ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κωνσταντόπουλος Κων/νος
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=(\alpha-2013)^x, \alpha\in\mathbb{R}$.

- **a)** Να υπολογιστεί ο α, ώστε να ορίζεται η εκθετική συνάρτηση f.
- **b)** Να υπολογιστεί ο α, ώστε η συνάρτηση f να είναι γνησίως αύξουσα.
- **c)** Να υπολογιστεί ο α, ώστε η συνάρτηση f να είναι γνησίως φθίνουσα..
- **d)** Αν α=2015, να λυθεί η εξίσωση $f(x)=2^{x+1}-8$.

2. **A.** Να λυθεί η εξίσωση $\dfrac{e^{\sigma\upsilon\nu^2 x}}{e}=e^{2\sigma\upsilon\nu^2 x+2\sigma\upsilon\nu x}$.

B. Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases}2^y\cdot 2^x=4\\ 2^x:2^y=1\end{cases}$.

3. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\left(\lambda^3-3\lambda+2\right)x^3+\left(\lambda^2-1\right)x+3\lambda+1,\ \lambda\in\mathbb{R}$.

- **a)** Να βρεθεί ο βαθμός του πολυωνύμου για τις διάφορες τιμές του λ.
- **b)** Για την τιμή του λ που το είναι πρώτου βαθμού, να λυθεί η εξίσωση $(\lambda-1)x^3+\lambda^2x^2+\lambda x-\dfrac{\lambda}{2}=0.$

4. **A.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log\dfrac{5^{2x}-10}{5^x+10}$.

- **a)** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.
- **b)** Να βρεθούν τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$.

B. **a)** Να λυθεί η εξίσωση $\log(x-1)=1-\log(x+2)$.

b) Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases}\dfrac{y}{x}=10\\ \log\sqrt{y}=\log x\end{cases}$.

5. **A.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(4^{x+1}-6\cdot 2^x+2\right)$.

a) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

b) Να βρεθούν τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $(\varepsilon): y=\ln 6$.

B. Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} \log\sqrt{xy}=1 \\ \log x+\log y=-3 \end{cases}$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log\dfrac{x-2}{x\cdot(x+4)}+2\log(x+4)$

a) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

b) Να αποδειχθεί ότι $f(x)=\log\dfrac{(x+4)(x-2)}{x}$.

c) Να λυθεί η εξίσωση $2xf(4)=\log 4^{x-2}+(2-x)\log 10.$

7. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=x^4+\alpha x^3-9x^2+\beta x+6$ και $Q(x)=x^2-x-6$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}.$

a) Να παραγοντοποιηθεί το $Q(x).$

b) Να βρεθούν τα α,β, ώστε το $Q(x)$ να είναι παράγοντας του $P(x)$.

c) Για τις τιμές των α,β που βρήκατε στο b) ερώτημα να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0.$

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log(x+1)-2$

d) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

e) Να βρεθούν τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

f) Να βρεθεί οα πραγματικός αριθμός κ, ώστε το σημείο $M\left(-\dfrac{9}{10},\kappa\right)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

g) Να λυθεί η ανίσωση $f(x)>-1.$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x$.

a) Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

b) Να λυθεί η εξίσωση $e^{x^3+x}-e^{2x}=x-x^3$.

c) Να λυθεί η ανίσωση $e^{x^2-1}+x^2>2$.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x-2^x+\frac{4}{3}$.

a) Δείξτε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

b) Να λυθεί η εξίσωση $3\cdot 2^x+4\cdot 3^x=3\cdot 6^x$.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x-x$, με $0<\alpha<1$.

a) Δείξτε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

b) Λύστε την ανίσωση $\alpha^{x^2+4}-\alpha^{5x-2}<x^2-5x+6$.

12. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

a) $f(x)=\sqrt{e^{2x}-(e+1)e^x+e}$

b) $g(x)=\sqrt{4^x-3\cdot 2^x+2}$

c) $h(x)=\sqrt{\dfrac{e^{x+2}-e^2}{e^x-1}}$

d) $t(x)=\sqrt{1-\ln(x-1)}$

e) $s(x)=\log\dfrac{x-2}{x(x-1)}$

13. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-5x^2+\alpha x+\beta$. Το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x+1$, ενώ διαιρούμενο με $x-2$ αφήνει υπόλοιπο -9.

a) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in \mathrm{R}$.

b) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)\geq 0$

c) Να λύσετε την εξίσωση $2\eta\mu^3x+5\sigma\upsilon\nu^2x=4\eta\mu\, x+2$.

d) Να γράψετε τη ταυτότητα της διαίρεσης του $P(x)$ *με το* $2x-5$.

14. Α. Να αποδείξετε το θεώρημα :

«Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-\rho$ είναι ίσο με τη τιμή του πολυωνύμου για $x=\rho$. Είναι δηλαδή $\upsilon = P(\rho)$.»

Β. Να γραφούν οι παρακάτω ορισμοί:

a) Ίσα πολυώνυμα.

b) Μηδενικό πολυώνυμο.

c) Βαθμός πολυωνύμου.

Γ. Αν $x_1, x_2, x > 0$ και $0 < \alpha \neq 1$, αποδείξτε ότι:

a) $\log_\alpha(x_1 \cdot x_2) = \log_\alpha x_1 + \log_\alpha x_2$.

b) $\log_\alpha x^k = k \log_\alpha x, k \in \mathbb{R}$.

Δ. Χαρακτηρίστε κάθε μία από τις επόμενες προτάσεις ως **Σωστές** ή **Λανθασμένες** και δικαιολογήστε την απάντησή σας.

a) Αν ένα πολυώνυμο είναι σταθερό, τότε είναι μηδενικού βαθμού.

b) Αν δύο πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι $3^{ου}$ βαθμού, τότε και το $P(x)+Q(x)$ είναι $3^{ου}$ βαθμού.

c) Το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x+\rho$, αν και μόνο αν $P(\rho)=0$.

d) Η εξίσωση $x^3+\alpha x^2+\beta x+3=0$, με $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$, δεν μπορεί να έχει ρίζα το 2.

e) Το πολυώνυμο $P(x)=(4x+5)^{2010}+x^{2009}$ έχει παράγοντα το $x+1$.

f) Αν $x_1, x_2 > 0$ και $0 < \alpha \neq 1$, τότε $\log_\alpha(x_1 \cdot x_2) = \log_\alpha x_1 \cdot \log_\alpha x_2$.

g) Αν $x_1, x_2 > 0$, τότε $\dfrac{\log x_1}{\log x_2} = \log \dfrac{x_1}{x_2}$.

h) Αν $x > 0$, τότε $\ln x^2 = 2\ln x$.

i) $\ln e^2 = 2$.

Ε. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση:

a) Αν το πολυώνυμο $P(x)=(\lambda^4-1)x^3+(\lambda-1)x+(\lambda^2-3\lambda+2)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο, τότε το λ είναι:

Α. -1   Β. 1   Γ. 1 ή -1   Δ. 1 ή 2

b) Αν τα πολυώνυμα $P(x)=x^3+\left(\alpha^2-1\right)x^2+\left(2\alpha-1\right)x-2$ και $Q(x)=x^3+x-2$ είναι ίσα, τότε ο α είναι:

Α. -1 Β. 1 Γ. 1 ή -1 Δ. καμία τιμή του α

c) Αν $3^{-x}>3$, τότε:

Α. $x>-1$ Β. $x<-1$ Γ. $x>1$ Δ. $x<1$

d) Αν $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}<1$, τότε:

Β. $x>3$ Β. $x<3$ Γ. $x>4$ Δ. $x<4$

ΣΤ. Στο σχήμα έχουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων: $f(x)=e^x$, $g(x)=e^{-x}$, $h(x)=\ln x$, $t(x)=\ln\frac{1}{x}$, $k(x)=-e^x$.Αντιστοιχίστε:

$C_f \rightarrow$……., $C_g \rightarrow$……., $C_h \rightarrow$……., $C_t \rightarrow$……., $C_k \rightarrow$…….