ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Θετικής - Τεχνολογικής κατεύθυνσης Γ. Λυκείου

1ο Επαναληπτικό Διαγώνισμα : (Διάρκεια 3 ώρες)

1ο Κεφ.(Μιγαδικοί αριθμοί)
2ο Κεφ.(Συναρτήσεις -όριο - συνέχεια συνάρτησης)
3ο Κεφ.(Διαφορικός Λογισμός, μέχρι και το ρυθμό μεταβολής.)

ΘΕΜΑ 1ο

Α) Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. (Μονάδες 10)

Β) Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες; (Μονάδες 5)

Γ) ***Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις σαν Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ)*:**

1) Αν η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f δεν είναι συνεχής στο x_0.
2) Αν η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.
3) Αν δεν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0, τότε, δεν μπορεί να υπάρχει το όριο της συνάρτησης $f+g$ στο x_0.
4) Αν υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$, τότε υπάρχει και το όριο της g στο x_0.
5) Αν $f(x)=x^x,\ \ x>0$, τότε $f'(x)=x\cdot x^{x-1}$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z=x+yi$ και $w=\dfrac{z-2i}{z+1}$, $z\neq -1$. (Ι)

1) Αν Α , Β και Μ είναι οι εικόνες των μιγαδικών -1 , $2i$ και z στο μιγαδικό επίπεδο αντιστοίχως , να αποδείξετε ότι $|w|=\dfrac{(MB)}{(MA)}$. (Μονάδες 8)

2) Αν $w=1+2i$, να βρείτε το μιγαδικό z. (Μονάδες 7)

3) Αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z=x+yi$ στο μιγαδικό επίπεδο κινείται στον κύκλο με κέντρο Α (-1, 0) και ακτίνα $\rho=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, να βρείτε την καμπύλη στην οποία ανήκουν οι εικόνες του μιγαδικού αριθμού w της σχέσης (Ι).

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x} & , \quad -1\le x<0 \\ \alpha^2\ln(x+e)+2\alpha+(\beta^2+\dfrac{1}{2})e^x & , \quad x\ge 0 \end{cases}$

όπου α, $\beta\in R$.

1) Να βρείτε τις τιμές των α και β ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0=0$. (Μονάδες 8)

2) Αν $\alpha=-1$ και $\beta=0$,

α) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{f(x)+1}{x+1}$. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον θετικό ημιάξονα Ox σε ένα τουλάχιστον σημείο. (Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left(xf(x)\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R, της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο Α(0,1).

Α) i) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2)-1}{x}$ (Μονάδες 4)

ii) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^2(2x)-1}{x}=4f'(0)$ (Μονάδες 4)

Β) Αν επιπλέον για την f ισχύει, $f^2(x)-4f(x)=x^2-3$ για κάθε $x\in R$, να βρείτε τον τύπο της. (Μονάδες 7)

Γ) Αν $f(x)=2-\sqrt{x^2+1}$, $x\in R$

i) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f, οι οποίες διέρχονται από το σημείο $\mathrm{B}\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$. (Μονάδες

ii) Έστω σημείο Μ της C_f με θετική τετμημένη . Αν η τετμημένη του Μ απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων Ο με ταχύτητα $2cm/\sec$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΑΜ.

(Μονάδες 4)

Καλή Επιτυχία