικτής τεθλασμένης γραμμής, όπως συνηθίζουν να κάνουν πολλοί μαθητές, καθώς ενώνουν με ευθύγραμμα τμήματα τα σημεία της που έχουν προσδιορίσει.

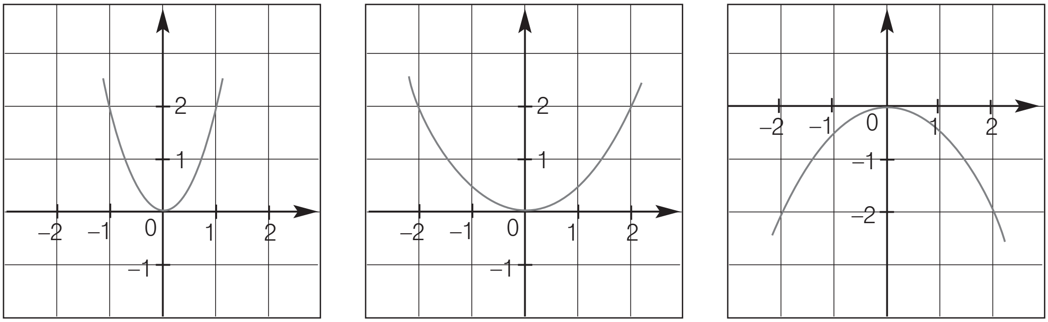
Απαντήσεις στις ερωτήσεις κατανόησης

1. Β, Γ 2. Μέγιστη α, δ, ελάχιστη β, γ
3. Σ – Λ – Λ – Σ – Σ – Σ
4. 

5. β
6. α →3, β →4, γ →1, δ →2

Συμπληρωματικά θέματα

1. Ένα ισόπλευρο τρίγωνο έχει πλευρά x. Να εκφράσετε το εμβαδόν του y ως συνάρτηση του x και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση. (Απ: $y = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$, $x>0$)
2. Τα σημεία Α, Β ανήκουν στις παραβολές $y = 3x^2$ και $y = -2x^2$ αντιστοίχως και έχουν την ίδια τετμημένη –1. Να βρείτε την απόσταση των σημείων Α, Β. (Απ: 5)
3. (Συμπληρωματική της άσκησης 4)
Αν Α, Β είναι σημεία της παραβολής $y = \frac{1}{2}x^2$ με την ίδια τεταγμένη 8, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ, όπου Ο η αρχή των αξόνων. (Απ: 32)
4. (Συμπληρωματική της άσκησης 3)
Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής σε κάθε ένα από τα παρακάτω σχήματα:



(Απ: $\alpha \rightarrow y = 2x^2$, $\beta \rightarrow y = \frac{1}{2}x^2$, $\gamma \rightarrow y = -\frac{1}{2}x^2$)

4.2. Η συνάρτηση $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ $\alpha \neq 0$ (2 διδακτικές ώρες)

Δραστηριότητα

Με τη δραστηριότητα δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να διαπιστώσουν ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 - 4x + 3$, είναι παραβολή αφού είναι δυνατόν με κατάλληλη μετατόπιση να ταυτιστεί πλήρως με την παραβολή $y = x^2$.

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές πρέπει:

- Να γνωρίζουν ότι η παραβολή $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι η παραβολή $y = \alpha x^2$ μετατοπισμένη παράλληλα προς τους άξονες, έχει κορυφή το σημείο $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$.
- Να μάθουν να σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$
- Να γνωρίζουν πότε η συνάρτηση $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$ παίρνει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή και να την προσδιορίζουν.
- Να προσδιορίζουν τη συνάρτηση $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ από στοιχεία της γραφικής της παράστασης.
- Να μπορούν να ερμηνεύουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ και να συσχετίζουν σημεία της (μέγιστο – ελάχιστο, κοινά σημεία με τους άξονες κ.τ.λ.) με συγκεκριμένες ιδιότητες της συνάρτησης.

Διδακτικές οδηγίες

- Να τονιστεί ότι:
  α) Για τη χάραξη της παραβολής $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ απαιτείται ο προσδιορισμός των συντεταγμένων της κορυφής της και ορισμένων σημείων της.
  β) Ο άξονας συμμετρίας της παραβολής είναι η κατακόρυφη ευθεία που περνά από την κορυφή της.
- Με συγκεκριμένα αριθμητικά παραδείγματα να μάθουν οι μαθητές να βρίσκουν τα κοινά σημεία μιας παραβολής με τους άξονες (παραδείγματα 1, 2). Να αποφευχθεί η

διερεύνηση του πλήθους των κοινών σημείων της παραβολής με τον άξονα $x'x$, ανάλογα με το πρόσημο της διακρίνουσας, αφού με το θέμα αυτό θα ασχοληθούν στο Λύκειο.

- Να διευκρινιστεί ότι η τεταγμένη $-\frac{\Delta}{4\alpha}$ της κορυφής της παραβολής $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ είναι ίση με την τιμή της συνάρτησης για $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$.
- Ο προσδιορισμός των κορυφών των παραβολών $y = \alpha x^2 + \gamma$ και $y = \alpha(x - \rho)^2$ μπορεί να γίνει και άμεσα. (παρατηρήσεις εφαρμογών 1, 2)

Απαντήσεις στις ερωτήσεις κατανόησης

1. **α)** παραβολή, Κ(1, –4), x = 1, **β)** ελάχιστη, –4, 1, **γ)** (–1, 0), (3, 0), (0, –3).
2. **i)** γ, **ii)** γ,
3. Λ – Σ – Σ – Σ – Σ
4. α →2, β →4, γ →1, δ →3,
5. **α)** x = 1, Κ(1, 4), **β)** y = 4, x = 1, **γ)** (–1, 0), (3, 0), (0, 3).

Η έννοια της συνάρτησης και οι δυσκολίες κατανόησής της

Η συνάρτηση είναι μια από τις σημαντικότερες έννοιες με τις οποίες έρχονται σε επαφή οι μαθητές κατά την διάρκεια της δευτεροβάθμιας αλλά και της τριτοβάθμιας εκπαίδευσή τους, αφού είναι μια έννοια κεντρική η οποία ενοποιεί το περιεχόμενο του αναλυτικού προγράμματος των Μαθηματικών στις δύο αυτές βαθμίδες. Ενώ είναι από τις σημαντικότερες έννοιες που διδάσκουμε στα σχολεία μας, είναι και μια από τις δυσκολότερες, όπως διαπιστώνεται από τις πολυάριθμες ερευνητικές εργασίες που εξετάζουν τη συγκεκριμένη έννοια. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η συνάρτηση έχει πολλούς τρόπους ύπαρξης και πολλές αναπαραστάσεις (η συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί με πίνακα τιμών, με γραφική παράσταση, με τύπο (συμβολική έκφραση) και με λεκτική έκφραση).

Στην προσπάθεια προσέγγισης της έννοιας της συνάρτησης καθώς και των εννοιών που συνδέονται με αυτή (ανεξάρτητη, εξαρτημένη μεταβλητή, σύνολο τιμών κ.ά.) έχει διαπιστωθεί από τις σχετικές έρευνες ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν πολλές δυσκολίες, οι κυριότερες από τις οποίες είναι οι εξής:

- Δυσκολία αναγνώρισης μιας σχέσης ως συνάρτησης (χρησιμοποιώντας το μονοσήμαντο του ορισμού).
- Δυσκολία στη σύνδεση της ανεξάρτητης με την εξαρτημένη μεταβλητή καθώς και στη χρήση μιας συμβολικής γλώσσας για τη παράσταση σχέσεων (μαθηματικοποίηση ενός προβλήματος)
- Δυσκολία στη μετάβαση από τη μια μορφή αναπαράστασης της έννοιας στην άλλη και το αντίστροφο.

Κάθε είδος αναπαράστασης παρέχει πληροφορίες για ορισμένες μόνο πτυχές της έννοιας χωρίς όμως να την περιγράφει ολοκληρωτικά. Οι διαφορετικές παραστάσεις που αναφέρονται στην ίδια έννοια αλληλοσυμπληρώνοται. Οι δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές στη μετάβαση από το ένα είδος αναπαράστασης στο άλλο και στη μεταξύ τους σύνδεση, εν μέρει οφείλονται και στον τρόπο διδασκαλίας της έννοιας, ο οποίος προάγει ένα συγκεκριμένο είδος μετάφρασης συναρτήσεων από την αλγεβρική έκφραση στη γραφική παράσταση. (Γαγάτσης Αθ., κ.ά, 2003)

Για το λόγο αυτό ο βασικός στόχος της διδασκαλίας της έννοιας δεν είναι μόνο να γίνει πλήρως κατανοητή στους μαθητές. Η διδασκαλία πρέπει να εστιάζει και στην ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να περνούν από τη μια αναπαράσταση της έννοιας στην άλλη με συνέπεια και ακρίβεια χωρίς αντιφάσεις.

Η διδασκαλία της έννοιας της συνάρτησης πρέπει ακόμα να συμβάλλει στη μελέτη και κατανόηση του τρόπου με τον οποίο μεταβάλλονται τα δύο μεγέθη που σχετίζονται μεταξύ τους καθώς και στην οργάνωση και παράσταση της σχέσης αυτής. Η καλλιέργεια της γνώσης αυτής βοηθά τους μαθητές στην κατανόηση του κόσμου που τους περιβάλλει, ενός κόσμου γεμάτου από πολύπλοκα συστήματα αλληλο-εξαρτώμενων μεγεθών (φυσικά, κοινωνικά, οικονομικά κ.τ.λ.). Για την επίτευξη του στόχου αυτού, οι μαθητές θα πρέπει να ασκούνται σταδιακά και μέσα από προβλήματα στον εντοπισμό και στην κατανόηση του τρόπου μεταβολής και αλληλοεξάρτησης των μεγεθών, καθώς και στην παράστασή τους με διαφορετικούς τρόπους.

Βιβλιογραφία

Παραθέτουμε στην συνέχεια έναν επιλεκτικό κατάλογο βιβλίων και άρθρων που μπορούν να βοηθήσουν τον εκπαιδευτικό που θέλει να ασχοληθεί ειδικότερα με τις δυσκολίες κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης.

- *Βασάκος Θ.: Η έννοια της συνάρτησης στους μαθητές του Λυκείου και ενέργειες κατανόησης. Εμπόδια που σχετίζονται με τον ορισμό της συνάρτησης, (Γαγάτσης Αθ. Διδακτική των Μαθηματικών. Θεωρία-Έρευνα» εκδόσεις Art of text A.E, σελ 239-258, Θεσσαλονίκη 1995)*
- *Γαγάτσης Α.- Ηλία Ι.- Ανδρέου Σ.: Αναπαραστάσεις και μάθηση των Μαθηματικών Συναρτήσεις και Αριθμητική Γραμμή, περιοδικό Ευκλείδης γ' τεύχος 59, 2003.*
- *Eisenberg Th.: Function and associated learning difficulties, Kluwer academic publishers group.*
- *Καλαβάσης Φ – Μεϊμάρης Μ: Θέματα Διδακτικής Μαθηματικών. Προτάσεις, Αθήνα 1992.*
- *Καλδρυμίδου Μ. - Οικονόμου Α.: Πρόταση Αναλυτικού Προγράμματος Συναρτήσεων. Οι βασικοί άξονες. Σχέδιο αναλυτικού προγράμματος για τα Μαθηματικά. Θεσσαλονίκη 1993.*
- *Sfard A: Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification. Tthe case of function in "The concept of Function:aspects of epistemology and Pedagogy" by Dubinsky Ed. and Harrel G.(eds). Mathematical Association of America U.S vol 25, pp. 25-58, 1992.*
- *Sierpinska A: On understanding the Notion of function in "The concept of Function:aspects of epistemology and Pedagogy" by Dubinsky Ed. and Harrel G.(eds), M.A.A vol 25, pp.59-84, 1992.*
- *Vinner S: Consept definition, consept image and the notion of function, Journal for research in Mathematics education, 14 pp. 239-305, 1983.*

Η συνάρτηση $y = αx^2 + βx + γ$ με $α \neq 0$ και τα προβλήματα μεγίστου – ελαχίστου

Για τη μελέτη και την κατανόηση του τρόπου με τον οποίο μεταβάλλονται δύο μεγέθη x, y, που συνδέονται με τη σχέση $y = αx^2 + βx + γ$, $α \neq 0$, προτείνεται να δοθούν στους μαθητές προς διερεύνηση προβλήματα μεγίστου ή ελαχίστου. Πριν όμως σχηματίσουν την αντίστοιχη συνάρτηση και τη μελετήσουν, κρίνεται σκόπιμο, όπου αυτό είναι δυνατό, να τους προτρέψει ο διδάσκων να προσπαθήσουν να πειραματιστούν και να παρατηρήσουν, να επισημάνουν ένα pattern (ένα κανόνα) και να αναπτύξουν μια εικασία για το μέγιστο ή το ελάχιστο(επαγωγική συλλογιστική). Στη συνέχεια, να ελέγξουν την εικασία αυτή μελετώντας τη συνάρτηση (παραγωγική συλλογιστική).

Παράδειγμα

Από όλα τα ορθογώνια που έχουν την ίδια περίμετρο 30 cm, ποιο έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν;

α) Σχεδίασε στο τετράδιό σου ορθογώνια με περίμετρο 30 cm.

β) Φτιάξε έναν πίνακα στον οποίο να εμφανίζονται οι διαστάσεις και το εμβαδόν των ορθογωνίων που σχεδίασες .

γ) Βρήκες αρκετές τιμές, ώστε να είσαι βέβαιος ότι μπορείς να προσδιορίσεις το ορθογώνιο με το μεγαλύτερο εμβαδόν; Αν όχι, βρες μερικές ακόμα.

δ) Αν θέλεις να αποδείξεις τον ισχυρισμό στον οποίο κατέληξες, τότε:

- Ονόμασε x το μήκος του ορθογωνίου και προσδιόρισε το πλάτος του ως συνάρτηση του x.
- Υπολόγισε το εμβαδόν y του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x και προσδιόρισε τη μέγιστη τιμή του.

ε) Ποιο είναι, τελικά το ορθογώνιο με το μεγαλύτερο εμβαδόν;

Με ανάλογο τρόπο είναι δυνατόν να λυθούν και προβλήματα , όπως και το παρακάτω:

Σ' ένα ορθογώνιο με περίμετρο 100 cm, αν ενώσουμε τα μέσα των πλευρών του σχηματίζεται ένας ρόμβος. Ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου, ώστε ο ρόμβος να έχει μέγιστο εμβαδόν;

Βιβλιογραφία: *Νίκος Κλαουδάτος, Σημειώσεις Διδακτικής του μαθήματος των Μαθηματικών, Τμήμα Μαθηματικών, Τομέας Διδακτικής των Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών.*

Εναλλακτική διδασκαλία με τη χρήση Η/Υ (Διερευνητική προσέγγιση) ΘΕΜΑ: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = αx^2 + βx + γ$

Ο Η/Υ με το κατάλληλο λογισμικό μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως αφετηρία προβληματισμού αλλά και ως εργαλείο ανακάλυψης και κατανόησης μαθηματικών σχέσεων. Ο διδάσκων μπορεί με «έξυπνες παρεμβάσεις» να βοηθήσει το μαθητή να εξοικειωθεί με αφηρημένες έννοιες, αφού ο Η/Υ δίνει τη δυνατότητα οπτικοποίησής τους. Όμως, η χρήση του Η/Υ στη μαθησιακή διαδικασία συνοδεύεται και από αρνητικές επιπτώσεις. Η συνεχής οπτικοποίηση των πάντων μπορεί να οδηγήσει στην ελλιπή κατανόηση της έννοιας του μαθηματικού αντικειμένου και στην αναστολή ή αδράνεια της δημιουργικής φαντασίας του μαθητή. Γι' αυτό πρέπει να χρησιμοποιείται στις περιπτώσεις όπου κρίνεται απαραίτητος.

Ο σχεδιασμός των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων προσφέρεται για να υποστηριχτεί από Η/Υ. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης που περιγράφεται μ' έναν τύπο, π.χ. $y = \alpha x + \beta$ ή $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, μπορεί να σχεδιαστεί στον Η/Υ με διάφορα λογισμικά Function Probe, Derive, Sketchpad, Mathematika, Mathpad, Mathcad, Graphmatica κ.τ.λ., αλλά και με ειδικά προγράμματα (Java appltes) που υπάρχουν σε διάφορες ιστοσελίδες του Internet, π.χ.
http://math.hws.edu/javamath/config_applets/SimpleGraph.html.
http://why.gr/math/Algebra/Files/Function1.htm.
http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html, http://www.mathgv.com

Για μια συνάρτηση που περιγράφεται μ' έναν τύπο, π.χ. $y = \alpha x + \beta$ ή $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, όλα αυτά τα προγράμματα:
- Τροποποιούν τη γραφική παράσταση, όταν αλλάζουν οι συντελεστές στον τύπο της συνάρτησης .
- Τροποποιούν τη γραφική παράσταση, όταν αλλάζει το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Προετοιμασία

Σε συνεργασία με τον καθηγητή της Πληροφορικής και αφού επιλεγεί το κατάλληλο λογισμικό ώστε να είναι απλό και φιλικό για τους μαθητές, μπορεί να σχεδιαστεί μια δραστηριότητα που να έχει ως βασικό στόχο τη μελέτη των μετατοπίσεων της παραβολής $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ και τη σύνδεσή της με την $y = \alpha x^2$, $\alpha \neq 0$.
Η διδασκαλία κρίνεται σκόπιμο να γίνει στο εργαστήριο της πληροφορικής και οι μαθητές αφού χωριστούν σε ομάδες 2 ή 3 ατόμων να χειριστούν οι ίδιοι το πρόγραμμα (εναλλασσόμενοι στην πληκτρολόγηση) προκειμένου να πειραματιστούν, να παρατηρήσουν και να καταγράψουν τα συμπεράσματά τους.

Επισημάνσεις

Με τη δραστηριότητα οι μαθητές καλούνται να χρησιμοποιήσουν παράλληλα δύο είδη αναπαραστάσεων της συνάρτησης της παραβολής, τον τύπο και τη γραφική παράσταση, και να τις συνδέσουν παρατηρώντας πώς συμμεταβάλονται. Ο Η/Υ χρησιμοποιείται ως εργαλείο σχεδίασης των γραφικών παραστάσεων με τη βοήθεια του οποίου οι μαθητές καλούνται να επισημάνουν ένα μοντέλο συμπεριφοράς της γραφικής παράστασης, να συνδέσουν τον τύπο με τη γραφική παράσταση και να διακρίνουν τα χαρακτηριστικά της παραβολής.
Με τη δραστηριότητα πρέπει να ασχοληθούν οι μαθητές αφού ολοκληρωθεί η διδασκαλία του κεφαλαίου στην τάξη και οι μαθητές έχουν σχεδιάσει αρκετές γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, στο τετραγωνισμένο χαρτί.

* Δραστηριότητες με τις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων (υποστηρικτικό υλικό) υπάρχουν και στην **Εκπαιδευτική Πύλη** του ΥΠΕΠΘ www.e-yliko.gr

Στη συνέχεια παραθέτουμε ένα ενδεικτικό σχέδιο μαθήματος με τη χρήση Η/Υ. Το πρόγραμμα που προτείνεται να χρησιμοποιηθεί είναι το graphmatica, το οποίο διατίθεται ελεύθερα στο διαδίκτυο στη διεύθυνση www.graphmatica.com.

Σχέδιο διδασκαλίας με τη χρήση Η/Υ

(Φυλλάδιο για το μαθητή)

Θέμα: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

Για να σχεδιάσετε με το Graphmatica τη συνάρτηση $f(x) = x^2$ πληκτρολογήστε $y = x\wedge2$ και πατήστε enter.

Α. Ο ρόλος του συντελεστή α στη γραφική παράσταση της $y = \alpha x^2$.

Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 1x^2$.
Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε και τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων που προκύπτουν αν στη θέση του συντελεστή 1 βάλετε διαδοχικά τους αριθμούς:

α) 2, 3, 4, 5, ...,10,... και 0.8, 0.5, 0.4, $\frac{1}{4}$,...

β) –2, –3, –4, ..., –8... και $-\frac{1}{4}$, –0,6, ...

Μπορείτε να διατυπώσετε ένα συμπέρασμα;

Β. Μελέτη των μετατοπίσεων της παραβολής $y = \alpha x^2$.

1. Αφού καθαρίσετε την οθόνη σας (με το εικονίδιο clear screen) να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $y=x^2$.
Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε και τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων που προκύπτουν αν στο x^2
α) προσθέσετε διαδοχικά τους αριθμούς 1, 2, 3, ...($y = x^2 + 1$, $y = x^2 + 2$, ...)
β) αφαιρέσετε διαδοχικά τους αριθμούς 1, 2, 3, ... ($y = x^2 - 1$, $y = x^2 - 2$,...)
Μπορείτε να διατυπώσετε ένα συμπέρασμα ;

2. Αφού καθαρίσετε την οθόνη σας να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $y=x^2$.
Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε και τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων που προκύπτουν αν όπου x θέσετε
α) $x - 1$, $x - 2$, ... [$y = (x - 1)^2$, $y = (x - 2)^2$, ...]
β) $x + 1$, $x + 2$, ... [$y = (x + 1)^2$, $y = (x + 2)^2$, ...]
Μπορείτε να διατυπώσετε ένα συμπέρασμα;

Γ. Η παραβολή και ο άξονας συμμετρίας της.

1. Αφού καθαρίσετε την οθόνη σας στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων
α) $y = -x^2 - 2x$, $y = -x^2 - 2x + 1$, $y = -x^2 - 2x + 2$, $y = -x^2 - 2x - 1$, ...
β) $y = 2x^2 - 3x$, $y = 2x^2 - 3x + 1$, $y = 2x^2 - 3x + 2$, $y = 2x^2 - 3x - 1$, ...
Τι παρατηρείτε για τον άξονα συμμετρίας τους;

2. Αφού καθαρίσετε την οθόνη σας στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων
α) $y = x^2$, $y = (x-1)^2$, $y = (x - 2)^2$, $y = (x - 3)^2$,... και
β) $y = (x+1)^2$, $y = (x+1)^2$, $y = (x + 2)^2$, $y = (x + 3)^2$...
Τι παρατηρείτε για τον άξονα συμμετρίας τους;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο - Πιθανότητες

5.1. Σύνολα (3 διδακτικές ώρες)

Δραστηριότητα

Με τη δραστηριότητα επιδιώκεται μ' ένα απλό παράδειγμα να κατανοήσουν οι μαθητές την έννοια του συνόλου και του τρόπου με τον οποίο αυτό παριστάνεται (ερώτηση 1). Δίνεται ακόμη η δυνατότητα να μάθουν τις έννοιες του υποσυνόλου (ερώτηση 2), των ίσων συνόλων (ερώτηση 3) και του κενού συνόλου (ερώτηση 4). Τα συγκεκριμένα σύνολα περιέχουν ως στοιχεία τους γράμματα της αλφαβήτου το σύνολο των οποίων μπορεί να θεωρηθεί ως βασικό σύνολο.

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές πρέπει :

- Να γνωρίζουν την έννοια του συνόλου, να μπορούν να το ορίζουν με περιγραφή ή με αναγραφή των στοιχείων του και να το παριστάνουν με διάγραμμα Venn.
- Να μπορούν να διακρίνουν αν δύο σύνολα είναι ίσα και πότε ένα σύνολο είναι υποσύνολο ενός άλλου συνόλου. Να γνωρίζουν επίσης την έννοια του κενού και του βασικού συνόλου.
- Να μπορούν να βρίσκουν την ένωση και την τομή δύο συνόλων, καθώς και το συμπλήρωμα ενός συνόλου.

Διδακτικές οδηγίες

- Η διδασκαλία της παραγράφου αυτής σε καμιά περίπτωση δεν πρέπει να πάρει θεωρητική μορφή. Γι' αυτό τα σύνολα, οι μεταξύ τους σχέσεις (ίσα, υποσύνολα) και οι πράξεις να εισαχθούν με απλά παραδείγματα καθώς και με τα αντίστοιχα διαγράμματα Venn.
- Επειδή οι μαθητές έρχονται για πρώτη φορά σε επαφή με τα σύνολα, κρίνεται σκόπιμο να αποφευχθεί ο τυπικός φορμαλιστικός συμβολισμός στην παράσταση ενός συνόλου και τις πράξεις μεταξύ συνόλων.
- Να τονιστεί ότι κάθε σύνολο είναι υποσύνολο του εαυτού του και το κενό είναι υποσύνολο οποιουδήποτε συνόλου. (άσκηση 3)
- Στην ενότητα αυτή δίνεται μια ακόμα ευκαιρία να κατανοήσουν οι μαθητές ποια στοιχεία περιέχει καθένα από τα γνωστά σύνολα των αριθμών N, Z, Q, R, (ερώτηση κατανόησης 2, άσκηση 1).
- Να δοθεί ιδιαίτερο βάρος στη μεταφορά από τη φυσική γλώσσα, στη γλώσσα των συνόλων και το αντίστροφο. (ασκήσεις 8 και 9)

Απαντήσεις στις ερωτήσεις κατανόησης

1. Σ – Λ – Λ – Σ – Σ – Σ
2. α →3, β →4, γ →2, δ →1
3. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, $A' = \{4, 5, 6, 7\}$, $B' = \{1, 6, 7\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{2, 3\}$
4. α →5, β →6, γ →2, δ →3, ε →1
5. **α)** $A \cup B$: κόκκινο – κίτρινο – μπλέ, **β)** $A \cap B$: κίτρινο, **γ)** A': μπλέ – πράσινο, **δ)** B': κόκκινο – πράσινο, **ε)** $(A \cup B)'$: πράσσινο, **στ)** $(A \cap B)'$: κόκκινο – μπλέ – πράσινο

Διαγράμματα Venn

Ο Άγγλος μαθηματικός John Venn (1834-1923) ασχολήθηκε με τη Μαθηματική Λογική και έγραψε αρκετά συγγράμματα. Έγινε όμως γνωστός για τα διαγράμματα που χρησιμοποίησε για να αναπαραστήσει σχηματικά λογικές σχέσεις. Αυτόν τον τύπο των διαγραμμάτων πριν από τον Venn τον χρησιμοποιούσε και ο Leibniz.

Βιβλιογραφία

http://www.andrews.edu/~calkins/math/biograph/biovenn.htm
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Venn.html

5.2. Δειγματικός χώρος – Ενδεχόμενα (2 διδακτικές ώρες)

Δραστηριότητα

Με τη δραστηριότητα επιδιώκεται να κατανοήσουν οι μαθητές τι ονομάζεται πείραμα τύχης και να προσδιορίσουν τα δυνατά του αποτελέσματα, από τα οποία θα προκύψει και η έννοια του δειγματικού χώρου. Με τα δύο τελευταία πειράματα τύχης δίνεται η ευκαιρία να αναζητήσουν τεχνικές προσδιορισμού του δειγματικού χώρου (δεντροδιάγραμμα, πίνακας).

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές πρέπει:

- Να μπορούν να διακρίνουν ποιο πείραμα ονομάζεται πείραμα τύχης και να βρίσκουν το δειγματικό του χώρο.
- Να μάθουν τι ονομάζεται ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης, πότε λέμε ότι αυτό πραγματοποιείται καθώς και πότε είναι βέβαιο ή αδύνατο.
- Να γνωρίζουν πώς γίνονται οι πράξεις μεταξύ ενδεχομένων και ποια ενδεχόμενα λέγονται ασυμβίβαστα.

Διδακτικές οδηγίες

- Οι μαθητές πρέπει να συνειδητοποιήσουν με απλά παραδείγματα από την καθημερινή τους εμπειρία ότι σ'ένα πείραμα τύχης, ενώ είναι γνωστά τα δυνατά αποτελέσματά του, δεν μπορούν με κανέναν τρόπο να προβλέψουν με βεβαιότητα το αποτέλεσμα, όσες φορές και αν το επαναλάβουν. (ερώτηση κατανόησης 1)
- Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στην εύρεση του δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης και στην απαρίθμηση των στοιχείων του.
- Οι μαθητές να ασκηθούν στις διάφορες τεχνικές προσδιορισμού του δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης στηριζόμενοι στη βοήθεια δεντροδιαγράμματος ή πίνακα. (παραδείγματα 1, 2, ερωτήσεις κατανόησης 2, 3)
- Με συγκεκριμένα παραδείγματα να κατανοήσουν τι ονομάζεται ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης (ερωτήσεις κατανόησης 4), πότε λέμε ότι ένα ενδεχόμενο πραγματοποιείται και πότε είναι βέβαιο ή αδύνατο. (ερωτήσεις κατανόησης 5, 6, 7)
- Να μπορούν να αντιστοιχίζουν σχέσεις ενδεχομένων διατυπωμένες στη φυσική γλώσσα με σχέσεις διατυπωμένες στη γλώσσα των συνόλων (πράξεις με ενδεχόμενα). (ερώτηση κατανόησης 8, πίνακας ανακεφαλαίωσης)

Απαντήσεις στις ερωτήσεις κατανόησης

1. α–γ–δ **2.** ΝΑΙ – Στη δεύτερη γραμμή και την πρώτη στήλη το σωστό είναι ΒΑ αντί του ΑΒ.
3. Αποτέλεσμα 235, 253, 325, 352, 523,532 **4.** Α – Δ **5.** Α – Γ
6. γ **7.** δ **8.** α →2, β →4, γ →1

Πείραμα (ορολογία)

Με τον όρο «πείραμα» εννοούμε κάθε διαδικασία που καταλήγει σ' ένα ή περισσότερα αποτελέσματα ή όπως χαρακτηριστικά αποκαλούνται, **εξαγόμενα** ή **παρατηρήσεις**.
Η εκτέλεση ενός πειράματος ονομάζεται **προσπάθεια** ή **δοκιμή** και μπορεί να επαναληφθεί μία ή και περισσότερες φορές. Τα πειράματα διακρίνονται σε **προσδιορίσιμα** ή **αιτιοκρατικά** (deterministic) και σε **μη προσδιορίσιμα** ή **τυχαία** (radom experiment).
Προσδιορίσιμο ονομάζεται ένα πείραμα, όταν τα αποτελέσματά του είναι γνωστά με ακρίβεια πριν από την εκτέλεσή του. Έτσι, π.χ. όταν θερμαίνουμε μια ποσότητα αποσταγμένου νερού στην επιφάνεια της θάλασσας, δηλαδή σε ατμοσφαιρική πίεση 760mm Hg, ξέρουμε εκ των προτέρων ότι το νερό θα αρχίσει να βράζει, όταν η θερμοκρασία του φθάσει στους 100˚C. Κάθε τέτοιο πείραμα, κατά το οποίο η γνώση των συνθηκών εκτέλεσής του καθορίζει πλήρως το αποτέλεσμά του, λέγεται αιτιοκρατικό πείραμα.
Μη προσδιορίσμο ή **τυχαίο** ονομάζεται ένα πείραμα, όταν τα αποτελέσματά του δεν μπορούν να προβλεφθούν με ακρίβεια, αν και επαναλαμβάνεται φαινομενικά τουλάχιστον πάντοτε κάτω από τις ίδιες συνθήκες. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το πείραμα της ρίψης ενός ζαριού.

5.3. Έννοια της πιθανότητας (3 διδακτικές ώρες)

Δραστηριότητα

Με τη δραστηριότητα δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να διατυπώσουν την εξής εικασία: Μεταξύ δύο ενδεχομένων πιθανότερο να συμβεί είναι εκείνο που έχει περισσότερες δυνατότητες πραγματοποίησης. Στην προσπάθεια να επαληθεύσουν την εικασία αυτή θα οδηγηθούν στον κλασικό ορισμό της πιθανότητας.
(Απ: $A = \{0, 2, 4\}$, $B = \{6, 8\}$, $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{2}{5}$, επομένως ο ισχυρισμός του Γιώργου είναι σωστός).

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές πρέπει:
- Να μάθουν να υπολογίζουν την πιθανότητα ενός ενδεχομένου σε απλές περιπτώσεις, όπου τα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης είναι ισοπίθανα εφαρμόζοντας τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας.
- Να γνωρίζουν τους βασικούς κανόνες λογισμού πιθανοτήτων.

Διδακτικές οδηγίες

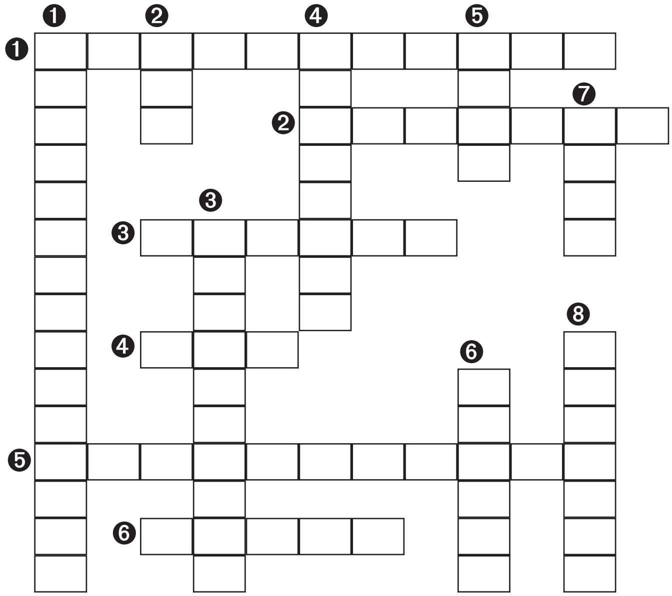
- Να διευκρινιστεί ότι ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας ισχύει μόνο στην περίπτωση όπου τα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης είναι ισοπίθανα.
  Για παράδειγμα, αν από ένα κουτί που περιέχει 10 κόκκινες, 10 πράσινες και 10 κίτρινες μπάλες επιλέξουμε μία, τότε όλα τα χρώματα είναι ισοπίθανα. Όμως αν από ένα κουτί που περιέχει 10 κόκκινες, 15 πράσινες και 25 κίτρινες μπάλες επιλέξουμε μία, τότε όλα τα χρώματα δεν είναι ισοπίθανα.
  Σε επόμενη τάξη θα μάθουν και τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας, τον οποίο χρησιμοποιούμε και όταν ο δειγματικός χώρος δεν αποτελείται από ισοπίθανα αποτελέσματα.
- Να τονιστεί ιδιαίτερα ότι η πιθανότητα ενός ενδεχομένου είναι ένας αριθμός μικρότερος ή ίσος του 1 και μεγαλύτερος ή ίσος του 0, ο οποίος συχνά εκφράζεται και με ένα ποσοστό. (παράδειγμα 1)

– Με απλά παραδείγματα να μάθουν τη σχέση που συνδέει την πιθανότητα ενός ενδεχομένου με την πιθανότητα του συμπληρωματικού του (παράδειγμα 2α, ερωτήσεις κατανόησης 3δ, 4) και τον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων. (παράδειγμα 2β, ερώτηση κατανόησης 5)

Απαντήσεις στις ερωτήσεις κατανόησης

1. α–δ **2.** γ **3.** Λ – Λ – Σ – Σ **4.** γ **5.** Όχι, αφού $\frac{1}{11}+\frac{6}{11}\neq\frac{4}{11}+\frac{5}{11}$

Συμπληρωματικά θέματα



Οριζόντια:

1. Ο χώρος αυτός εκφράζει το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης.
2. Το ενδεχόμενο αυτό δεν πραγματοποιείται ποτέ.
3. Το ενδεχόμενο αυτό πραγματοποιείται πάντοτε.
4. Με τα διαγράμματά του παριστάνουμε τα σύνολα.
5. Τα ενδεχόμενα αυτά δεν πραγματοποιούνται ποτέ ταυτόχρονα.
6. Πράξη με σύνολα.

Κάθετα:

1. Με τη χρήση του διαγράμματος αυτού προσδιορίζουμε το δειγματικό χώρο ενός πειράματος τύχης.
2. Είναι τα σύνολα Α = {ι, δ, α} και Β = {γράμμα της λέξης δαδί}.
3. Λέγεται έτσι κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου Ω.
4. Ένα σύνολο παριστάνεται και με ... των στοιχείων του.
5. Το σύνολο χωρίς στοιχεία.
6. Το σύνολο που προκύπτει από την ένωση δύο συμπληρωματικών ενδεχομένων.
7. Πράξη με ενδεχόμενα
8. Χρησιμοποιείται για την εύρεση του δειγματικού χώρου.

Απαντήσεις:

Οριζόντια: **1.** ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ, **2.** ΑΔΥΝΑΤΟ, **3.** ΒΕΒΑΙΟ, **4.** ΒΕΝ, **5.** ΑΣΥΜΒΙΒΑΣΤΑ, **6.** ΕΝΩΣΗ

Κάθετα: **1.** ΔΕΝΤΡΟΔΙΑΓΡΑΜΜΑ, **2.** ΙΣΑ, **3.** ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΟ, **4.** ΑΝΑΓΡΑΦΗ, **5.** ΚΕΝΟ, **6.** ΒΑΣΙΚΟ, **7.** ΤΟΜΗ, **8.** ΠΙΝΑΚΑΣ

Ιστορικό σημείωμα
ΘΕΜΑ: Η θεωρία των πιθανοτήτων

Αν και τα τυχερά παιχνίδια ήταν διαδεδομένα σ' όλο τον αρχαίο κόσμο και η τύχη από την αρχαιότητα απασχολούσε τους ανθρώπους, μέχρι την εποχή της Αναγέννησης δεν είχαν καταγραφεί προσπάθειες ώστε ν' ανιχνευτούν οι «νόμοι» της. Αρκετοί παίκτες όμως, είχαν παρατηρήσει πως όταν έριχναν πολλές φορές ένα ζάρι, κάθε έδρα του εμφανιζόταν περίπου στο 1/6 των συνολικών ρίψεων. Ένα από τα πρώτα βιβλία για τις πιθανότητες «Για το παίξιμο των ζαριών» γράφηκε από τον Τζιρόλαμο Καρντάνο (1501-1576) που ήταν μανιώδης παίκτης τυχερών παιχνιδιών. Όσοι όμως παίζουν τυχερά παιχνίδια, βρίσκουν συνήθως πρακτικούς τρόπους για να εκτιμούν την πιθανότητα ορισμένων καταστάσεων κι έτσι να αποφασίζουν πώς πρέπει να παίξουν και πόσα χρήματα θα στοιχηματίσουν. Αν δεν ακολουθούν μια μέθοδο, θα χάσουν γρήγορα τα χρήματά τους.

Το αρχικό πρόβλημα που στάθηκε η αφετηρία για να διατυπωθεί η θεωρία των πιθανοτήτων τέθηκε το1654 στον Πασκάλ, από έναν επαγγελματία παίκτη τυχερών παιχνιδιών, τον Ιππότη ντε Μερέ (Chevalier de Méré, 1610-1685). Ο παίκτης θεωρούσε ότι η πιθανότητα να φέρει μια φορά τουλάχιστο έξι, όταν ρίχνει τέσσερις φορές ένα ζάρι, ήταν ίδια με την πιθανότητα να φέρει μια φορά τουλάχιστον εξάρες ρίχνοντας δύο ζάρια είκοσι τέσσερις φορές. Η εμπειρία όμως δεν επιβεβαίωνε αυτή την υπόθεση και, όπως αποδείχθηκε αργότερα, είχε άδικο. Έτσι απευθύνθηκε στον Πασκάλ, στον οποίο έθεσε το ερώτημα αν έπρεπε ή όχι να στοιχηματίζει στο συγκεκριμένο παιχνίδι με τα ζάρια. Ο Πασκάλ ανέπτυξε πάνω στο θέμα αυτό, καθώς και σε άλλα σχετικά ζητήματα, αλληλογραφία με τον Φερμά.(Η δραστηριότητα που ανέπτυσσαν οι μαθηματικοί σε μια περίοδο όπου δεν υπήρχαν επιστημονικά περιοδικά, οδήγησε στη δημιουργία επιστημονικών κύκλων στα πλαίσια των οποίων διεξάγονταν συζητήσεις καθώς και σε συνεχή αλληλογραφία). Ο Πασκάλ και ο Φερμά ανέπτυξαν ορισμένες μαθηματικές τεχνικές με τις οποίες μπορούμε να κρίνουμε πόσο πιθανή είναι η εμφάνιση ορισμένων συνδυασμών στα ζάρια. Με τον τρόπο αυτό έθεσαν τα θεμέλια της θεωρίας των πιθανοτήτων, την οποία μάλιστα ονόμασαν «Γεωμετρία της Τύχης». Για την απαρίθμηση των πιθανών περιπτώσεων στα διάφορα προβλήματα ο Πασκάλ χρησιμοποίησε το αριθμητικό τρίγωνο.

Η προσπάθεια του Ολλανδού Χόϋχενς (Chr. Huygens 1629-1662) να δώσει τις δικές του απαντήσεις στην αλληλογραφία Πασκάλ-Φερμά, είχε ως αποτέλεσμα να εκδοθεί η πρώτη πραγματεία για τις πιθανότητες με τον τίτλο «Συλλογισμοί για τυχερά παιχνίδια». Τα επόμενα βήματα έγιναν από τους ντε Βιτ και Χάλλεϋ οι οποίοι κατασκεύασαν αναλογιστικούς συνταξιοδοτικούς πίνακες (1671, 1693).

Η βαθμιαία ανάπτυξη του ενδιαφέροντος σχετικά με τις πιθανότητες οφείλεται πρωταρχικά στην εξάπλωση των ασφαλίσεων καθώς από το τέλος του 17ου αιώνα είχαν αρχίσει να χρησιμοποιούν τη θεωρία των πιθανοτήτων στις ασφάλειες των καραβιών, στη συλλογή εσόδων του κράτους κ.τ.λ. Τα ερωτήματα όμως γύρω από αυτές προέκυψαν από τα τυχερά παιχνίδια. Η θεωρία των πιθανοτήτων εξετάζει ένα μεγάλο αριθμό συμβάντων τα οποία μεμονωμένα έχουν τυχαίο χαρακτήρα, αλλά στο σύνολό τους είναι προβλέψιμα.

Τον 18ο αιώνα η θεωρία των πιθανοτήτων αναπτύχθηκε ακόμα περισσότερο με τις εργασίες των Bernoulli, De Moivre, και Gauss (κανονική κατανομή Gauss) που αποδείχθηκε ανεκτίμητη για την επιστήμη. Το 1812 ο Laplace εισήγαγε νέες ιδέες και μαθηματικές τεχνικές στο βιβλίο του «Théorie Analytique des probabilités.». Ο Laplace δεν περιορίστηκε στην μαθηματική ανάλυση των τυχερών παιχνιδιών, αλλά εφάρμοσε τα συμπεράσματά του σε πολλά επιστημονικά και πρακτικά προβλήματα.

Κατά τη διάρκεια του 19ου αιώνα νέοι κλάδοι των εφαρμοσμένων μαθηματικών αναπτύχθηκαν στηριζόμενοι στη θεωρία των πιθανοτήτων, όπως η θεωρία των Σφαλμάτων, η Στατιστική Μηχανική, και τα Ασφαλιστικά Μαθηματικά. Στον 20ο αιώνα η Θεωρία των Πιθανοτήτων σημείωσε αλματώδη πρόοδο με τις εργασίες των Chebyshev, Markov, von

Mises, Kolmogorov κ.ά. Οι εφαρμογές της αναφέρονται σ' ένα ευρύτατο φάσμα επιστημών, τη Φυσική, τη Χημεία, τη Γενετική, τη Ψυχολογία, την Οικονομία, τη Μετεωρολογία, τις Τηλεπικοινωνίες, κ.ά.

Βιβλιογραφία

- *E.T. Bell: Οι Μαθηματικοί, τόμος Ι, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 1995.*
- *Morris Klein: Τα μαθηματικά στο Δυτικό Πολιτισμό, τόμος ΙΙ, εκδόσεις Κώδικας, Αθήνα.*
- *Dirk Struik: Συνοπτική ιστορία των Μαθηματικών, εκδόσεις «Ι. Ζαχαρόπουλος», Αθήνα 1982.*

Internet και Μαθηματικά – Οι πιθανότητες

Σε πολλές ιστοσελίδες υπάρχουν ενδιαφέρουσες δραστηριότητες με τις οποίες επιδιώκεται να γίνει κατανοητό ότι τα αποτελέσματα της ρίψης ενός νομίσματος, ενός ή περισσοτέρων ζαριών, του τροχού της τύχης κ.τ.λ. είναι ισοπίθανα, όταν το πείραμα επαναλαμβάνεται πολλές φορές (νόμος μεγάλων αριθμών). Σε άλλες, πάλι, ιστοσελίδες υπάρχουν δραστηριότητες στις οποίες ζητείται να υπολογιστεί η πιθανότητα διαφόρων ενδεχομένων.

http://www.cut-the-knot.com/probability.htm. http://mathforum.org/drexel.
www.bbc.co.uk/schools http://www.shodor.org/interactivate/activities/spinner3
http://www.stat.sc.edu/~ west/javahtml/CTL.html
http://www.stat.sc.edu/~ west/javahtml/LetsMakeaDeal.html
http://nlvm.usu.edu/en/nav/trames_asid_186_g_1_t_5.html

Το τρίγωνο του Πασκάλ και οι Πιθανότητες

Το τρίγωνο του Πασκάλ, όπως είδαμε, μας δίνει έναν πρακτικό κανόνα υπολογισμού των συντελεστών των όρων του αναπτύγματος του διωνύμου $(α + β)^ν$. Οι συντελεστές αυτοί παίζουν σημαντικό ρόλο σε προβλήματα **Συνδυαστικής** και **Πιθανοτήτων**.

						1					
1η γραμμή					1		1				
2η γραμμή				1		2		1			
3η γραμμή			1		3		3		1		
4η γραμμή		1		4		6		4		1	
5η γραμμή	1		5		10		10		5		1

Για παράδειγμα σε τρεις διαδοχικές ρίψεις ενός νομίσματος το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων (αποτελεσμάτων) είναι το άθροισμα των συντελεστών του αναπτύγματος $(α + β)^3$ δηλαδή $1 + 3 + 3 + 1 = 8$, ενώ το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων ώστε να έχω 2 φορές Κ είναι ο συντελεστής 3 του $α^3β^{3-2}$ ή $α^3β^1$ της τρίτης γραμμής του τριγώνου. Τα αποτελέσματα αυτά είναι τα ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ.

Γενικά προκειμένου να υπολογίσουμε το πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων στις ν ρίψεις ενός νομίσματος αρκεί να αθροίσουμε τους συντελεστές της αντίστοιχης γραμμής στο τρίγωνο του Πασκάλ. Μπορούμε όμως να βρούμε το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων χωρίς να εκτελέσουμε τις προσθέσεις, καθώς το άθροισμα των αριθμών της ν-οστής γραμμής του τριγώνου του Πασκάλ είναι ίσο με τη ν-οστή δύναμη του 2. Πράγματι αν στα διώνυμα $(α + β)^0$, $(α + β)^1$, $(α + β)^2$, $(α + β)^3$, $(α + β)^4$, ... και στα αναπτύγματά τους 1, $α + β$, $(α^2 + 2αβ + β^2)$, ... θέσουμε όπου $α = β = 1$, τότε έχουμε τις ισότητες που

παρουσιάζονται στον πίνακα στο βιβλίο του μαθητή. Έτσι το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων, όταν ρίχνουμε ένα νόμισμα διαδοχικά τρεις φορές, είναι $2^3 = 8$ όσο είναι το άθροισμα των συντελεστών του αναπτύγματος $(\alpha + \beta)^3$. Αν γνωρίζουμε το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες.
Ο συντελεστής του όρου $\alpha^3\beta^{5-3}$ του αναπτύγματος της πέμπτης γραμμής του τριγώνου, δηλαδή το 10, εκφράζει το πλήθος των δυνατών τριάδων που μπορούν να σχηματιστούν από πέντε στοιχεία.
Για παράδειγμα αν, από πέντε μαθήτριες μιας τάξης {Α, Β, Γ, Δ, Ε} θέλουμε να επιλέξουμε μια τριμελή ομάδα, χωρίς να μας ενδιαφέρει η κατάταξη των μελών της ομάδας, προκειμένου να συμμετάσχουν στο ανέβασμα ενός θεατρικού έργου τριών ρόλων, τότε ο αριθμός των τριμελών θεατρικών ομάδων που μπορούν να γίνουν από το σύνολο των πέντε μαθητριών, είναι 10. Οι τριάδες αυτές είναι οι ΑΒΓ, ΑΒΔ, ΑΒΕ, ΑΓΔ, ΑΓΕ, ΑΔΕ, ΒΓΔ, ΒΓΕ, ΒΔΕ, ΓΔΕ. Κάθε επιλογή από τις δέκα ονομάζεται, ως γνωστόν **συνδυασμός των 5 ανά 3**. Γενικότερα, συνδυασμός ν στοιχείων ενός συνόλου Α ανά κ, είναι κάθε υποσύνολο του Α με ν στοιχεία. Το πλήθος των συνδυασμών των ν στοιχείων ανά κ το υπολογίζουμε από τον τύπο $\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}$

Στο παράδειγμά μας έχουμε: $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 10.$

Το πλήθος όμως των δυνατών τριάδων μπορεί να βρεθεί και από το τρίγωνο του Πασκάλ και είναι ο συντελεστής του όρου $\alpha^3\beta^{5-3}$ του αναπτύγματος της πέμπτης γραμμής του τριγώνου δηλαδή το 10.
Απαντήσεις ερωτημάτων της σελ. 181 στο βιβλίο του μαθητή: **α)** $2^5 = 32$, **β)** $\frac{2}{32} = \frac{1}{16}$,

γ) το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων είναι $2^6 = 64$ άρα η πιθανότητα είναι $\frac{1}{64}$.

Σχέδιο διαθεματικής εργασίας
ΘΕΜΑ: Η μεταβίβαση χαρακτηριστικών από γενιά σε γενιά
Ο Μέντελ και οι νόμοι της κληρονομικότητας

Η μεταβίβαση συγκεκριμένων χαρακτηριστικών από γονείς σε απογόνους μελετήθηκε στα φυτά από τον Γ. Μέντελ (G. Mentel). Ο Μέντελ δεν ήταν ο μοναδικός ούτε και ο πιο διάσημος μελετητής του φαινομένου της κληρονομικότητας. Υπήρξε, ωστόσο, ο πρώτος που κατάφερε να καταλήξει σε συμπεράσματα για τους νόμους που τη διέπουν. Η επιτυχία του οφείλεται στην καταλληλότητα του πειραματικού υλικού που επέλεξε, κυρίως όμως στην ευφυή μέθοδο που υιοθέτησε. Εκεί που διέπρεψε ήταν ότι είχε την ευφυΐα να καταγράψει στατιστικά τα αποτελέσματα των διασταυρώσεών του. Έτσι, διαπίστωσε την ύπαρξη σταθερών αναλογιών που τον βοήθησαν να διακρίνει τους νόμους της κληρονομικότητας που κρύβονται πίσω από αυτές.
Για παράδειγμα, αν διασταυρώσουμε ένα λουλούδι κόκκινο με γονότυπο ΚΚ και ένα λουλούδι λευκό με γονότυπο ΛΛ τότε θα πάρουμε ρόζ λουλούδια με γονότυπο ΚΛ. *(Νόμος της ομοιομορφίας: Τα υβρίδια της πρώτης θυγατρικής γενιάς (F_1) είναι όλα ομοιόμορφα)*. Αν διασταυρώσουμε στη συνέχεια δύο ροζ λουλούδια (F_1), μπορεί να πάρουμε κόκκινο λουλούδι ΚΚ αν το κόκκινο γονίδιο ενωθεί με το κόκκινο, ροζ λουλούδια αν το λευκό γονίδιο ενωθεί με κόκκινο (ΛΚ ή ΛΚ) ή λευκό λουλούδι, αν το λευκό γονίδιο ενωθεί με λευκό γονίδιο ΛΛ. *(Νόμος του διαχωρισμού: Όταν διασταυρώνουμε υβρίδια πρώτης θυγατρικής γενιάς, τότε τα χαρακτηριστικά της πατρικής γενιάς εμφανίζονται στη δεύτερη θυγατρική γενιά (F_2) σε ορισμένες αριθμητικές αναλογίες)*.

	Κ	Λ
Κ	ΚΚ	ΚΛ
Λ	ΛΚ	ΛΛ

Στη περίπτωση αυτή, στα τέσσερα λουλούδια θα είναι:
1 κόκκινο, 2 ρόζ και 1 λευκό.
Δηλαδή θα έχουμε κόκκινα λουλούδια με πιθανότητα 1/4 ή 25%, ρόζ με πιθανότητα 2/4 ή 50% και λευκά με πιθανότητα 1/4 ή 25%.

Η μεταβίβαση χαρακτηριστικών από γενιά σε γενιά μπορεί να αποτελέσει για τους μαθητές αντικείμενο **διαθεματικής εργασίας**, η οποία προτείνεται να γίνει σε συνεργασία με τούς καθηγητές της Βιολογίας και τους υπευθύνους της Αγωγής Υγείας.

Ενδεικτικές επισημάνσεις

- Να αποκτήσουν οι μαθητές μια γενική εικόνα της μεταβίβασης των χαρακτηριστικών από γονείς σε απογόνους, ώστε να κατανοήσουν γιατί μοιάζουν στους γονείς τους .
- Να γνωρίζουν την πιθανότητα π.χ να γεννηθεί ένα παιδί με μεσογειακή αναιμία, αν οι γονείς του έχουν και οι δύο στίγμα ώστε ως ενήλικες να πάρουν προληπτικά όλα τα ενδεικνυόμενα μέτρα για να προστατέψουν την υγεία των παιδιών τους. (Το ίδιο και για την μεταβίβαση του ρέζους αρνητικού).
- Να μπορούν να απαντήσουν με επιστημονικά επιχειρήματα σε ερωτήματα γύρω από τα οποία υπάρχουν εσφαλμένες προκαταλήψεις που βασανίζουν πολλούς ακόμα και τις μέρες μας. Π.χ ποιος από τους δύο γονείς ευθύνεται για το φύλο του παιδιού κ.τ.λ.
- Να κατανοούν πού στηρίζονται οι γεωργοί, οι κτηνοτρόφοι αλλά και οι γεωπόνοι και οι κτηνίατροι, όταν προσπαθούν να διασταυρώσουν φυτά και ζώα με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά, προκειμένου να δημιουργήσουν βελτιωμένες ποικιλίες φρούτων, λαχανικών και λουλουδιών ή φυλές ζώων.

Προτεινόμενες δραστηριότητες

- Να μελετήσουν την ιστορική εξέλιξη της Γενετικής και τη συμβολή της θεωρίας των πιθανοτήτων για τη διατύπωση των νόμων της κληρονομικότητας.
- Να συγκεντρώσουν στοιχεία για τον Μέντελ και τα πειράματά του.
- Να εξετάσουν τι πιθανότητα έχει ένα παιδί να γεννηθεί με μαύρα μαλλιά, αν στα κύτταρα της μητέρας του υπάρχουν γονίδια για μαύρα μαλλιά ΜΜ, ενώ στα κύτταρα του πατέρα του υπάρχουν γονίδια για ξανθά μαλλιά μμ.(Οι συνδυασμοί ΜΜ, Μμ, μΜ θα δώσουν παιδιά με μαύρα μαλλιά και μόνο ο συνδυασμός μμ θα δώσει παιδιά με ξανθά μαλλιά).
- Να διενεργήσουν μια στατιστική έρευνα με θέμα ποιος από τους δύο γονείς πιστεύεται ότι ευθύνεται για το φύλο του παιδιού.
  Για το σκοπό αυτό, θα πρέπει να συντάξουν ερωτηματολόγιο το οποίο θα συμπληρώσουν ρωτώντας τους γονείς, συγγενείς και γενικότερα τα άτομα του περιβάλλοντός τους. Για να καταλήξουν σε αξιόπιστα συμπεράσματα, θα πρέπει να καταγράψουν το φύλο, την ηλικία και το επίπεδο εκπαίδευσης όσων ερωτούν.

Βιβλιογραφία

- *Σχολικό βιβλίο Βιολογίας Γ’ Γυμνασίου, εγκυκλοπαίδειες, λεξικά , διαδίκτυο κ.ά.*
- *An introduction to genetic analysis Suzuki-Griffiths, Θεσσαλονίκη 1990.*
- *Genetics: A guide to basic concepts and problem solving Nickerson, Simon college publissing, 1985.*
- http://www.mendelweb.org
- http://www.bios.niu.edu/johns/genetics/ext_mendel_files/frame.htm
- http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Biology/7-012Introduction-to-BiologyFall2001/LectureNotes/index.htm

ΜΕΡΟΣ Β′
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο – Ισότητα – Ομοιότητα

1.1. Ισότητα τριγώνων (5 διδακτικές ώρες)

Δραστηριότητα

Με τη δραστηριότητα επιδιώκεται να κατανοήσουν οι μαθητές ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα, όταν είναι δυνατόν με κατάλληλη μετατόπιση του ενός να συμπέσει με το άλλο. Με τη βοήθεια του διαφανούς χαρτιού θα διαπιστώσουν ότι, το τρίγωνο ΑΒΓ συμπίπτει με το τρίγωνο $Τ_3$. Έτσι θα διαπιστώσουν ότι οι αντίστοιχες πλευρές και οι γωνίες των τριγώνων είναι ίσες και θα καταλήξουν στη διατύπωση του ορισμού των ίσων τριγώνων.

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές πρέπει:

- Να γνωρίζουν τα είδη των τριγώνων και τα στοιχεία ενός τριγώνου (κύρια και δευτερεύοντα).
- Να μάθουν τα κριτήρια ισότητας των τριγώνων και να μπορούν να τα εφαρμόζουν για να αποδεικνύουν την ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων και γωνιών.
- Να μάθουν τα κριτήρια ισότητας των ορθογωνίων τριγώνων.

Διδακτικές οδηγίες

- Τα είδη των τριγώνων και τα στοιχεία ενός τριγώνου είναι γνωστά και γι’ αυτό να μη διατεθεί πολύς χρόνος για την επανάληψή τους.
- Η ισότητα των τριγώνων αποτελεί βασικό μεθοδολογικό εργαλείο για την ανάπτυξη της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και γι’ αυτό πρέπει να δοθεί ιδιαίτερο βάρος στην διδασκαλία της ενότητας αυτής.
- Να επισημανθεί ότι στην Ευκλείδεια Γεωμετρία η ισότητα των διαφόρων σχημάτων (ευθύγραμμα τμήματα, γωνίες, τρίγωνα κ.τ.λ.) ορίζεται με τη διαδικασία της μετατόπισης και της σύμπτωσής τους. Η διαδικασία αυτή γίνεται νοερά με τη βοήθεια λογικών συλλογισμών και μας επιτρέπει από την ισότητα ορισμένων στοιχείων δύο σχημάτων, να συμπεράνουμε τη σύμπτωση των υπόλοιπων αντιστοίχων στοιχείων και τελικά την ισότητα των σχημάτων.
- Να επισημανθεί ότι:
  1ο Δυο τρίγωνα που έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, δεν είναι ίσα (ερώτ. κατανόησης 7α).
  2ο Δυο τρίγωνα που έχουν μια πλευρά ίση και δύο αντίστοιχες γωνίες ίσες είναι ίσα αφού θα έχουν και την τρίτη τους γωνία ίση (ερώτ. κατανόησης 3).
- Να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στην εύρεση των αντιστοίχων στοιχείων που είναι ίσα σ’ ένα ζεύγος ίσων τριγώνων.
- Να τονιστεί ότι μόνο **σε ίσα τρίγωνα** απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες και το αντίστροφο (ερώτ. κατανόησης 7γ, 7δ.)
- Με τα αντιπαραδείγματα των ερωτήσεων κατανόησης 2, 5 και 10 επιδιώκεται να αντιληφθεί ο μαθητής ότι η μη σωστή χρήση των κριτηρίων ισότητας τριγώνων οδηγεί σε λανθασμένα συμπεράσματα.
- Τα κριτήρια ισότητας τριγώνων χρησιμεύουν και για την απόδειξη βασικών ιδιοτήτων των

σχημάτων (ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου, ιδιότητα σημείων μεσοκαθέτου ευθυγράμμου τμήματος, ή διχοτόμου γωνίας). Για την κατανόηση της χρησιμότητας αυτής να διδαχθούν τα παραδείγματα 1, 3 και 4.

– Να τονιστεί ότι η ισότητα των τριγώνων χρησιμεύει και για να αποδεικνύουμε ισότητα δύο ευθυγράμμων τμημάτων ή δύο γωνιών που είναι αντίστοιχα στοιχεία ίσων τριγώνων.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις κατανόησης

1. (Π – Γ – Π), $\widehat{B} = \widehat{E}$, $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta}$, ΒΓ = ΔΕ.
2. Γιατί η ίση γωνία δεν είναι περιεχόμενη των ίσων πλευρών στο τρίγωνο ΔΕΖ
3. (Γ – Π – Γ), ΑΒ = ΔΕ , ΑΓ = ΔΖ. **4.** ΑΒΓ, ΚΛΜ (Γ – Π – Γ).
5. Όχι **6.** (Π – Π– Π), $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$, $\widehat{B} = \widehat{Z}$, $\widehat{\Gamma} = \widehat{E}$. **7.** Λ – Σ – Λ – Σ – Σ – Λ.
8. Ναι. **9.** ΑΒΓ, ΚΛΜ. **10.** Δεν είναι ίσες οι αντίστοιχες πλευρές.
11. Γιατί έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες. (ΑΒ = ΑΔ, ΑΓ κοινή)

Ένα θέμα από την Ιστορία των Μαθηματικών
Υπολογισμός της απόστασης ενός πλοίου από την στεριά.

Για τη μέθοδο που χρησιμοποίησε ο Θαλής προκειμένου να υπολογίσει την απόσταση ενός πλοίου από την στεριά, υπάρχουν διάφορες υποθέσεις. Πολλοί ιστορικοί όπως ο Tannery «La géométrie grecque» (Heath, Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών, τόμος Ι, σελ 172, Κ.Ε.Ε.Ε) και ο Loria «Ιστορία των Μαθηματικών» τόμος Ι, σελ 40, εκδόσεις Ε.Μ.Ε, τάσσονται υπέρ της άποψης ότι ο Θαλής έκανε χρήση της απλούστατης κατασκευής με τα ίσα ορθογώνια τρίγωνα που περιγράφεται στο βιβλίο του μαθητή.

Την κατασκευή αυτή την χρησιμοποιούσαν πολλούς αιώνες αργότερα και οι ρωμαίοι αγρονόμοι και την περιγράφει ο Marcus Junius Nipsus στο έργο του Fluminis Varatio.

Βλέπε ακόμη και Τσιμπουράκης Δ.: Η γεωμετρία και οι εργάτες της στην Αρχαία Ελλάδα, Αθήνα 1985, σελ. 40-41.

Ενδεικτικά προτεινόμενος σχεδιασμός διδασκαλίας της ενότητας 1.1

(5 διδακτικές ώρες)

1η διδακτική ώρα
- Εισαγωγή στην έννοια της ισότητας των τριγώνων μέσω της δραστηριότητας. Με την ευκαιρία αυτή γίνεται σύντομη επανάληψη των ειδών των τριγώνων και των στοιχείων ενός τριγώνου.
  1ο κριτήριο ισότητας των τριγώνων.
- Ερωτήσεις κατανόησης 1, 2.
- Παραδείγματα εφαρμογές 1.
- Προτεινόμενες ασκήσεις 1, 2, 3, 4, 5, 6.

2η διδακτική ώρα
- 2ο κριτήριο ισότητας των τριγώνων.
- Ερωτήσεις κατανόησης 3, 4, 5.
- Παραδείγματα εφαρμογές 2.
- Προτεινόμενες ασκήσεις 7, 8, 9.

3η διδακτική ώρα
- 3ο κριτήριο ισότητας των τριγώνων.
- Ερωτήσεις κατανόησης 6, 7.
- Προτεινόμενες ασκήσεις 10, 11, 12, 13, 14.

4η διδακτική ώρα
- Κριτήρια ισότητας ορθ. τριγώνων.
- Ερωτήσεις κατανόησης 8, 9, 10, 11.
- Παραδείγματα εφαρμογές 3, 4.
- Προτεινόμενες ασκήσεις 15, 16, 17, 18.

5η διδακτική ώρα
- Επανάληψη – εμπέδωση των κριτηρίων ισότητας
- Προτεινόμενες ασκήσεις 19, 20, 21 και Γενικές ασκήσεις 1, 2, 3, 4.

Ενδεικτικό σχέδιο κριτηρίου αξιολόγησης

Διδακτική Ενότητα (Διάρκεια 45 min)

- Ισότητα τριγώνων

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) Δύο τρίγωνα που έχουν δύο πλευρές ίσες και μία γωνία ίση είναι ίσα.

β) Δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν τις οξείες γωνίες τους ίσες είναι ίσα.

γ) Δύο τρίγωνα που έχουν μια πλευρά ίση και δύο αντίστοιχες γωνίες ίσες μία προς μία είναι ίσα.

(3 Μονάδες)

Β. Αν δύο ισοσκελή τρίγωνα έχουν τις βάσεις τους ίσες και τις γωνίες της κορυφής ίσες, τότε να αποδείξετε ότι είναι ίσα.

(3 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 2ο

Σε κύκλο κέντρου Ο να χαράξετε μια χορδή του ΑΒ. Αν Γ, Δ είναι σημεία της χορδής ΑΒ τέτοια ώστε ΑΓ = ΒΔ, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές

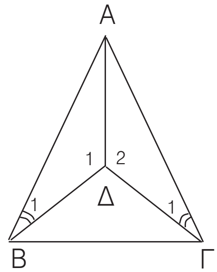
(7 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο, ώστε για ένα εσωτερικό του σημείο Δ, να ισχύουν $\widehat{B}_1 = \widehat{\Gamma}_1$ και $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκλελές.

β) Το σημείο Δ ισαπέχει από τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ.



(7 Μονάδες)

Internet και Μαθηματικά – Η ισότητα των τριγώνων

- www.mathcsusb.edu/courses/m129/tri_congr.html
  Η εφαρμογή παρουσιάζει τρία κόκκινα και τρία μπλε ευθύγραμμα τμήματα (είτε 2 ζεύγη ευθυγράμμων τμημάτων μπλε και κόκκινα και μια γωνία, είτε 1 ζεύγος ευθυγράμμων τμημάτων και 2 διαφορετικά ζεύγη γωνιών). Πρέπει να μετακινηθούν αυτά κατάλληλα, με βάση τα κριτήρια ισότητας των τριγώνων, ώστε να σχηματιστούν 2 ίσα τρίγωνα.
- http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_165_8_3_t_3.html
- www.pinkmonkey.com/studyguides/subjects/geometry/

Εναλλακτική διδασκαλία με τη χρήση Η/Υ (Διερευνητική προσέγγιση)

Στο εξελληνισμένο λογισμικό **Cabri geometry II**, το οποίο διατίθεται για χρήση στα σχολεία που συμμετέχουν στην Οδύσσεια - «Ελληνικά Σχολεία στην Κοινωνία της πληροφορίας» στο βιβλίο του καθηγητή σελ 73, Εκπαιδευτικές δραστηριότητες για το Γυμνάσιο, υπάρχει δραστηριότητα με θέμα «Τρίγωνα και ίσα τρίγωνα».

Η ισότητα στην Ευκλείδεια Γεωμετρία

Ένα από τα βασικά αντικείμενα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι η μελέτη των ιδιοτήτων διαφόρων σχημάτων οι οποίες παραμένουν αναλλοίωτες, αν αυτά "μετακινηθούν" στο επίπεδό τους. Η απόδειξη των ιδιοτήτων ενός συγκεκριμένου σχήματος στις περισσότερες περιπτώσεις ανάγεται στην απόδειξη ότι κάποια άλλα σχήματα είναι "ίσα" μεταξύ τους. Για παράδειγμα, για να αποδείξουμε ότι οι διαγώνιες ενός παραλληλογράμμου διχοτομούνται, αποδεικνύουμε ότι τα τρίγωνα που σχηματίζονται απ'αυτές είναι ίσα. Δυο γεωμετρικά σχήματα ονομάζονται ίσα, όταν είναι δυνατόν το ένα κατάλληλα μετακινούμενο να εφαρμόσει πάνω στο άλλο. Προκειμένου όμως να κατοχυρωθεί μια ιδιότητα των σχημάτων, πρέπει να αποδειχθεί ότι ισχύει ανεξάρτητα από τη τοποθέτηση του σχήματος στο επίπεδο, πράγμα το οποίο εξασφαλίζεται από την αξιωματική αρχή: «Οι ιδιότητες των σχημάτων παραμένουν αναλλοίωτες, αν αυτά μετακινηθούν στο επίπεδο» ή ισοδύναμα: «Τα ίσα σχήματα διατηρούν τις ιδιότητές τους ανεξάρτητα από την τοποθέτησή τους στο επίπεδο».
Την έννοια της ισότητας ο Ευκλείδης την όρισε αξιωματικά, όπως άλλωστε συμβαίνει και σε όλες τις σύγχρονες αξιωματικές προσεγγίσεις της Γεωμετρίας. Ειδικά, όμως, για ν' αποδείξει το πρώτο του θεώρημα, την πρόταση Ι.4 (Π – Γ – Π), χρησιμοποίησε τη μέθοδο της «υπέρθεσης» (επίθεσης), δηλαδή την μετατόπιση και σύμπτωση των τριγώνων υποθέτοντας ότι κατά την μετακίνησή τους αυτά παραμένουν αμετάβλητα, πράγμα το οποίο δεν είχε αναφέρει.
Φαίνεται όμως ότι ο Ευκλείδης, γενικά, δεν αποδέχεται τη μέθοδο της υπέρθεσης, γιατί στα «Στοιχεία» τη χρησιμοποιεί μόνο δυο φορές για την απόδειξη των προτάσεων Ι.4 (Π – Γ – Π) και Ι.8 (Π – Π – Π). Αν την αποδεχόταν, θα μπορούσε εύκολα να αποδείξει το 4ο αίτημα, περί της ισότητας των ορθών γωνιών, με υπέρθεση. Όπως σημειώνει ο L.Bunt στο βιβλίο του, Οι ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών Μαθηματικών «*...Για ν' αποδείξει ο Ευκλείδης την πρόταση Ι.4, κινεί το ένα τρίγωνο και το φέρνει σε μιαν άλλη θέση. Πού βασίζεται για να εκτελέσει μια τέτοια κίνηση; Αυτή η δυνατότητα δεν πηγάζει από τις κοινές έννοιες ούτε από τα αιτήματα ούτε και από τις προηγούμενες προτάσεις, για τον απλούστατο λόγο ότι ή έννοια "κίνηση" δεν αναφέρεται σ' αυτές. Την έννοια της κίνησης την έχουμε αποχτήσει από την εμπειρία μας, κατά την επαφή μας με τον αισθητό κόσμο. Ωστόσο, αν θέλαμε να την εφαρμόσουμε στα Μαθηματικά, θα το κατορθώναμε, αλλά μόνο εφόσον προηγουμένως*

---

1 Οι πέντε πρώτες αποδείξεις γεωμετρικών προτάσεων, που αποδίδονται στον Θαλή, αποδεικνύουν την ισότητα των: κατακορυφήν γωνιών, των παρά την βάση γωνιών του ισοσκελούς τριγώνου, των δύο τμημάτων στα οποία μια διάμετρος χωρίζει τον κύκλο, των γωνιών που εγγράφονται σε ημικύκλιο και των τριγώνων με μια πλευρά και δύο γωνίες ίσες. Αλλά και στο πρώτο μέρος των Στοιχείων του Ευκλείδη μεγάλο μέρος των προτάσεων αφορούν την ισότητα ή ανισότητα διαφόρων γεωμετρικών μεγεθών.

σχηματίζαμε ένα αξιωματικό πλαίσιο πάνω στο οποίο θα τη βασίζαμε. Ο Ευκλείδης παράλειψε να το κάνει. Είχε αντιληφτεί άραγε ότι υπήρχε ένα τέτοιο κενό; ...Σίγουρα το είχε αντιληφτεί. Έδωσε αυτήν την απόδειξη, γιατί άλλη διέξοδο δεν εύρισκε...».

Για να καλυφθεί το αξιωματικό αυτό κενό, ο Hilbert στο δεύτερο μισό του 19ου αιώνα, όταν επικράτησε μια γενική τάση για αυστηρότητα στα μαθηματικά, στο έργο του «*Τα θεμέλια της Γεωμετρίας*» έθεσε τα αξιώματα «σύμπτωσης» και «συμφωνίας». Η «*συμφωνία*» (congruence) αντιστοιχεί στην «ισότητα» με την ευρεία έννοια του όρου, καθώς δεν περιορίζεται στην «ταυτότητα» δηλαδή την ταύτιση. Η ομάδα των αξιωμάτων αυτών κατοχυρώνει τη μεταφορά των ευθυγράμμων τμημάτων και των γωνιών και την ισότητα των τριγώνων με τρόπο που παραπέμπει στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη.

Ο Hilbert όρισε τη συμφωνία των τριγώνων ως εξής: Δύο τρίγωνα θα λέγονται σύμφωνα ή ίσα, αν οι κορυφές τους μπορούν να αντιστοιχιστούν έτσι ώστε οι αντίστοιχες πλευρές και οι αντίστοιχες γωνίες να είναι σύμφωνες.

Στη συνέχεια έθεσε ως αξίωμα το 1ο κριτήριο ισότητας των τριγώνων (Π – Γ – Π) από το οποίο προκύπτουν με απόδειξη τα άλλα δύο κριτήρια.

Η ισότητα ορίζεται ενιαία για όλα τα πεπερασμένα σχήματα, τρίγωνα, πολύγωνα, και γενικά σχήματα που φράσσουν μέρος του χώρου και αποκτά αποδεικτική ισχύ μετά τη διατύπωση των κριτηρίων ισότητας των τριγώνων. Επιπλέον αρκεί η διαπραγμάτευση της στο επίπεδο για να ισχύει και στο χώρο. Ως έννοια εμπίπτει στο πλαίσιο ισότητα-ομοιότητα-εμβαδόν. Με τις έννοιες αυτές γίνεται η ταξινόμηση και η σύγκριση των σχημάτων.

Επειδή κάθε μετατόπιση ενός σχήματος είναι το αποτέλεσμα μιας κίνησης από μια αρχική σε μια τελική θέση, η μετατόπιση των σχημάτων συνδέεται άμεσα με τις γεωμετρικές κατασκευές, καθώς ο διαβήτης διατηρεί την ισότητα των μηκών των ευθυγράμμων τμημάτων. Επομένως, η μετατόπιση μπορεί να υλοποιηθεί ως διαδικασία και μάλιστα κατασκευαστική. Τα κριτήρια ισότητας των τριγώνων αρκούν για να κατασκευαστεί το τρίγωνο. Γι' αυτό σε πολλά βιβλία Γεωμετρίας που είναι γραμμένα με βάση την αξιωματική θεμελίωσή της, τα κριτήρια ισότητας των τριγώνων προκύπτουν από τις γεωμετρικές τους κατασκευές.

Για τις έννοιες όμως *"τοποθέτηση", "μετακίνηση", "επίθεση" και "ταύτιση"*, που χρησιμοποιούνται στην Ευκλείδεια γεωμετρία, έχουμε **μόνο** διαισθητική (εποπτική) αντίληψη. Η αυστηρή-θεωρητική κατοχύρωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας επιτυγχάνεται αποτελεσματικά με τη βοήθεια της *αλγεβροποίησής* της. Η λύση γεωμετρικών προβλημάτων με αλγεβρικές μεθόδους στηρίζεται στην κατασκευή **μοντέλων της γεωμετρίας**, όπως για παράδειγμα σ' αυτό της **Αναλυτικής γεωμετρίας**. Με την Αναλυτική Γεωμετρία τα γεωμετρικά προβλήματα ανάγονται σε αλγεβρικά και αντιμετωπίζονται με τη χρήση των αλγορίθμων που προσφέρει η καλά οργανωμένη αλγεβρική γνώση.

Εφόσον η εφαρμογή δύο σχημάτων πιστοποιεί την ισότητά τους, στη σύγχρονη μαθηματική σκέψη τουλάχιστον μετά τον Klein απαιτείται για τη διαπίστωσή της, η χρήση μετασχηματισμών. Μ' άλλα λόγια, για να αποδειχθούν δύο πεπερασμένα σχήματα ίσα, εξετάζεται αν υπάρχει κάποιος επιτρεπτός μετασχηματισμός ο οποίος να μεταφέρει, το ένα σχήμα πάνω στο άλλο. Το 1872, ο Felix Klein έδωσε στο Πανεπιστήμιο του *Earlagen* με την ευκαιρία της εκλογής του, μια διάλεξη που σήμερα είναι γνωστή ως το *Πρόγραμμα Earlagen.* Η κεντρική ιδέα του προγράμματος ήταν ότι η γεωμετρία είναι θεωρία ομάδων. Οι ομάδες σχηματίζονται από τους μετασχηματισμούς που αφήνουν τις βασικές γεωμετρικές έννοιες αμετάβλητες. Αν ως ομάδα μετασχηματισμών ληφθεί η ανάκλαση (συμμετρία), η στροφή, η παράλληλη μεταφορά και οι συνθέσεις τους που δε αλλάζουν το μήκος και τη γωνία, που είναι οι βασικές ιδιότητες στην Ευκλείδεια γεωμετρία, τότε η λαμβανόμενη Γεωμετρία είναι η

Ευκλείδεια. Επιπλέον οι μετασχηματισμοί μπορούν να εφοδιαστούν με αλγεβρική δομή, οπότε το σύνολο που τους περιέχει γίνεται ομάδα. Με τον τρόπο αυτό η Γεωμετρία και η Άλγεβρα συνδέονται άμεσα και επομένως μπορούμε να χρησιμοποιούμε εργαλεία της Άλγεβρας, όπως οι ομάδες, για τη μελέτη των γεωμετρικών σχημάτων. Άρα η διαδικασία της ισότητας αποδίδεται στο αλγεβρικό μοντέλο μέσω των απεικονίσεων (μετασχηματισμών) και η ισότητα συνδέεται με τις ισομετρίες.

Βιβλιογραφία

- *Στράντζαλος Χρόνης : Η εξέλιξη των Ευκλείδειων και Μη Ευκλείδειων Γεωμετριών μετά το 1600. Ενδεικτικές σημειώσεις για το μάθημα «Από την νεότερη ιστορία των μαθηματικών», Πανεπιστήμιο Αθηνών.*
- *H. Eves: Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών, τόμος Β, εκδόσεις Τροχαλία, Αθήνα 1989-90.*

1.2. Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων (2 διδακτικές ώρες)

Δραστηριότητα

Με τη δραστηριότητα επιδιώκεται με τη χάραξη ευθειών, οι οποίες τέμνουν τις γραμμές του τετραδίου τους, να διαπιστώσουν οι μαθητές ότι παράλληλες ευθείες, εφόσον ισαπέχουν, θα ορίζουν ίσα τμήματα σε οποιαδήποτε ευθεία τις τέμνει. Ο διδάσκων μπορεί να τους οδηγήσει στην απόδειξη, αν φέρουν $Α'Δ \perp ΒΒ'$ και $Β'Ε \perp ΓΓ'$ και συγκρίνουν τα ορθογώνια τρίγωνα που σχηματίζονται. Με την εξέταση της ειδικής αυτής περίπτωσης προετοιμάζονται και για την απόδειξη της πρότασης στη γενική της περίπτωση, όταν οι τέμνουσες είναι τυχαίες. Η πρόταση αυτή αναπτύσσεται παρακάτω στη θεωρία.

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές πρέπει:

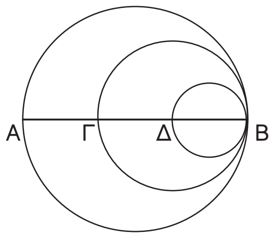
- Να μάθουν ότι, αν ευθείες παράλληλες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία που τις τέμνει, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε οποιαδήποτε άλλη ευθεία τις τέμνει.
- Να μάθουν τις άμεσες συνέπειες της προηγούμενης πρότασης σε τραπέζιο και σε τρίγωνο.
- Να μάθουν να διαιρούν με κανόνα και διαβήτη ένα ευθύγραμμο τμήμα σε ν ίσα τμήματα.
- Να μάθουν τι ονομάζεται λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων και πώς αυτός υπολογίζεται.
- Να μάθουν πότε δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι ανάλογα προς δύο άλλα ευθύγραμμα τμήματα.

Διδακτικές οδηγίες

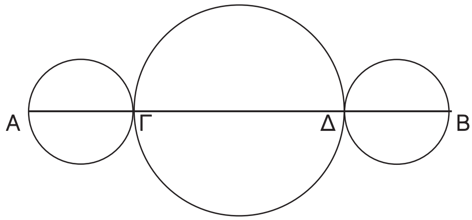
- Να διευκρινιστεί τι σημαίνει η φράση : «Οι παράλληλες ορίζουν ίσα τμήματα πάνω σε μια ευθεία ε που τις τέμνει».
- Ο διδάσκων να επιμείνει στη χρησιμοποίηση κανόνα και διαβήτη για τη διαίρεση οποιουδήποτε ευθυγράμμου τμήματος σε ν ίσα τμήματα (στον πίνακα και στο τετράδιό τους).
  Για εξάσκηση μπορεί να δοθεί στους μαθητές να σχεδιάσουν διάφορα σχέδια στα οποία θα χρειαστεί να χωρίσουν ευθύγραμμα τμήματα σε ν ίσα μέρη. Π.χ

Δίνεται ένα τυχαίο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 10 cm. Να σχεδιάσετε με κανόνα και διαβήτη τα παρακάτω σχήματα, αν :

α) ΑΓ= ΓΔ = ΔΒ (σχήμα 1) **β)** ΑΓ = ΔΒ και ΓΔ = 2ΑΓ (σχήμα 2)

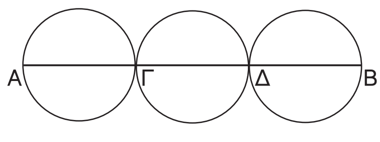


Σχήμα 1

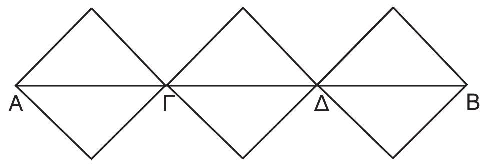


Σχήμα 2

γ) ΑΓ = ΓΔ = ΔΒ (σχήματα 3, 4)



Σχήμα 3



Σχήμα 4

- Η έννοια του λόγου δύο ευθυγράμμων τμημάτων να συνδεθεί άμεσα με την έννοια του γινομένου αριθμού επί ευθύγραμμο τμήμα.
- Να τονιστεί ότι με τον υπολογισμό του λόγου $\frac{ΑΕ}{ΒΓ}$ δύο ευθυγράμμων τμημάτων έχουμε έναν τρόπο σύγκρισής τους, αφού ο λόγος αυτός «μετράει» το ΑΕ, αν το ΒΓ το θεωρήσουμε ως μονάδα μέτρησης .
- Με παραδείγματα να γίνει κατανοητό ότι ο λόγος ευθυγράμμων τμημάτων είναι ανεξάρτητος από τη μονάδα μέτρησης των τμημάτων αυτών (παράδειγμα 1, ερώτηση κατανόησης 4).
- Με τις ερωτήσεις κατανόησης 6β και 7 επιδιώκεται να κατανοήσουν οι μαθητές ότι, αν γνωρίζουν το λόγο δύο ευθυγράμμων τμημάτων, τότε γνωρίζουν τη μεταξύ τους σχέση και όχι το μήκος του καθενός από αυτά.
- Να επισημανθεί ότι ο λόγος δύο ίσων ευθυγράμμων τμημάτων είναι 1 (ερωτήσεις κατανόησης 6γ και 5ε).
- Οι ιδιότητες των αναλογιών δεν αποτελούν στόχο της ενότητας αυτής, γι' αυτό να αποφευχθεί η ασκησιολογία με τις ιδιότητες των αναλογιών.
- Για την αντιμετώπιση του προβλήματος της άσκησης 8 οι μαθητές πρέπει να σκεφτούν ως εξής: Ο ιδιοκτήτης αφού βρει το μέσον της πλευράς ΑΔ θα φέρει την παράλληλη από το σημείο αυτό στις βάσεις του τραπεζίου, η οποία θα τμήσει την ΒΓ σ' ένα σημείο που είναι το μέσον της. Αν μετρήσει την απόσταση του σημείου αυτού από το Β και τη διπλασιάσει θα έχει υπολογίσει την πλευρά ΒΓ που δεν μπορεί να μετρήσει.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις κατανόησης

1. 5 **2.** 12cm **3.** Όχι , γιατί $\frac{4}{4} \neq \frac{5}{6}$. **4.** $\frac{1}{3}$, 3, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$.

5. $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, 4 , 1. **6.** Σ – Λ – Σ – Σ – Λ – Σ – Σ . **7.** Η Ελένη

Ενδεικτικά προτεινόμενος σχεδιασμός διδασκαλίας της ενότητας 1.2

(2 διδακτικές ώρες)

1η διδακτική ώρα	2η διδακτική ώρα
– Δραστηριότητα – Ίσα τμήματα μεταξύ παραλλήλων ευθειών – Διαίρεση ευθύγραμμου τμήματος σε ν ίσα τμήματα. – Ερωτήσεις κατανόησης 1, 2, 3. – Παραδείγματα εφαρμογές 1α, 2. – Προτεινόμενες ασκήσεις 1, 2α, 6α, 8.	– Η έννοια του λόγου δύο ευθυγράμμων τμημάτων – Ανάλογα ευθύγραμμα τμήματα – Σύντομη αναφορά στις βασικές ιδιότητες των αναλογιών. – Ερωτήσεις κατανόησης 4, 5, 6, 7. – Παραδείγματα εφαρμογές 1β, 3, 4. – Προτεινόμενες ασκήσεις 2β, 3, 4, 5, 6β, 7.

1.3. Θεώρημα του Θαλή (2 διδακτικές ώρες)

Δραστηριότητα

Με τη δραστηριότητα επιδιώκεται να διαπιστώσουν οι μαθητές ότι οι παράλληλες γραμμές του τετραδίου τους, αν τέμνουν μια ευθεία και ορίζουν σ’ αυτή τμήματα που το ένα είναι διπλάσιο του άλλου, τότε η ίδια σχέση συνδέει και τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζονται σε οποιαδήποτε άλλη ευθεία τις τέμνει. Έτσι, θα οδηγηθούν στην αναλογία των αντιστοίχων τμημάτων και θα κατανοήσουν το Θεώρημα Θαλή.

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές πρέπει:

- Να μπορούν να διατυπώνουν το θεώρημα του Θαλή και να γράφουν τις αντίστοιχες αναλογίες σε οποιοδήποτε σχήμα που ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος.
- Να μάθουν να χρησιμοποιούν το θεώρημα του Θαλή για να υπολογίζουν το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος και το λόγο δύο τμημάτων.

Διδακτικές οδηγίες

– Να επισημανθεί ότι το θεώρημα του Θαλή αποτελεί γενίκευση της πρότασης που διδάχτηκαν στην προηγούμενη ενότητα και η οποία αποτελεί το λεγόμενο «ασθενές θεώρημα του Θαλή », αφού είναι ειδική περίπτωσή του.

– Το αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή να περιοριστεί μόνο στο τρίγωνο.
– Να επισημανθεί ότι το θεώρημα του Θαλή εφαρμόζεται όχι μόνο στην περίπτωση που οι μη παράλληλες ευθείες τέμνονται εκτός των παραλλήλων ευθειών, αλλά και όταν τέμνονται εντός των παραλλήλων ή πάνω σε μία από αυτές. (Παράδειγμα 1, ερωτήσεις κατανόησης 2, 4, 5).
– Να αποφευχθούν οι θεωρητικές ασκήσεις για απόδειξη αναλογιών και οι εφαρμογές του Θεωρήματος Θαλή να περιοριστούν στον προσδιορισμό μηκών ευθυγράμμων τμημάτων.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις κατανόησης

1. **α)** $\frac{1}{2}$, **β)** $\frac{2}{5}$, **γ)** $\frac{7}{13}$ **2.** Σ – Λ – Λ – Σ **3.** Όχι, γιατί $\frac{4}{6} \neq \frac{5}{7}$

4. **α)** 2, **β)** $\frac{1}{3}$, **γ)** $\frac{3}{4}$, **δ)** $\frac{7}{2}$ **5.** α → 3, β → 1, γ → 4

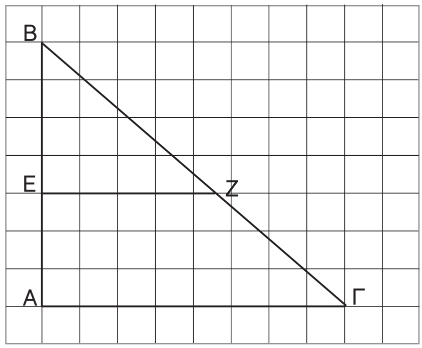
Συμπληρωματικά θέματα

1. **α)** Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{BZ}{B\Gamma}$.

β) Να τοποθετήσετε στη ΒΑ ένα σημείο Μ και στη ΒΓ ένα σημείο Ν ώστε

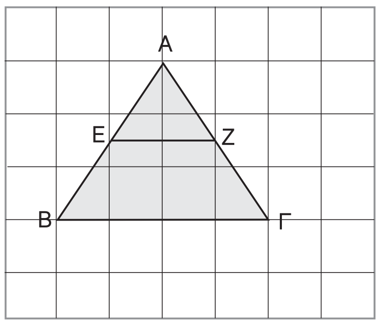
$$\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{B\Gamma} = \frac{2}{7}$$

(Απ: α) $\frac{4}{7}$)



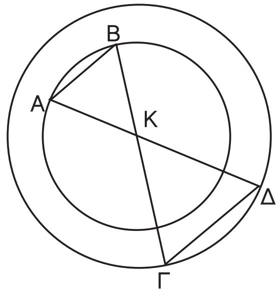
2. Είναι ΕΖ//ΒΓ.
Να διακαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Απ: $\frac{AE}{EB} = \frac{AZ}{Z\Gamma} = 1$)



3. Αν οι κύκλοι του σχήματος έχουν το ίδιο κέντρο Κ, να δείξετε ότι ΑΒ//ΓΔ.

(Απ: $\frac{KA}{K\Delta} = \frac{KB}{K\Gamma} = \frac{\rho}{R}$)



Ενδεικτικά προτεινόμενος σχεδιασμός διδασκαλίας της ενότητας 1.3

(2 διδακτικές ώρες)

1η διδακτική ώρα	2η διδακτική ώρα
– Δραστηριότητα. – Διατύπωση του θεωρήματος του Θαλή. – Ερωτήσεις κατανόησης 1, 3. – Παραδείγματα – Εφαρμογές 2. – Προτεινόμενες ασκήσεις 1, 2, 3.	– Εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή στο τρίγωνο. – Ερωτήσεις κατανόησης 2, 4, 5. – Παραδείγματα – Εφαρμογές 1. – Προτεινόμενες ασκήσεις 4, 5, 6, 7, 8

Εναλλακτική διδασκαλία με τη χρήση Η/Υ (Διερευνητική προσέγγιση)

Cabri geometry II, Εκπαιδευτικές δραστηριότητες για το Γυμνάσιο. Βιβλίο του καθηγητή σελ. 75. «Θεώρημα του Θαλή».

1.4. Ομοιοθεσία (2 διδακτικές ώρες)

Δραστηριότητα

Με την κατασκευή του ομοιόθετου ενός πολυγώνου (μεγέθυνση και σμίκρυνση) δίνεται η ευκαιρία να οριστούν το ομοιόθετο σημείου, ευθύγραμμου τμήματος και γωνίας. Επίσης, δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να παρατηρήσουν ότι, ενώ οι γωνίες του πολυγώνου παραμένουν αμετάβλητες, τα μήκη των πλευρών του πολλαπλασιάζονται με το λόγο ομοιοθεσίας.

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές πρέπει:

- Να μάθουν να βρίσκουν το ομοιόθετο ενός σημείου με κέντρο Ο και λόγο έναν οποιοδήποτε θετικό αριθμό, ώστε να μπορούν να βρίσκουν στη συνέχεια το ομοιόθετο οποιουδήποτε γεωμετρικού σχήματος.
- Να γνωρίζουν ότι η τιμή του λ καθορίζει, αν το ομοιόθετο ενός σχήματος είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνση.
- Να αναγνωρίζουν αν δυο σχήματα είναι ή δεν είναι ομοιόθετα προσδιορίζοντας το κέντρο και το λόγο ομοιοθεσίας τους. (Ερωτήσεις κατανόησης 2 και άσκηση 9).
- Να συνειδητοποιήσουν ότι το ομοιόθετο ενός σχήματος, αφού είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνσή του έχει την ίδια μορφή με το αρχικό (Παράδειγμα, προτ. ασκήσεις 2, 3, 4).
- Να αξιοποιούν την ομοιοθεσία για την απόδειξη παραλληλίας ευθυγράμμων τμημάτων (άσκηση 8).

Διδακτικές οδηγίες

- Να δοθεί έμφαση στην παραλληλία των ομοιόθετων ευθυγράμμων τμημάτων ως προς το ίδιο κέντρο, όταν αυτά δε βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.
- Με την άσκηση 6 δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να καταλάβουν ότι το μέγεθος του ομοιόθετου ενός σχήματος δεν εξαρτάται από τη θέση του κέντρου ομοιοθεσίας του, αλλά μόνο από το λόγο ομοιοθεσίας.
- Με την άσκηση 7 δίνεται στους μαθητές η δυνατότητα να εργαστούν σ' ένα άλλο περιβάλλον, εκείνο των καρτεσιανών συντεταγμένων και να ανακαλύψουν μια σχέση που συνδέει τις συντεταγμένες των αντίστοιχων κορυφών δυο ομοιόθετων σχημάτων, όταν το κέντρο ομοιοθεσίας τους είναι η αρχή των αξόνων. Η άσκηση αυτή προσφέρεται να διδαχθεί και με Η/Υ, εμπλουτισμένη και με άλλα παραδείγματα και ερωτήματα.
- Με την άσκηση 9 δίνεται στους μαθητές η δυνατότητα να ανακαλύψουν το κέντρο (τομή των ευθειών ΑΑ′ και ΒΒ′) και το λόγο ομοιοθεσίας ($\lambda = \frac{5}{2}$ καθώς $\frac{OB'}{OB} = \frac{5}{2}$) δύο σχημάτων όταν δίνεται το ένα από αυτά και δυο ομοιόθετες καρυφές του άλλου.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις κατανόησης

1. **α)** Ε, **β)** Δ, **γ)** Α, **δ)** Γ.
2. Στο 1ο και 3ο σχήμα τα πολύγωνα είναι ομοιόθετα, ενώ στο 2ο δεν είναι ομοιόθετα.
3. 1η σειρά: ΒΓ, 2η σειρά: $\frac{1}{2}$, 3η σειρά : Γ, 3, 4η σειρά: $\frac{1}{3}$, 5η σειρά: ΒΑ.

Ενδεικτικά προτεινόμενος σχεδιασμός διδασκαλίας της ενότητας 1.4

(2 διδακτικές ώρες)

1η διδακτική ώρα	2η διδακτική ώρα
– Εισαγωγή στην έννοια της ομοιοθεσίας. Κατασκευή ομοιόθετου σημείου, ευθύγραμμου τμήματος, γωνίας, πολυγώνου. – Προτεινόμενες ασκήσεις 1, 2, 3, 9.	– Ομοιόθετο κύκλου. – Παραδείγματα – Εφαρμογές 1. – Ερωτήσεις κατανόησης 1, 2, 3. – Προτεινόμενες ασκήσεις 4, 5, 6, 7, 8

1.5. Ομοιότητα (4 διδακτικές ώρες)

Α Όμοια πολύγωνα (2 διδακτικές ώρες)

Δραστηριότητα

Αφού οι μαθητές σχεδιάσουν το ομοιόθετο Π′′ του Π με λόγο 2, θα δοθεί ο ορισμός των ομοίων πολυγώνων (μεγέθυνση-σμίκρυνση). Ο διδάσκων θα ζητήσει από τους μαθητές να εξετάσουν αν τα πολύγωνα Π και Π′ του σχήματος είναι όμοια. Με τις γνώσεις όμως, της προηγούμενης ενότητας δεν μπορούν να χαρακτηρίσουν το ένα ως μεγέθυνση του άλλου, αφού δεν είναι ομοιόθετα. Θα διαπιστώσουν όμως την ισότητα των Π′ και Π′′ από την οποία θα προκύψει και η ομοιότητα των Π και Π′. Με την καθοδήγηση του διδάσκοντα θα προκύψει το κριτήριο ομοιότητας των πολυγώνων

Σημείωση: Το τετραγωνισμένο χαρτί χρησιμοποιείται προκειμένου να μη διατεθεί χρόνος για την κατασκευή του ομοιόθετου (μεγέθυνση) με κανόνα και διαβήτη, αφού η κατασκευή δεν είναι στην ενότητα αυτή κύριος στόχος.

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές πρέπει:

- Να γνωρίζουν ότι όμοια πολύγωνα είναι αυτά που το ένα είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνση του άλλου, οπότε τα σχήματα που είναι ομοιόθετα ή μπορούν να γίνουν ομόθετα είναι όμοια.
- Να γνωρίζουν ότι, αν δυο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι όμοια και το αντίστροφο.
- Να γνωρίζουν τι σημαίνει λόγος ομοιότητας ομοίων πολυγώνων και ποια σχέση έχει με το λόγο των περιμέτρων τους. Ακόμη να γνωρίζουν πώς συνδέεται ο λόγος ομοιότητας με την κλίμακα ενός χάρτη ή ενός σχεδίου (Παράδειγμα 2 – άσκηση 6).

Διδακτικές οδηγίες

- Να επισημανθεί η διαφορά ανάμεσα στην έννοια της ομοιότητας που χρησιμοποιούμε στην καθημερινή ζωή με την έννοια της ομοιότητας στα Μαθηματικά. Όταν λέμε ότι «αυτοί οι άνθρωποι είναι όμοιοι», εννοούμε ότι έχουν ίδια ορισμένα μόνο χαρακτηριστικά. Στα Μαθηματικά, όμως, όταν λέμε ότι «αυτά τα πολύγωνα είναι όμοια» εννοούμε ότι έχουν τις γωνίες τους ίσες και τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Αν αυτό δε συμβαίνει, τα πολύγωνα δεν είναι δυνατόν να είναι όμοια, γιατί θα έχουν διαφορετική μορφή.
- Πολλοί μαθητές πιστεύουν πως, όταν μεγεθύνεται ένα σχήμα τότε, εκτός από τις πλευρές του μεγεθύνονται και οι γωνίες του. Γι’ αυτό να επισημανθεί ότι κατά τη μεγέθυνση ή σμίκρυνση ενός γεωμετρικού σχήματος ενώ οι πλευρές του πολλαπλασιάζονται επί τον ίδιο αριθμό, οι γωνίες του παραμένουν αμετάβλητες. Συμπληρωματικά μπορεί να δοθεί και η ακόλουθη άσκηση:
  Σ’ ένα τρίγωνο η γωνία $\widehat{B} = 15^\circ$, αν σχεδιάσω τη μεγέθυνση του τριγώνου στο διπλάσιο, πόσες μοίρες θα είναι η γωνία $\widehat{B}'$;
- Να επισημανθεί ότι προκειμένου να διαπιστωθεί αν δύο πολύγωνα είναι όμοια πρέπει καταρχήν οι μαθητές να εξετάσουν αν είναι ομοιόθετα. (Ασκήσεις 4, 5). Σε αντίθετη περίπτωση να αναζητηθεί η αναλογία των πλευρών και η ισότητα των γωνιών
- Να τονιστεί ότι υπάρχουν πολύγωνα με ίσες γωνίες που δεν είναι όμοια (τετράγωνο ορθογώνιο) ή με ανάλογες πλευρές που δεν είναι όμοια (ρόμβος-τετράγωνο) (Ερώτηση κατανόησης 3, άσκηση 1).
- Με την προτεινόμενη άσκηση 3 οι μαθητές θα δουν ότι το προσθετικό μοντέλο οδηγεί σε λανθασμένα συμπεράσματα, καθώς με την ταυτόχρονη μείωση(ή αύξηση)των πλευρών ενός σχήματος κατά τα ίδια cm δεν επιτυγχάνεται η κατασκευή όμοιου πολυγώνου

Απαντήσεις στις ερωτήσεις κατανόησης

1. Σ – Λ – Λ – Λ – Σ – Λ

2. $Π_1 \approx Π_3 \approx Π_7$, $Π_5 \approx Π_6$, $Π_2 \approx Π_4$.

3. **α)** 1η σειρά: 4, 2, 2η σειρά: 6, 4, 3η σειρά: 9, 6. Τα ΕΖΗΘ, ΙΚΛΜ είναι όμοια.
   β) 1η σειρά: 3, 2, 2η σειρά : 5, 3, 3η σειρά: 6, 4. Τα ΑΒΓΔ, ΑΘΙΚ είναι όμοια.

4. **α)** $\frac{2}{3}$, **β)** $\frac{3}{2}$, **γ)** $\widehat{B}'$ **δ)** $\frac{3}{2}$, **ε)** 10cm

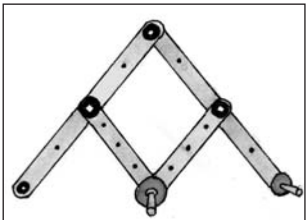
Ενδεικτικά προτεινόμενος σχεδιασμός διδασκαλίας της ενότητας 1.5Α

(2 διδακτικές ώρες)

1η διδακτική ώρα	2η διδακτική ώρα
– Εισαγωγή στην έννοια της ομοιότητας δύο πολυγώνων με τα ερωτήματα της Δραστηριότητας. – Παραδείγματα – Εφαρμογές 1. – Ερωτήσεις κατανόησης 1, 2, 3. – Προτεινόμενες ασκήσεις 1, 2, 3.	– Λόγος περιμέτρων δύο πολυγώνων, κλίμακες. – Παραδείγματα – Εφαρμογές 2. – Ερωτήσεις κατανόησης 4. – Προτεινόμενες ασκήσεις 4, 5, 6.

Συμπληρωματικά θέματα

Α. Φτιάξτε έναν παντογράφο


σταθερό άκρο αρχική εικόνα τελική εικόνα

Ο παντογράφος είναι ένα όργανο με το οποίο οι σχεδιαστές έφτιαχναν σχέδια σε μεγέθυνση ή σμίκρυνση. Σήμερα με τη χρήση των φωτοτυπικών μηχανημάτων και των υπολογιστών έχει περιπέσει σε αχρηστία. Εξακολουθούν όμως να τον χρησιμοποιούν όσοι σχεδιάζουν με το χέρι καθώς και εκείνοι που φτιάχνουν μινιατούρες. Για την κατασκευή ενός αυτοσχέδιου παντογράφου χρειάζονται κομμάτια σκληρού χαρτονιού ή ξύλου (π.χ δυο κομμάτια των 22cm και άλλα δυο των 12cm) παξιμάδια και βίδες και ένας φελλός. Σε όλα τα κομμάτια του ξύλου κάνουμε 5 τρύπες σε ίσες αποστάσεις αφήνοντας περιθώριο 1cm από κάθε άκρη. Συναρμολογούμε στη συνέχεια τα διάφορα τμήματα του οργάνου, όπως φαίνεται στην εικόνα. Κρατώντας σταθερό με το ένα χέρι το ένα άκρο του παντογράφου, διατρέχουμε το περίγραμμα της εικόνας με το άλλο και το μολύβι σχεδιάζει τη μεγέθυνση ή τη σμίκρυνση της εικόνας. Στην εικόνα το σχέδιο που θα προκύψει θα είναι μια μεγέθυνση στο διπλάσιο. Αν συνδέσουμε σε διαφορετικά σημεία τα μικρότερα με τα μεγαλύτερα κομμάτια του ξύλου, μπορούν να σχεδιαστούν μικρότερα ή μεγαλύτερα σχέδια.

Στις ιστοσελίδες της Εκπαιδευτικής Πύλης του ΥΠΕΠΘ www.e-yliko.gr υπάρχει μια προσομοίωση ενός παντογράφου με τον οποίο οι μαθητές μπορούν να σχεδιάσουν ένα σχήμα και να δουν ταυτόχρονα να σχηματίζεται μια μεγέθυνση ή μια σμίκρυνσή του.

Το ίδιο και στην ιστοσελίδα http://www.ies.co.jp/math/java/geo/panta/panta.html

Β. Ο κάνναβος του σχεδιαστή

Ο Αλφρεντ Ντύρερ(1471-1528) στο βιβλίο του "Πραγματεία επί των μετρήσεων" (1525 και 1538) περιείχε εικονογραφήσεις προοπτικών βοηθημάτων, όπως ο κάνναβος του σχεδιαστή. Με το εργαλείο αυτό ο καλλιτέχνης μπορούσε να σχεδιάζει με μεγάλη ακρίβεια εικόνες εκ του φυσικού σε σμίκρυνση.

Ο κάνναβος δεν είναι παρά ένα ξύλινο πλαίσιο στο οποίο είναι στερεωμένες μαύρες κλωστές καλά τεντωμένες, ώστε να σχηματίζουν ένα τετραγωνισμένο πλαίσιο.

Ένα στόχαστρο τοποθετείται πάνω στο τραπέζι σχεδίασης σε απόσταση διπλάσια από το ύψος του πλαισίου. Ο καλλιτέχνης παρατηρεί από την τρύπα του στοχάστρου και σχεδιάζει το περίγραμμα του μοντέλου σε μια τετραγωνισμένη επιφάνεια. Για να επιτύχει την έντονη σμίκρυνση της στάσης τοποθετεί τον κάνναβο πολύ κοντά στο μοντέλο.

Χαρακτικό του Ντύρερ με το πλέγμα σχεδίασης
(κάνναβος)

Οι μαθητές μπορούν να φτιάξουν από χαρτόνι ή ξύλο ένα κάνναβο και τοποθετώντας το πάνω σ'ένα τραπέζι μπροστά από μερικά αντικείμενα να σχεδιάσουν σε τετραγωνισμένο χαρτί το περίγραμμά τους. Στη συνέχεια επιστρατεύοντας το ταλέντο τους να ολοκληρώσουν τη σύνθεση.

Βιβλιογραφία

- *Alison Cole: Ανακαλύπτω την τέχνη-Προοπτική, εκδόσεις Δεληθανάση-Ερευνητές, Αθήνα 1993.*
- *Carol Vorderman : Ανακαλύπτω τα Μαθηματικά, εκδόσεις Ερευνητές, Αθήνα 1998.*

Β Όμοια τρίγωνα (2 διδακτικές ώρες)

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές πρέπει:

- Να γνωρίζουν ότι δυο τρίγωνα είναι όμοια, αν έχουν δυο γωνίες τους ίσες.

- Να μάθουν να γράφουν τους ίσους λόγους που προκύπτουν από τις αντίστοιχες πλευρές δυο ομοίων τριγώνων και να τους αξιοποιούν υπολογίζοντας μήκη τμημάτων.

Διδακτικές οδηγίες

– Να επισημανθεί η διαφορά μεταξύ ισότητας και ομοιότητας των τριγώνων
  - ίσα τρίγωνα (ίσες γωνίες- ίσες πλευρές)
  - όμοια τρίγωνα (ίσες γωνίες – ανάλογες πλευρές) .

– Να επισημανθεί ότι στα τρίγωνα η ισότητα των γωνιών δύο τριγώνων συνεπάγεται την αναλογία των πλευρών, ενώ δεν ισχύει το ίδιο και στα πολύγωνα (π.χ. ορθογώνιο-τετράγωνο).

– Να διευκρινισθεί πώς προκύπτουν οι ίσοι λόγοι σε δύο όμοια τρίγωνα (Παράδειγμα 2).

– Να επισημανθεί ότι δύο όμοια πολύγωνα χωρίζονται σε όμοια τρίγωνα. Δεν ισχύει όμως και το αντίστροφο, όπως φαίνεται και από την ερώτηση κατανόησης 5.

– Δεν πρέπει να διατεθεί χρόνος σε θεωρητικές ασκήσεις ομοιότητας τριγώνων, αλλά μόνο σε υπολογιστικές.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις κατανόησης

1. α) και γ)
2. $\hat{A} = \hat{\Delta} = 30^\circ$, $B = \hat{E} = 75^\circ$
3. α) $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{\Gamma A}{Z\Delta}$ β) $\frac{AB}{\Delta Z} = \frac{B\Gamma}{ZE} = \frac{\Gamma A}{E\Delta}$ γ) $\frac{AB}{Z\Delta} = \frac{B\Gamma}{\Delta E} = \frac{\Gamma A}{ZE}$
4. Σ – Σ – Σ – Σ – Λ – Σ
5. α) Είναι όμοια γιατί έχουν δύο γωνίες ίσες.
   β) Όχι. Τα τετράπλευρα δεν είναι όμοια, γιατί το πρώτο είναι τετράγωνο, ενώ το δεύτερο είναι παραλληλόγραμμο.

Ενδεικτικά προτεινόμενος σχεδιασμός διδασκαλίας της ενότητας 1.5Β

(2 διδακτικές ώρες)

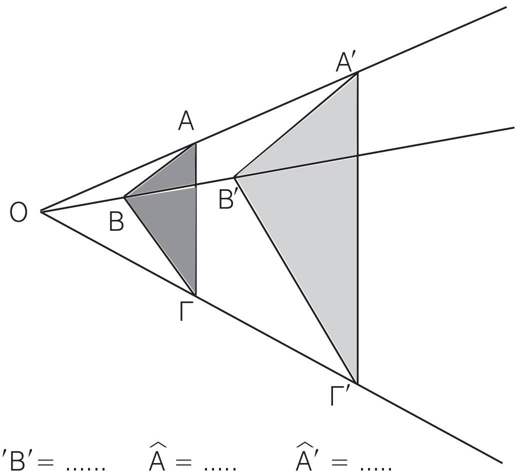
1η διδακτική ώρα	2η διδακτική ώρα
– Όμοια τρίγωνα.	– Παραδείγματα – Εφαρμογές 1, 2.
– Ερωτήσεις κατανόησης 1, 2, 3.	– Ερωτήσεις κατανόησης 4, 5.
– Προτεινόμενες ασκήσεις 1, 2, 3, 4.	– Προτεινόμενες ασκήσεις 5, 6, 7, 8
	– Ένα θέμα από την ιστορία των Μαθηματικών.

Εναλλακτική διδασκαλία με τη χρήση Η/Υ
(Διερευνητική προσέγγιση)
ΘΕΜΑ: Όμοια τρίγωνα

Δραστηριότητες για τα όμοια τρίγωνα και τα πολύγωνα δημοσιεύονται σε πολλές διευθύνσεις στο Internet, όπως: www.ies.co.jp/math/java. Μπορούμε όμως, με ένα λογισμικό π.χ Cabri ή Skechpad να σχεδιάσουμε και μια δική μας δραστηριότητα.

Δραστηριότητα

ΑΒ = ...	Α′Β′ = ...	Ε = ...	Π = ...
ΑΓ = ...	Α′Γ′ = ...	Ε′ = ...	Π′ = ...
ΒΓ = ...	Β′Γ′ = ...	Ε/Ε′ = ...	Π/Π′ = ...



ΑΒ/Α′Β′ = ...	$\widehat{A}$ = ...	$\widehat{A}'$ = ...
ΒΓ/Β′Γ′ = ...	$\widehat{B}$ = ...	$\widehat{B}'$ = ...
ΑΓ/Α′Γ′ = ...	$\widehat{\Gamma}$ = ...	$\widehat{\Gamma}'$ = ...

Σε τρεις ημιευθείες με κοινή αρχή Ο επιλέγουμε στην τύχη τρία σημεία Α, Β, Γ (ένα στην κάθε μία) και σχηματίζουμε το τρίγωνο ΑΒΓ. Μετράμε και πινακοποιούμε αυτόματα τις πλευρές και τις γωνίες του.

Κατασκευάζουμε στη συνέχεια το ομοιόθετό του τρίγωνο Α'Β'Γ' με κέντρο ομοιοθεσίας το σημείο Ο . Κάθε φορά μετράμε και πινακοποιούμε αυτόματα τις πλευρές και τις γωνίες του τριγώνου.

Στην οθόνη παρουσιάζουμε ακόμα το λόγο των μηκών των αντίστοιχων πλευρών των δυο τριγώνων, το λόγο των περιμέτρων τους, καθώς και το λόγο των εμβαδών τους (προετοιμασία για την επόμενη ενότητα). Αν μετακινήσουμε τα σημεία Α ή Α′, ή τις ημιευθείες θα παρακολουθήσουμε τις αλλαγές που θα πραγματοποιηθούν στα μήκη των πλευρών και κατά συνέπεια στους λόγους των εμβαδών και των περιμέτρων.

Στόχος της δραστηριότητας είναι οι μαθητές να ερευνήσουν:

- Τι ισχύει για τις γωνίες των δυο ομοιόθετων τριγώνων.
- Τι συμβαίνει με τους λόγους των ομολόγων πλευρών των δυο ομοιόθετων τριγώνων.
- Ποια σχέση συνδέει το λόγο ομοιοθεσίας δύο ομοιόθετων τριγώνων, με το λόγο των περιμέτρων και των εμβαδών των δυο τριγώνων.
- Ποιο γενικό συμπέρασμα προκύπτει για τα ομοιόθετα τρίγωνα.

Ανάλογη δραστηριότητα και στο www.why.gr/math, Εικασίες για τη Γεωμετρία, Για την ομοιότητα των τριγώνων.

Ένα θέμα από την Ιστορία των Μαθηματικών
Υπολογισμός του ύψους της πυραμίδας από το Θαλή

Όταν το μήκος της σκιάς της ράβδου γίνει ίσο με το ύψος της, τότε και το ύψος ΑΒ της πυραμίδας είναι ίσο με το μήκος ΑΑ' της σκιάς της πυραμίδας. Ο Θαλής υπολόγισε το μήκος της σκιάς της πυραμίδας ΑΑ', αφού μέτρησε το μήκος ΔΑ' της σκιάς της που ήταν ορατό και σε αυτό πρόσθεσε το ΑΔ, δηλαδή το μισό της πλευράς της τετραγωνικής της βάσης.

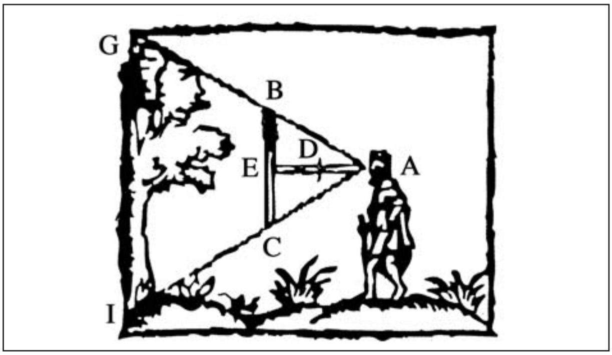
Βιβλιογραφία

Στις σελίδες 48-71 του βιβλίου του Ντένι Γκέτζ, **Το θεώρημα του παπαγάλου**, εκδόσεις Πόλις, υπάρχει μια γλαφυρή περιγραφή του τρόπου με τον οποίο πιθανολογείται ότι μέτρησε ο Θαλής το ύψος της πυραμίδας.

Για περισσότερα, Τσιμπουράκης Δημήτρης: **Μαθηματικές μετρήσεις στην αρχαία Ελλάδα**, εκδόσεις Αίολος, Αθήνα 2002.

Υπολογισμός της απόστασης απρόσιτων σημείων

Το θέμα από την ιστορία των μαθηματικών θα μπορούσε να είναι η αφορμή για να ασχοληθούν οι μαθητές με τον υπολογισμό της απόστασης απρόσιτων σημείων.



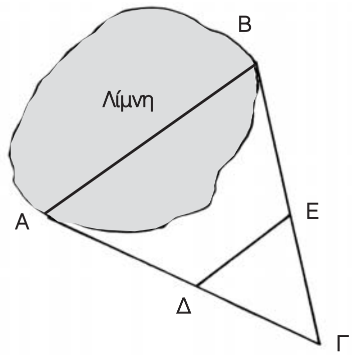
Υπολογισμός του ύψους ενός δέντρου από δύο ξύλα. Γκραβούρα από βιβλίο του 1629

- Ένας τρόπος υπολογισμού της απόστασης απρόσιτων σημείων είναι αυτός που πιστεύεται ότι χρησιμοποίησε ο Θαλής για να υπολογίσει το ύψος της πυραμίδας με τη χρήση ομοίων ορθογωνίων τριγώνων.

  Εφαρμογές του τρόπου αυτού αποτελούν το παράδειγμα 1 και η άσκηση 4 που περιέχονται στο βιβλίο του μαθητή.

  Τον τρόπο αυτό χρησιμοποιούσαν κατά τη διάρκεια του μεσαίωνα για τον υπολογισμό της απόστασης απρόσιτων αποστάσεων π.χ. το ύψος ενός πύργου, την απόσταση ενός πλοίου από το λιμάνι κ.τ.λ. με τη βοήθεια δύο κάθετων ξύλων γνωστού μήκους (άσκηση 6, βιβλίο μαθητή).

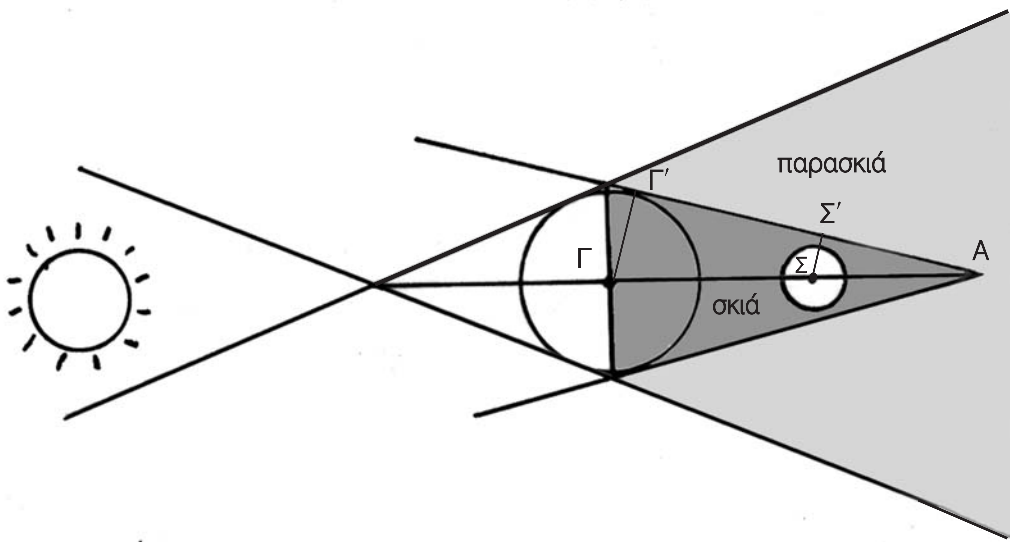
- Έναν άλλο τρόπο υπολογισμού της απόστασης απρόσιτων σημείων περιγράφει στο έργο του «Περί διόπτρας» ο αρχαίος Έλληνας μηχανικός και μαθηματικός **Ήρων ο Αλεξανδρεύς** (1ος π.Χ.-1ος μ.Χ). Ο τρόπος αυτός χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του πλάτους μιας λίμνης ή ενός λόφου. Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο Γ και μετράμε τις αποστάσεις ΑΓ και ΓΒ. Στη συνέχεια βρίσκουμε σημεία Δ και Ε, ώστε π.χ. ΓΔ=1/10 ΓΑ και ΓΕ=1/10ΓΒ (ή όποιο άλλος μέρος τους είναι βολικό). Μετράμε την απόσταση ΔΕ, οπότε ΑΒ=10ΔΕ (Τα τρίγωνα ΓΔΕ και ΓΑΒ είναι όμοια ως ομοιόθετα με κέντρο Γ και λόγο 1/10).



Σε ομάδες μαθητών μπορεί να ανατεθεί να υπολογίσουν με τη βοήθεια ενός ραβδιού το ύψος ενός ψηλού κτιρίου, ενός δένδρου, ενός καμπαναριού κ.τ.λ. μετρώντας την σκιά τους. Στην προσπάθειά τους αυτή οι μαθητές έχουν πολλά να μάθουν καθώς θα πρέπει

να αντιμετωπίσουν και άλλα προβλήματα που δε σχετίζονται με το αρχικό. Π.χ θα χρειαστεί να επιλέξουν την ώρα και το μέρος όπου θα στήσουν το ραβδί, να το στηρίξουν κάθετα στο έδαφος κ.ά.
Μια άλλη ομάδα μπορεί να υπολογίσει με τη μέθοδο του Ήρωνα το πλάτος ενός κτιρίου που δεν μπορεί να το μετρήσει άμεσα.

Αστρονομικές παρατηρήσεις



Με τη βοήθεια των ομοίων τριγώνων μπορούμε να υπολογίσουμε αποστάσεις και τροχιές και να κάνουμε πολλές αστρονομικές παρατηρήσεις.
Μπορούμε, για παράδειγμα, να υπολογίσουμε το μήκος της σκιάς της γης που σχηματίζεται κατά την έκλειψη της σελήνης. Μια ομάδα μαθητών μπορεί να ασχοληθεί με το θέμα αυτό συγκεντρώνοντας συγχρόνως και πληροφορίες για τις εκλείψεις από διάφορα βιβλία και το Internet.

Αφορμή μπορεί να αποτελέσει το παρακάτω ερώτημα:
Κατά την έκλειψη της Σελήνης την 31η Ιανουαρίου του 1999 το μήκος της σκιάς της Γης ΓΑ ήταν 1.380.000 Km και η απόσταση Γης - Σελήνης ΓΣ ήταν 382.000Km. Αν η ακτίνα της γης είναι 6360 Km και η ακτίνα της σελήνης 1740 Km να αποδείξετε ότι η σελήνη βρισκόταν πράγματι τη δεδομένη στιγμή ολόκληρη στη σκιά της Γης.

Σημείωση: Στην ενότητα της Τριγωνομετρίας θα δοθεί η ευκαιρία στους μαθητές να μάθουν μερικές ακόμα μεθόδους υπολογισμού της απόστασης απρόσιτων σημείων και έτσι να ολοκληρώσουν το θέμα αυτό.

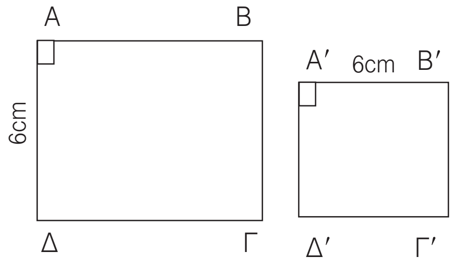
Ενδεικτικό σχέδιο κριτηρίου αξιολόγησης

Διδακτική Ενότητα (Διάρκεια 45 min)

- Ομοιοθεσία • Ομοιότητα

ΘΕΜΑ 1ο

Αν τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και Α′Β′Γ′Δ′ είναι όμοια και ο λόγος ομοιότητας του ΑΒΓΔ προς το Α′Β′Γ′Δ′ είναι $\frac{3}{2}$, τότε να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις:



α) Ο λόγος ομοιότητας του Α′Β′Γ′Δ′ προς το ΑΒΓΔ είναι:......................

β) Η πλευρά ΑΒ είναι ίση με ....cm.

γ) Η πλευρά Β′Γ′ είναι ίση με ....cm.

δ) Ο λόγος $\dfrac{\text{Περίμετρος Α′Β′Γ′Δ′}}{\text{Περίμετρος ΑΒΓΔ}}$ είναι ίσος με ....

(6 Μονάδες)

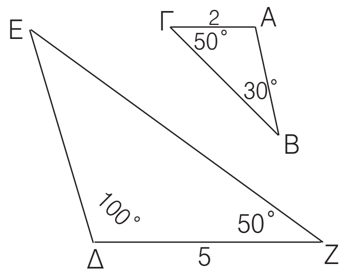
ΘΕΜΑ 2ο

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια και να γράψετε τους ίσους λόγους.

(4 Μονάδες)

β) Να βρείτε το λόγο ομοιότητας του ΔΕΖ προς το ΑΒΓ.

(2 Μονάδες)



ΘΕΜΑ 3ο

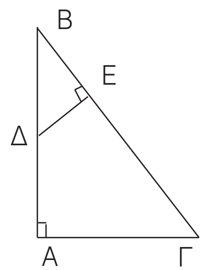
Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ = 8cm και ΑΓ = 6cm. Αν από το μέσο Δ της ΑΒ φέρουμε ΔΕ κάθετη στην υποτείνουσα ΒΓ, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΕ είναι όμοια και να γράψετε τους ίσους λόγους.

(5 Μονάδες)

β) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων ΒΓ, ΒΕ, και ΔΕ.

(3 Μονάδες)



1.6. Λόγος εμβαδών ομοίων σχημάτων (2 διδακτικές ώρες)

Δραστηριότητα

Με τη δραστηριότητα δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να υπολογίσουν τα εμβαδά δύο ομοίων σχημάτων και να ανακαλύψουν την ισότητα του λόγου των εμβαδών τους με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους. Οι πραγματικές διαστάσεις του γηπέδου είναι 30m και 15 m, τα εμβαδά τους είναι 0,18 m^2 και 450 m^2 οπότε $\frac{0{,}18}{450} = \left(\frac{1}{50}\right)^2$.

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές πρέπει:

- Να γνωρίζουν ότι ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων σχημάτων ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.
- Να γνωρίζουν ότι αν όλες οι πλευρές ενός πολυγώνου πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο αριθμό λ και οι γωνίες του μείνουν αμετάβλητες τότε το εμβαδόν του πολλαπλασιάζεται επί $λ^2$.

Διδακτικές οδηγίες

- Με απλά αριθμητικά παραδείγματα να αντιληφθούν οι μαθητές ότι αν διπλασιάσουν, τις πλευρές ενός τετραγώνου ή ενός ορθογωνίου το εμβαδόν του δεν διπλασιάζεται αλλά τετραπλασιάζεται (ερωτήσεις κατανόησης 2α, 2β).
- Να μπορούν να προσδιορίσουν τη σχέση μεταξύ των εμβαδών δύο ομοίων σχημάτων αν γνωρίζουν το λόγο ομοιότητάς τους. (Ερωτήσεις κατανόησης 1, 3).
- Να δοθούν παραδείγματα τα οποία να αναφέρονται στην κλίμακα ενός σχεδίου ή ενός χάρτη.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις κατανόησης

1. $E_1 = 4\,E_2$, $E_1 = 9\,E_2$, $E_1 = 4\,E_2$

2. **α)** εννέα, **β)** τέσσερις, **γ)** τέσσερις

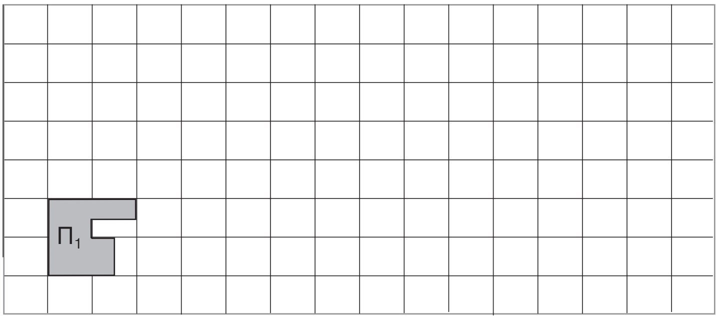
3. Ναι, αφού $\frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25} = 0{,}16$

Εναλλακτική διδασκαλία με τη χρήση Η/Υ (Διερευνητική προσέγγιση)

Cabri geometry II, Εκπαιδευτικές δραστηριότητες για το Γυμνάσιο. Βιβλίο του καθηγητή σελίδα 85 - Εμβαδά ομοίων σχημάτων.

Συμπληρωματικά θέματα

1.α) Να σχεδιάσετε δύο πολύγωνα ($Π_2$) και ($Π_3$) όμοια προς το ($Π_1$) των οποίων ο λόγος ομοιότητας τους προς το ($Π_1$) είναι 2 και 3 αντιστοίχως.



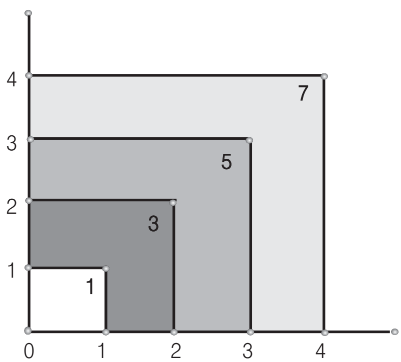
β) Να συμπληρώσετε τον πίνακα

Πολύγωνο $Π_1$	Πολύγωνο $Π_2$	Πολύγωνο $Π_3$
Περίμετρος	Περίμετρος	Περίμετρος ....
Εμβαδόν	Εμβαδόν	Εμβαδόν ......

γ) Αν ενός πολυγώνου διατηρήσουμε σταθερές τις γωνίες και
διπλασιάσουμε το μήκος των πλευρών του, τότε η περίμετρος .... και το εμβαδόν ......
τριπλασιάσουμε το μήκος των πλευρών του, τότε η περίμετρος ...... και το εμβαδόν ......

2. Σχεδιάστε ένα τετράγωνο με πλευρά 1, διπλασιάστε, τριπλασιάστε,.. την πλευρά του και σχεδιάστε τα τετράγωνα που προκύπτουν. Υπολογίστε το εμβαδόν των τετραγώνων που σχεδιάσατε και βάλτε το σ' έναν πίνακα.
α) Να συγκρίνετε το λόγο των εμβαδών δύο τυχαίων τετραγώνων με το λόγο ομοιότητάς τους . Τι διαπιστώνετε;
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τμήματος που περιέχεται μεταξύ δύο διαδοχικών τετραγώνων. Τι διαπιστώνετε; Μπορείτε να διατυπώσετε μια εικασία;

Απάντηση:



	πλευρά	εμβαδόν	Διαφορά εμβαδού από το προηγούμενο
T_1	1	1	$1 - 0 = 1$
T_2	2	4	$4 - 1 = 3$
T_3	3	9	$9 - 4 = 5$
T_4	4	16	$16 - 9 = 7$
...	...	...	...
$T_ν$	$ν$	$ν^2$	
$T_{ν+1}$	$ν + 1$	$(ν + 1)^2$	$(ν + 1)^2 - ν^2 = 2ν + 1$

Σχέδιο διαθεματικής εργασίας
Μεγέθυνση – Σμίκρυνση, η γεωμετρία των καλλιτεχνών

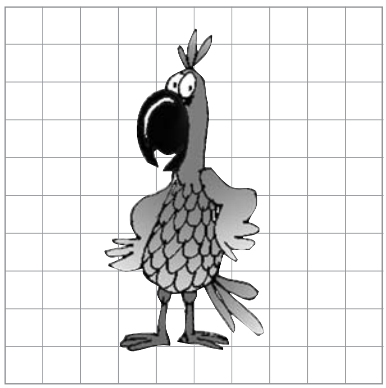
Ο καθηγητής των μαθηματικών σε συνεργασία με τον καθηγητή των καλλιτεχνικών θα μπορούσαν στα πλαίσια του μαθήματος των καλλιτεχνικών να βοηθήσουν τους μαθητές στη μεγέθυνση-σμίκρυνση αντικειμένων στο χαρτί σχεδίασης.

Ενδεικτικές επισημάνσεις

Οι μαθητές πρέπει:
- Να συγκεντρώσουν διάφορα σχέδια, να τα φωτοτυπήσουν με διάφορες κλίμακες και να βγάλουν συμπεράσματα για την ομοιότητα τους.
- Να κατανοήσουν την τεχνική της μεγέθυνσης - σμίκρυνσης σχεδίων.
- Ν' αντιληφθούν την άμεση σχέση της εικαστικής δημιουργίας με τη Γεωμετρία.
- Να μπορούν να μεγεθύνουν - σμικρύνουν εικόνες, χάρτες, αρχιτεκτονικά και γραμμικά σχέδια με γεωμετρικό τρόπο.

Προτεινόμενες δραστηριότητες

- Σχεδιασμός σε σμίκρυνση του χάρτη του γεωγραφικού διαμερίσματος στο οποίο ανήκουν ή του νησιού στο οποίο κατοικούν.
- Σχεδιασμός σε σμίκρυνση με κλίμακα 1/50 της κάτοψης του δωματίου τους, με όλα τα βασικά έπιπλα κρεβάτι, τραπέζι, ντουλάπα, κ.τ.λ.
- Σχεδιασμός σε σμίκρυνση με κλίμακα 1/50 ενός ποδοσφαιρικού γηπέδου ή γηπέδου μπάσκετ αν γνωρίζουν τις διαστάσεις του.
- Σχεδιασμός σε σμίκρυνση με κλίμακα 1/50 της κάτοψης του σχολείου τους.
- Σχεδίαση μιας εικόνας σε μεγέθυνση με τη βοήθεια τετραγωνισμένου πλαισίου.
  Για παράδειγμα θα μπορούσαν να δοθούν τα παρακάτω σχήματα:



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο - Τριγωνομετρία

2.1. Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0^\circ \leq ω \leq 180^\circ$ (2 διδακτικές ώρες)

Δραστηριότητα

Με τη δραστηριότητα επιδιώκεται οι μαθητές να εντοπίσουν τις συντεταγμένες (4, 3) του σημείου Μ, να υπολογίσουν με το Πυθαγόρειο θεώρημα την απόσταση ΟΜ και αφού φέρουν την ΜΑ κάθετη στον άξονα x'x από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΜΑ να υπολογίσουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της οξείας γωνίας ω. Με την ευκαιρία αυτή θα επαναλάβουν τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών μιας οξείας γωνίας που έμαθαν στην προηγούμενη τάξη. Η δραστηριότητα τους προετοιμάζει να συνδέσουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω με τις συντεταγμένες του Μ και την απόστασή του από το Ο.

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές πρέπει:
- Να θυμηθούν πώς ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου.
- Να γνωρίζουν πώς ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας ή αμβλείας γωνίας με τη βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων.
- Να μάθουν να υπολογίζουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας ω με $0^\circ \leq ω \leq 180^\circ$ με τη βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων.
- Να μπορούν να υπολογίζουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των 0°, 90° και 180°.

Διδακτικές οδηγίες

- Τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου τους έμαθαν σε προηγούμενη τάξη και γι' αυτό να γίνει μόνο μια υπενθύμιση.
- Να τονιστεί ότι για να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας γωνίας ω, $0^\circ \leq ω \leq 180^\circ$ με τη βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων, πρέπει η κορυφή της να συμπίπτει με την αρχή των αξόνων, η μια πλευρά της να ταυτίζεται με τον ημιάξονα Οx και η άλλη πλευρά να βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x.
- Να τονιστεί ότι η εφ 90° δεν ορίζεται, αφού ο παρονομαστής του κλάσματος είναι μηδέν.
- Να διευκρινιστεί ότι το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας $x\hat{O}M$ εξαρτάται από το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται το σημείο Μ.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις κατανόησης

1. $\frac{12}{13}, \frac{5}{13}, \frac{12}{5}$
2. ημω > 0, συνω < 0, εφω < 0
3. α → 3, β → 2, γ → 1, δ → 1, ε → 1, στ → 1, ζ → 3, η → 1
4. Σ – Σ – Λ – Σ

2.2. Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών (1 διδακτική ώρα)

Δραστηριότητα

Με τη δραστηριότητα δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές χρησιμοποιώντας γνώσεις της προηγούμενης ενότητας να «ανακαλύψουν» τη σχέση που συνδέει τους τριγωνομετρικούς αριθμούς δύο παραπληρωματικών γωνιών.

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές πρέπει:

- Να μάθουν ότι οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.
- Να γνωρίζουν ότι δύο γωνίες από 0° μέχρι 180°, αν έχουν ίδιο ημίτονο τότε είναι ίσες ή παραπληρωματικές, ενώ αν έχουν ίδιο συνημίτονο ή εφαπτομένη, τότε είναι ίσες.

Διδακτικές οδηγίες

– Να μπορούν να υπολογίζουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας αμβλείας γωνίας όταν γνωρίζουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της παραπληρωματικής της (οξείας) γωνίας.
  Για παράδειγμα να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των βασικών γωνιών 120°,135°, 150° (άσκηση 1).
– Να μη διατεθεί χρόνος σε θεωρητικές ασκήσεις αλλά σε υπολογιστικές.
– Με την ερώτηση κατανόησης 2 και την άσκηση 5 δίνεται η δυνατότητα να ασκηθούν οι μαθητές στη λύση απλών εξισώσεων με τριγωνομετρικούς αριθμούς (τριγωνομετρική εξίσωση).
– Να τονιστεί ότι η ισότητα των ημιτόνων δύο γωνιών δεν συνεπάγεται και την ισότητα των γωνιών αυτών.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις κατανόησης

1. Σ – Λ – Λ – Σ – Σ – Λ
2. α) $x = 60°$ ή $x = 120°$, β) $x = 160°$, γ) $x = 150°$
3. α → 1, β → 5, γ → 6

Εναλλακτική διδασκαλία με τη χρήση Η/Υ (Διερευνητική προσέγγιση)

Μια απλή αλλά εύχρηστη δραστηριότητα υπάρχει στο www.e-yliko.gr με θέμα «Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών». Η δραστηριότητα αυτή είναι σύμφωνη με το περιεχόμενο της ενότητας αυτής και επομένως μπορεί να αποτελέσει εναλλακτική πρόταση διδασκαλίας (διερευνητική προσέγγιση).

2.3. Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας (4 διδακτικές ώρες)

Δραστηριότητα

Με τη δραστηριότητα δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να επιλέξουν ένα οποιοδήποτε σημείο Μ με συγκεκριμένες συντεταγμένες (π.χ. Μ(1, 2) ή Μ(–2, 3) κ.τ.λ.) και να διαπιστώσουν ότι ανεξάρτητα από το σημείο που επέλεξαν, όλοι θα καταλήξουν στις ισότητες $ημ^2ω + συν^2ω = 1$ και $εφω = \frac{ημω}{συνω}$. Έτσι, θα συνειδητοποιήσουν ότι οι ισότητες αυτές ισχύουν για οποιαδήποτε γωνία ω, οπότε είναι ταυτότητες.

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές πρέπει:

- Να γνωρίζουν τις βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες και να μάθουν να τις αποδεικνύουν.
- Να μάθουν πώς υπολογίζονται οι υπόλοιποι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας γωνίας ω, όταν γνωρίζουν το ημω ή το συνω ή την εφω.
- Να αποδεικνύουν **απλές** τριγωνομετρικές ταυτότητες με τη χρήση των βασικών.

Διδακτικές οδηγίες

- Να τονιστεί ότι οι βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες χρησιμοποιούνται για την εύρεση όλων των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ω, αν είναι γνωστό το ημω ή το συνω ή η εφω.
- Η εύρεση του ημω και του συνω, όταν δίνεται η εφω, είναι δευτερεύων στόχος και γι' αυτό τα αντίστοιχα παραδείγματα να γίνουν με τη χρήση των βασικών ταυτοτήτων και όχι με την απομνημόνευση άλλων τύπων (Παράδειγμα 2).
- Με την απόδειξη απλών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να εξασκηθούν στον αλγεβρικό λογισμό και την αποδεικτική διαδικασία.(Παράδειγμα 3 και ασκήσεις 5, 6, 7, 8, 9, 10). Η απόδειξη να περιοριστεί σε απλές ταυτότητες και αν χρειάζονται περιορισμοί, **θα εννοούνται και δεν θα απαιτούνται**.
- Να τονιστεί ότι η ταυτότητα $ημ^2ω + συν^2ω = 1$ οδηγεί και στις ταυτότητες $συνω = \pm\sqrt{1-ημ^2ω}$, $ημω = \sqrt{1-συν^2ω}$, αφού οι γνώσεις των μαθητών περιορίζονται στις γωνίες με $-1 \le συνω \le 1$ και $0 \le ημω \le 1$.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις κατανόησης

1. Σ – Σ – Λ – Σ
2. Ναι, γιατί αν υπήρχε θα ίσχυε $ημ^2ω + συν^2ω = 0^2 + 0^2 = 0$ (αδύνατο)
3. α) 0, β) 1 ή –1
4. δ

Μαθηματικό αίνιγμα (σελ. 243 βιβλίο μαθητή)

Πρέπει $\left(\frac{λ+1}{λ+2}\right)^2 + \left(\frac{λ}{λ+2}\right)^2 = 1$, οπότε $λ^2 - 2λ - 3 = 0$, άρα $λ = 3$ ή $λ = -1$. Αν ήταν $λ = 3$, τότε η γωνία θα ήταν οξεία αφού $ημω > 0$ και $συνω > 0$. Άρα $λ = -1$, οπότε $\widehat{ω} = 180°$.

Ενδεικτικά προτεινόμενος σχεδιασμός διδασκαλίας της ενότητας 2.3

(4 διδακτικές ώρες)

1η διδακτική ώρα
- Δραστηριότητα. Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες.
- Παραδείγματα εφαρμογές 1.
- Προτεινόμενες ασκήσεις 1, 2, 4.

2η διδακτική ώρα
- Παραδείγματα εφαρμογές 3.
- Ερωτήσεις κατανόησης 1, 2, 3, 4.
- Προτεινόμενες ασκήσεις 5, 6, 7.

3η διδακτική ώρα
- Παραδείγματα εφαρμογές 2.
- Προτεινόμενες ασκήσεις 3, 8, 9, 10.

4η διδακτική ώρα
- Επανάληψη.
- Συμπληρώσεις.
- Μαθηματικό αίνιγμα (άσκηση 14)
- Προτεινόμενες ασκήσεις 11, 12, 13. Γενικές ασκήσεις 1.

Ενδεικτικό σχέδιο κριτηρίου αξιολόγησης

Διδακτικές Ενότητες 2.2 – 2.3 (Διάρκεια 45 min)

ΘΕΜΑ 1ο

α) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες

i. $ημ20^\circ = ημ160^\circ$
ii. $ημ130^\circ = -ημ50^\circ$
iii. $συν100^\circ = συν80^\circ$
iv. $εφ70^\circ = -εφ110^\circ$ (4 Μονάδες)

β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 120°, 150° και 135°.
(3 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 2ο

Να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της οξείας γωνίας ω, αν

$ημω = \frac{4}{5}$. (7 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 3ο

Να αποδείξετε ότι $\frac{ημα}{1 - συνα} = \frac{1 + συνα}{ημα}$

(6 Μονάδες)

2.4. Νόμος ημιτόνων – Νόμος συνημιτόνων (4 διδακτικές ώρες)

Δραστηριότητα

Με τη δραστηριότητα δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές, να υπολογίσουν καταρχάς την απόσταση $ΓΔ = 50\sqrt{2}$ m και στη συνέχεια την απόσταση $ΓΒ = 100\sqrt{2}$ m. Έτσι, θα μπορέσουν να διαπιστώσουν ότι ισχύει $\frac{ΓΒ}{ημ45°} = \frac{ΓΑ}{ημ30°} = 200$, οπότε θα οδηγηθούν στη διατύπωση του νόμου των ημιτόνων.

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές πρέπει:

- Να γνωρίζουν τους νόμους ημιτόνων και συνημιτόνων και να μπορούν να τους εφαρμόζουν στην επίλυση προβλημάτων.

Διδακτικές οδηγίες

– Η απόδειξη του νόμου των συνημιτόνων, επειδή παρουσιάζει ιδιαίτερη δυσκολία, να γίνει μόνο στην περίπτωση που το επίπεδο της τάξης το επιτρέπει, αφού για την λύση προβλημάτων αρκεί η γνώση του τύπου.

– Να εξασκηθούν οι μαθητές ώστε να μπορούν να γράφουν το νόμο ημιτόνων και συνημιτόνων σε οποιοδήποτε τρίγωνο και όχι απαραίτητα με κορυφές Α, Β, Γ ή πλευρές α, β, γ (Ερωτήσεις κατανόησης 1, 2, 4).

– Να τονιστεί ότι, αν με το νόμο των ημιτόνων υπολογίσουν το ημίτονο γωνίας τριγώνου, τότε η γωνία μπορεί να είναι οξεία ή αμβλεία (Ασκήσεις 3, 4).

– Να διευκρινιστεί ποιος νόμος χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό όλων των πρωτευόντων στοιχείων ενός τριγώνου ανάλογα με τα δεδομένα π.χ:
Νόμος ημιτόνων: πλευρά–απέναντι γωνία και μια άλλη πλευρά ή γωνία.
Νόμος συνημιτόνων: τρεις πλευρές ή δύο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία (Ερώτηση κατανόησης 5).

– Να τονιστεί ότι :
α) Ο νόμος των συνημιτόνων χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της συνισταμένης δύο δυνάμεων F_1, F_2, που σχηματίζουν οποιαδήποτε γωνία (Παράδειγμα 4).
β) Ο νόμος των ημιτόνων χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των δυνάμεων F_1, F_2 όταν είναι γνωστή η συνισταμένη τους F και οι γωνίες που σχηματίζουν οι δυνάμεις F_1, F_2 με την F. (Άσκηση 7)

– Να μη διατεθεί χρόνος στην επίλυση σύνθετων προβλημάτων.

– Να μη διδαχτούν θεωρητικές ασκήσεις , αλλά μόνον υπολογιστικές.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις κατανόησης

1. $\frac{x}{ημ80°} = \frac{y}{ημ30°} = \frac{ω}{ημ70°}$

2. α) $\frac{ΑΒ}{ημ70°} = \frac{ΒΔ}{ημ30°} = \frac{ΑΔ}{ημ80°}$

β) $\frac{ΔΓ}{ημ20°} = \frac{ΑΓ}{ημ110°} = \frac{ΑΔ}{ημ50°}$

3. Σ – Λ – Σ – Λ – Σ

4. $x^2 = \omega^2 + y^2 – 2\omega y συν75^\circ$, $y^2 = x^2 + \omega^2 – 2x\omega συν60^\circ$, $\omega^2 = x^2 + y^2 – 2xyσυν45^\circ$

5. α) ημιτόνων, $\frac{10}{ημx} = \frac{12}{ημ60^\circ}$, β) συνημιτόνων, $x^2 = 4^2 + 5^2 – 2 \cdot 4 \cdot 5συν50^\circ$

γ) συνημιτόνων, $6^2 = 4^2 + 5^2 – 2 \cdot 4 \cdot 5συν\, x$ δ) ημιτόνων, $\frac{x}{ημ50^\circ} = \frac{10}{ημ70^\circ}$.

Ενδεικτικό σχέδιο κριτηρίου αξιολόγησης

Διδακτικές Ενότητες 2.1 – 2.2 (Διάρκεια 45 min)

Θέμα 1ο

α) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες

i) $\frac{\alpha}{ημΓ} = \frac{\gamma}{ημΑ}$

ii) $\frac{\gamma}{ημΓ} = \frac{\beta}{ημΒ}$

iii) $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma συνΑ$

iv) $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma συνΒ$ (4 Μονάδες)

β) Να αποδείξετε ότι σε κάθε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\frac{\alpha}{ημΑ} = \frac{\beta}{ημΒ}$

(4 Μονάδες)

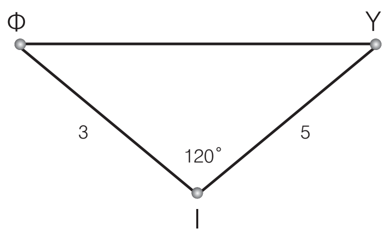
ΘΕΜΑ 2ο

Σ’ένα τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία $\widehat{B} = 45^\circ$ και η γωνία $\widehat{Γ} = 30^\circ$. Να υπολογίσετε την πλευρά β του τριγώνου αν γνωρίζετε ότι $\gamma = 6$cm.

(6 Μονάδες)

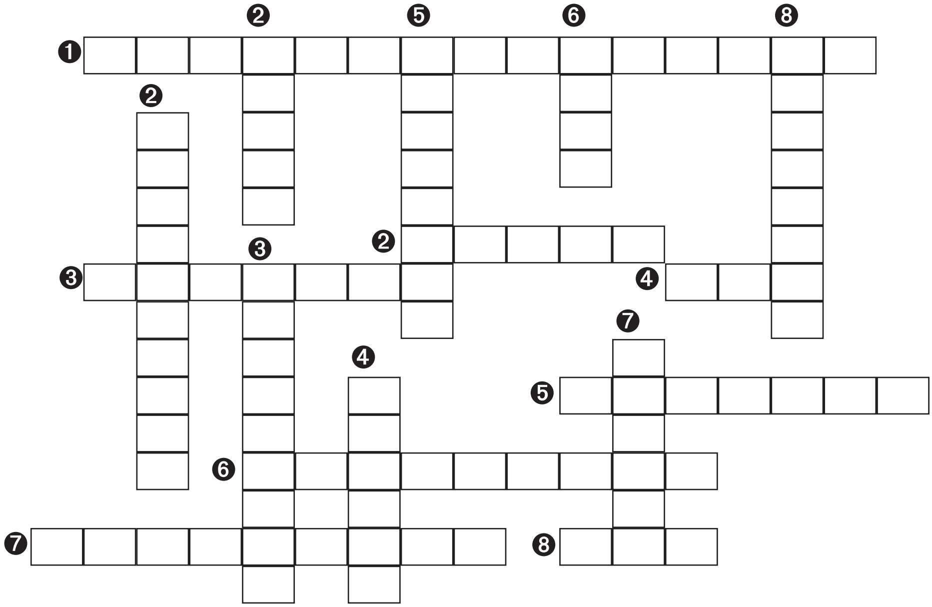
ΘΕΜΑ 3ο

Η απόσταση ενός ιστιοφόρου Ι από τον ύφαλο Υ είναι 5 ναυτικά μίλια ενώ από τον φάρο Φ είναι 3 ναυτικά μίλια. Αν η γωνία $Φ\widehat{Ι}Υ = 120^\circ$ να υπολογίσετε την απόσταση του φάρου από τον ύφαλο.



(6 Μονάδες)

Συμπληρωματικά θέματα



Οριζόντια:

1. Είναι οι αριθμοί ημω, συνω και εφω.
2. Είναι το συνημίτονο της ορθής γωνίας.
3. Μιας οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου είναι ο λόγος τής απέναντι κάθετης πλευράς προς την υποτείνουσα.
4. Είναι το ημίτονο της ορθής γωνίας.
5. Υπάρχει και τριγωνομετρική...
6. Η... του Μ είναι το συνημίτονο της γωνίας $x\hat{O}M$, όταν ΟΜ = ρ = 1.
7. Είναι οι τιμές του συνημιτόνου των αμβλειών γωνιών.
8. Είναι τα $ημ30^\circ$ και $ημ150^\circ$.

Κάθετα:

1. Μιας οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου είναι ο λόγος της προσκείμενης κάθετης πλευράς προς την υποτείνουσα.
2. Καθεμιά έχει και το ... ημίτονο της.
3. Η ισότητα $ημ^2ω + συν^2ω = 1$ είναι τριγωνομετρική ......
4. Είναι το ημίτονο οποιασδήποτε γωνίας τριγώνου.
5. Είναι οι αριθμοί του συνημίτονου και της εφαπτομένης οποιασδήποτε οξείας ή αμβλείας γωνίας.
6. Έχει και αυτό τους τριγωνομετρικούς του αριθμούς.
7. Χρησιμοποιούνται για να ορίσουμε τριγωνομετρικούς αριθμούς αμβλείας γωνίας.
8. Δεν .... η εφαπτομένη ορθής γωνίας.

Απαντήσεις

Οριζόντια: 1. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ, 2. ΜΗΔΕΝ, 3. ΗΜΙΤΟΝΟ, 4. ΕΝΑ, 5. ΕΞΙΣΩΣΗ, 6. ΤΕΤΜΗΜΕΝΗ, 7. ΑΡΝΗΤΙΚΕΣ, 8. ΙΣΑ

Κάθετα: 1. ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟ, 2. ΓΩΝΙΑ, 3. ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ, 4. ΘΕΤΙΚΟ, 5. ΟΜΟΣΗΜΟΙ, 6. ΤΟΞΟ, 7. ΑΞΟΝΕΣ, 8. ΟΡΙΖΕΤΑΙ

Σχέδιο διαθεματικής εργασίας
ΘΕΜΑ: Υπολογισμός της απόστασης απρόσιτων σημείων

Μετά την ολοκλήρωση του κεφαλαίου της τριγωνομετρίας, ο διδάσκων μπορεί να επανέλθει στο θέμα του υπολογισμού της απόστασης απρόσιτων σημείων και να το συμπληρώσει, αφού προηγουμένως έχουν λυθεί τα προτεινόμενα προβλήματα της ενότητας αυτής που αναφέρονται σε καταστάσεις της καθημερινής ζωής.
Το θέμα του υπολογισμού της απόστασης απρόσιτων σημείων θα μπορούσε να αποτελέσει θέμα ομαδικής εργασίας στα πλαίσια των διαθεματικών προσεγγίσεων. Μέσα από τα διάφορα προβλήματα οι μαθητές θα διαπιστώσουν τη χρησιμότητα των γεωμετρικών και τριγωνομετρικών σχέσεων για τον υπολογισμό της απόστασης απρόσιτων σημείων.
Ως παραδείγματα θα μπορούσαν να αντιμετωπιστούν στα πλαίσια της εργασίας αυτής προβλήματα στα οποία ζητείται να υπολογιστεί :

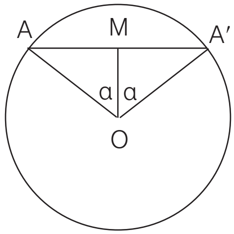
- το ύψος ενός ψηλού κτιρίου, ενός καταρράκτη, ενός βουνού,
- το μήκος μιας σήραγγας, μιας γέφυρας,
- η απόσταση δύο υφάλων, δύο φάρων, δύο πλοίων, δύο δέντρων (που μεταξύ τους παρεμβάλλεται ένα εμπόδιο και δεν μπορεί να μετρηθεί).

Συμπληρωματικά θα μπορούσαν να αναζητήσουν στοιχεία για τον τρόπο με τον οποίο οι τοπογράφοι του πυροβολικού προσδιορίζουν τις συντεταγμένες ενός στόχου, οι ναυτικοί βρίσκουν το στίγμα του σκάφους κ.τ.λ.

Ιστορικό σημείωμα
Οι θεμελιωτές της Τριγωνομετρίας

Ποιος είναι ο ιδρυτής του κλάδου αυτού των μαθηματικών δεν γνωρίζουμε ακριβώς. Σίγουρα όμως η τριγωνομετρία προέκυψε από την προσπάθεια να θεμελιωθεί μια ποσοτική αστρονομία η οποία θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να προβλεφθούν οι θέσεις των ουρανίων σωμάτων, δηλαδή οι αποστάσεις μεταξύ των πλανητών και των δορυφόρων τους, να υπολογιστεί το ημερολόγιο και να εφαρμοστεί στη ναυσιπλοΐα και τη γεωγραφία .
Η τριγωνομετρία είναι δημιούργημα της ελληνιστικής περιόδου με θεμελιωτές τον Ίππαρχο, τον Μενέλαο και τον Πτολεμαίο.
Ο **Ίππαρχος** (2ος αιών π.Χ) από την Νίκαια της Βιθυνίας είναι ο πρώτος για τον οποίο έχουμε τεκμηριωμένες αποδείξεις ότι έκανε συστηματική χρήση της τριγωνομετρίας. Ο Ίππαρχος, μέγας αστρονόμος της αρχαιότητος, έζησε στη Ρόδο και την Αλεξάνδρεια και έγραψε μια πραγματεία από δώδεκα βιβλία περί των ευθειών γραμμών(δηλαδή χορδών) σε έναν κύκλο. Συνέταξε και έναν «Πίνακα χορδών», κάτι ανάλογο με τους γνωστούς μας πίνακες των ημιτόνων. Το μεγαλύτερο μέρος της τριγωνομετρίας του αναφέρεται στη σφαιρική τριγωνομετρία, αφού τον ενδιέφεραν κυρίως τα τρίγωνα που σχηματίζονται στον ουράνιο θόλο.
Όπως σημειώνει ο Heath «*Οι αρχαίοι έλληνες δε χρησιμοποιούσαν τους όρους ημίτονο, συνημίτονο και εφαπτομένη, αλλά χρησιμοποιούσαν τις χορδές που αντιστοιχούν σε τόξα ενός κύκλου.*

Αν $AM \perp OM$, *τότε* $ημα = \frac{AM}{AO}$ *και* $AM = \frac{AA'}{2}$ *ή το μισό της χορδής που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία 2α, που συμβολίζεται σύντομα* $^1/_2$ *(χορδής 2α), δηλαδή, το ημα είναι ισοδύναμο με* $^1/_2$ *(χορδής 2α) (ημίτονο = ήμισυ + τόνος = μισή χορδή). Το συνα που είναι ημ(90° – α) είναι συνεπώς ισοδύναμο με ½ [χορδής (180° – 2α)]»* (*Th. Heath , τόμος II, σελ 316)*



Το έργο του Ιππάρχου συνέχισε ο **Μενέλαος** (1ος αιών μ. Χ) με το πόνημά του την «Σφαιρική» που αποτελείται από τρία βιβλία. Στο τρίτο βιβλίο περιέχει θεωρήματα που αναφέρονται στην επίπεδη και τη σφαιρική τριγωνομετρία. Στο βιβλίο αυτό ο Μενέλαος εισήγαγε για πρώτη φορά τη χρήση των σφαιρικών τριγώνων και απέδειξε τις ιδιότητες και τις περιπτώσεις ισότητάς τους. Ο Μενέλαος προσπάθησε στο βιβλίο αυτό να αντιστοιχίσει τις προτάσεις των σφαιρικών τριγώνων με αυτές που περιέχονται στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη και οι οποίες αναφέρονται στα επίπεδα τρίγωνα.

Η ανάπτυξη της ελληνικής τριγωνομετρίας και των εφαρμογών της ολοκληρώθηκε με το έργο του **Κλαύδιου Πτολεμαίου** (108-160 μ.Χ) που έζησε στην Αλεξάνδρεια και του οποίου το σύγγραμμα είναι η «(Μεγίστη) Μαθηματική Σύνταξις» γνωστό μάλιστα και ως Αλμαγέστη, από την αραβική παραφθορά της λέξης «Μεγίστη», γραμμένο γύρω στο 150μ.Χ. Ο Πτολεμαίος, ο οποίος βασίστηκε πολύ στον Ίππαρχο, πρώτος υπολόγισε τις τριγωνομετρικές σχέσεις μεταξύ των τριών γωνιών και των τριών πλευρών ενός τριγώνου. Στο έργο του περιέχεται και ένας πίνακας για τις χορδές του κύκλου, οι οποίες αντιστοιχούν σε γωνίες που αυξάνουν κατά μισή μοίρα. Δηλαδή ο πίνακας αυτός περιέχει το ανάλογο ενός πίνακα ημιτόνων για τη χορδή $2R\text{ημ}\frac{\alpha}{2}$.

Η τριγωνομετρία του Πτολεμαίου είναι διαφορετική από τη σύγχρονη, εφόσον δε συναντάμε τις συνηθισμένες τριγωνομετρικές συναρτήσεις, αλλά μόνο τις χορδές των θεωρούμενων τόξων.

Το ημίτονο το εισήγαγαν οι Ινδοί, οι οποίοι συνέταξαν και τους πρώτους πίνακες ημιτόνων. Η ρίζα της λέξης ημίτονο (sine, sinus στα λατινικά) προέρχεται από την ινδική λέξη με την οποία απέδωσε τον όρο μισή χορδή ο Ινδός μαθηματικός Αριαμπάτα. Η ινδική αυτή λέξη συντομεύτηκε αργότερα από τους Άραβες. Ο Γκεράντο της Κρεμόνας όταν μετέφρασε το 1150 μ.Χ για πρώτη φορά στα λατινικά από τα αραβικά τη Μεγίστη, μετέτρεψε την αραβική λέξη σε sinus. Οι Ινδοί εισήγαγαν ακόμα και το συνημίτονο. Τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς τους εισήγαγαν οι Άραβες.

Στη Δύση η μελέτη της τριγωνομετρίας άρχισε από τον 15ο αιώνα από τους Regiomontanns (1436-1475) και Rheticus (1514-1575). Η ανάπτυξή της όμως υπήρξε τόσο ραγδαία ώστε στα μέσα του ίδιου αιώνα με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών συναρτήσεων αναπτύχθηκαν συστηματικά οι μέθοδοι επίλυσης των τριγώνων.

Με την τριγωνομετρία λύθηκαν και λύνονται προβλήματα μηχανικής, αρχιτεκτονικής, γεφυροποιίας, οδοποιίας, ναυσιπλοΐας κ.τ.λ.

Βιβλιογραφία

- *H.Ives : Εισαγωγή στην ιστορία των Μαθηματικών, εκδόσεις Τροχαλία, Αθήνα 1998.*
- *Thomas L. Heath : Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών, τόμος ΙΙ, Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ, Αθήνα 2001.*