**ΔΙΗΜΕΡΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

# **Θέμα:** Εφαρμογές Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων Πρώτης Τάξης

**Χρυσή Γ. Κοκολογιαννάκη**

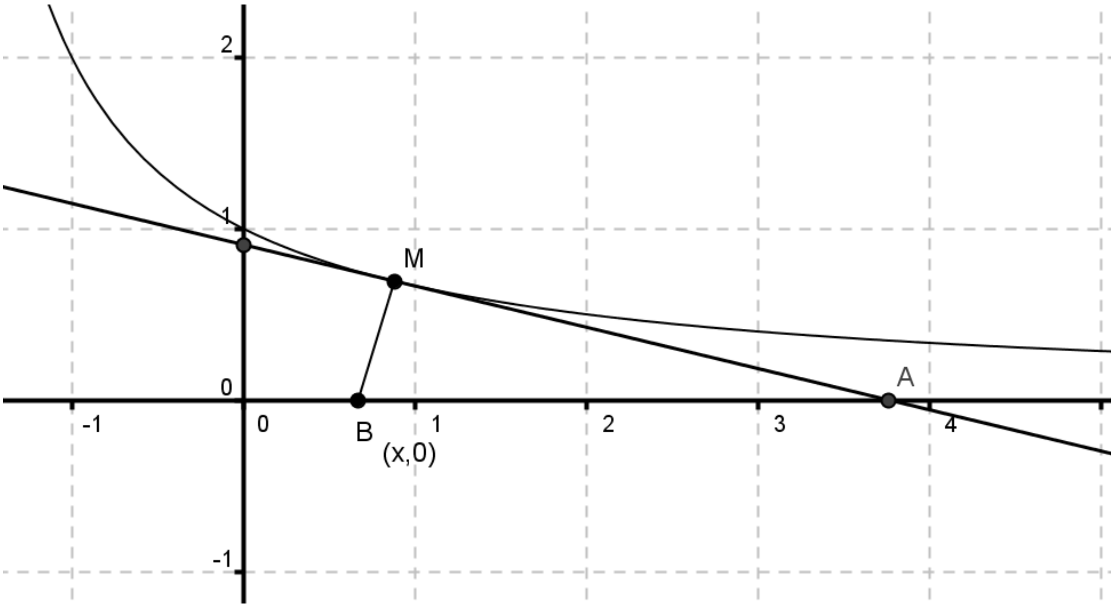
Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Τμήματος

Μαθηματικών Πανεπιστημίου Πατρών

**Ηράκλειο 7-8 Μαρτίου 2014**

**1) Να βρεθεί καμπύλη $y(x)$ (στο πρώτο τεταρτημόριο), η οποία έχει την ιδιότητα: να περνά από το σημείο $(0,1)$ και η εφαπτομένη της στο τυχαίο σημείο $M(x,y)$ να τέμνει τον άξονα $Ox$ στο σημείο $A$, τέτοιο ώστε το τρίγωνο $MAB$ με $B(x,0)$ να έχει σταθερό εμβαδόν 1.**

**Απάντηση**




$$y - y_A = y'(x - x_A) \Rightarrow y = y'(x - x_A)$$

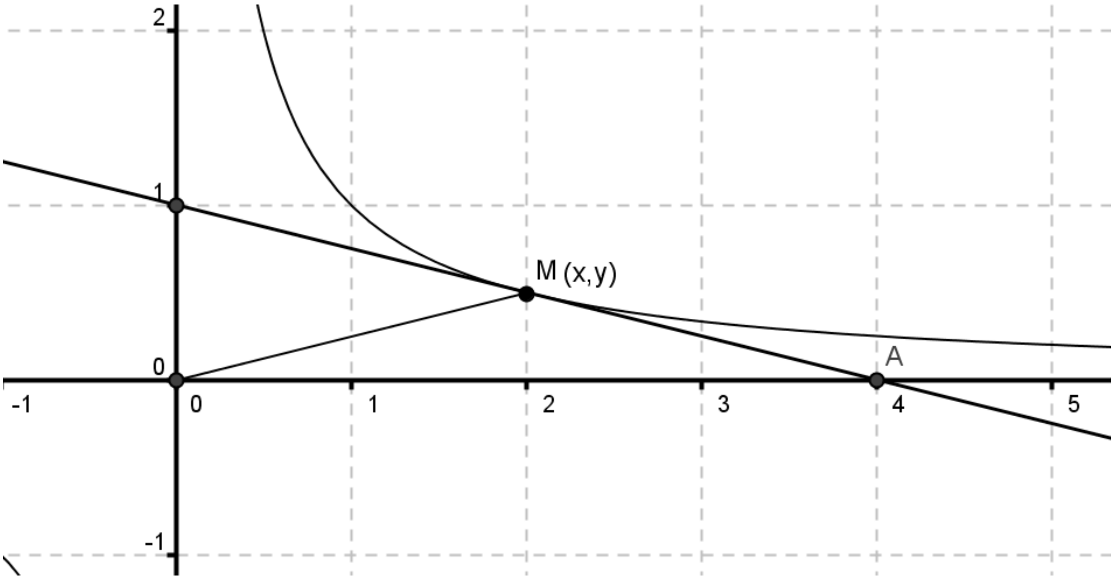
$$E = \frac{1}{2}\overline{MB}\,\overline{BA} \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} y(x_A - x)$$

$$y' = -\frac{y^2}{2} \Rightarrow \frac{y'}{y^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{y} = -\frac{x}{2} + c \Rightarrow y = \frac{2}{2c + x}$$

$y(0) = 1 \Rightarrow c = 1$, Οπότε: $y(x) = \dfrac{2}{2 + x}$

**2) Να βρεθεί καμπύλη $y(x)$ (στο πρώτο τεταρτημόριο), η οποία έχει την ιδιότητα: να περνά από το σημείο $(1,1)$ και η εφαπτομένη της στο τυχαίο σημείο $M(x,y)$ να τέμνει τον άξονα $Ox$ στο σημείο $A$, έτσι ώστε το τρίγωνο $OMA$ να είναι ισοσκελές ($\overline{OM} = \overline{MA}$).**

**Απάντηση**




$$y - y_A = y'(x - x_A) \;\Rightarrow\; y = y'(x - x_A)$$

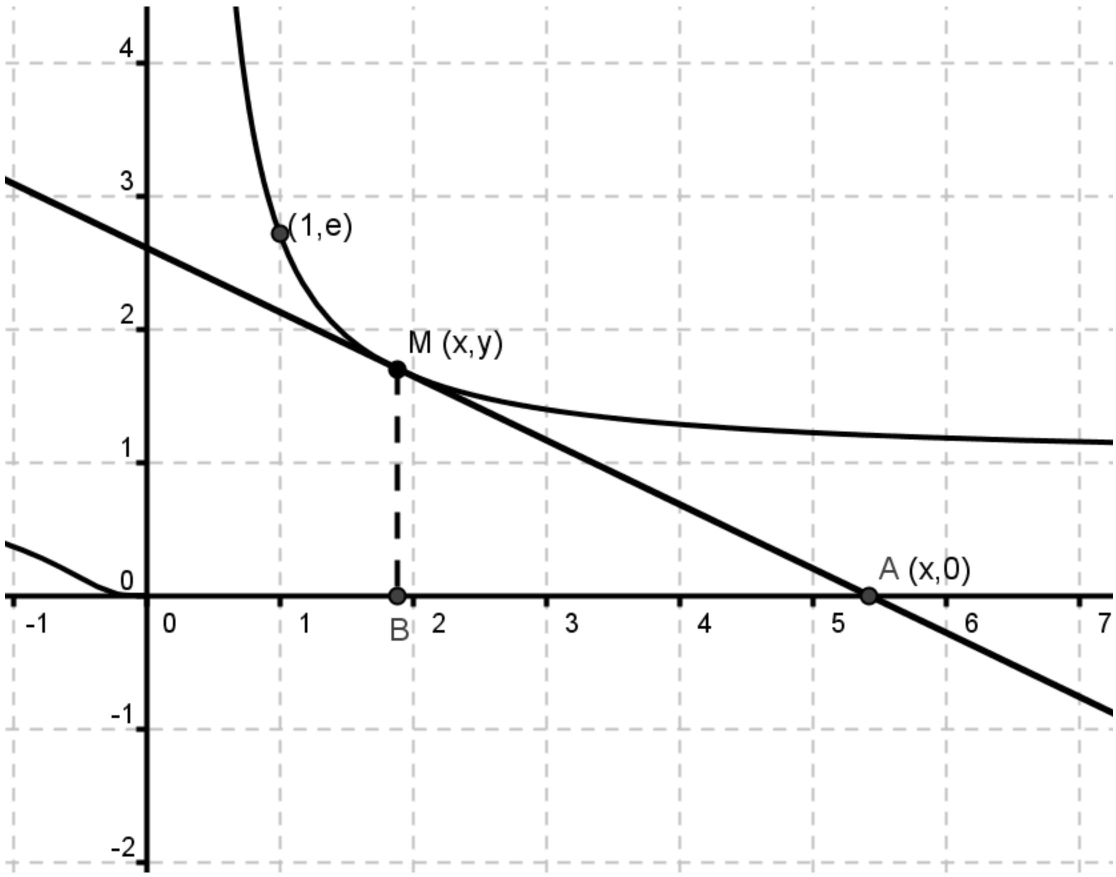
$$\overline{OM} = \overline{MA} \;\Rightarrow\; \overline{OB} = \overline{BA} \;\Rightarrow\; x_A = 2x$$

$$y = y'(-x) \;\Rightarrow\; \frac{y'}{y} = -\frac{1}{x} \Rightarrow \ln y = -\ln x + c \;\Rightarrow\; y = \frac{c}{x}$$

$y(1) = 1 \;\Rightarrow\; c = 1$, Οπότε: $y(x) = \dfrac{1}{x}$

**3) Να βρεθεί καμπύλη $y(x)$ (στο πρώτο τεταρτημόριο), η οποία περνά από το σημείο $(1, e)$ και η εφαπτομένη της στο τυχαίο σημείο $M(x, y)$ να τέμνει τον άξονα $Ox$ στο σημείο $A$ και η κάθετος από το $M$ στον $Ox$ είναι η $MB$, να ισχύει: το μήκος $AB$ να είναι ανάλογο με το τετράγωνο της τετμημένης του σημείου επαφής.**

**Απάντηση**




$$y - y_A = y'(x - x_A) \Rightarrow y = y'(x - x_A)$$

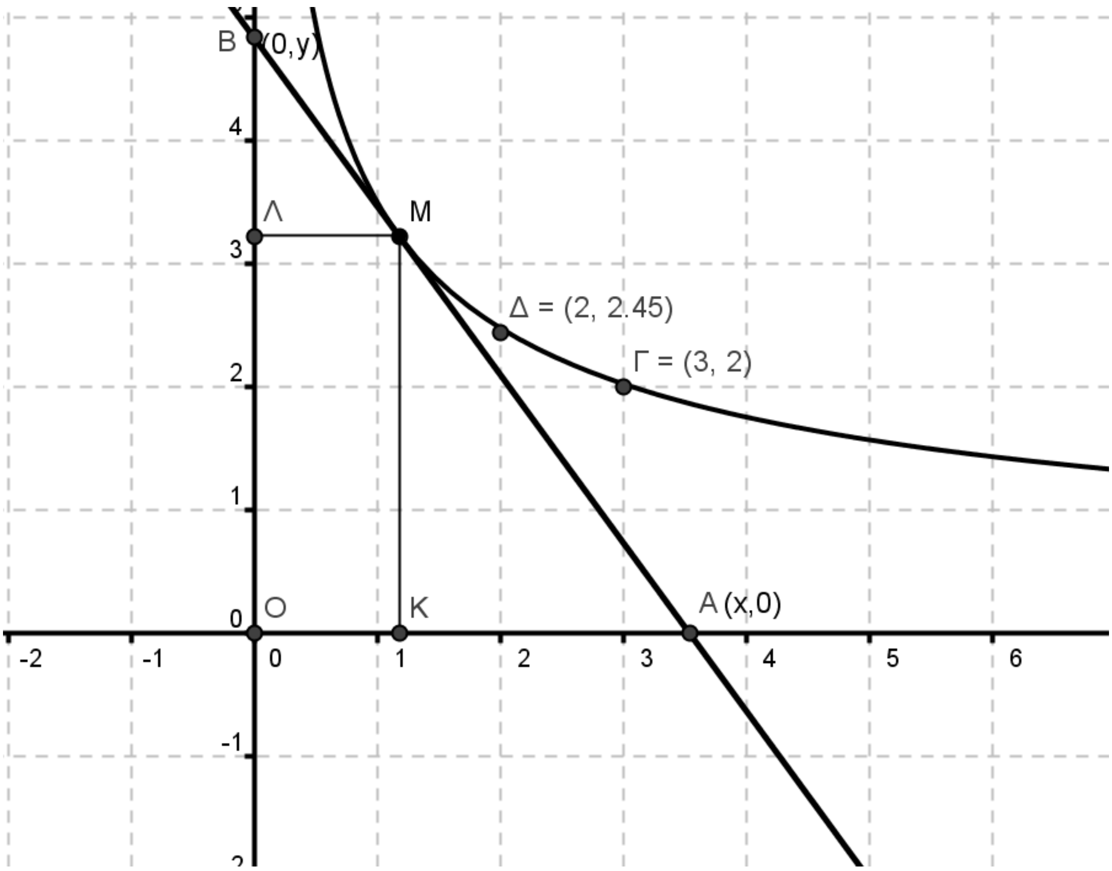
$$\overline{AB} = kx^2 \Rightarrow x_A - x = kx^2$$

$$y = -y'kx^2 \Rightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{1}{kx^2} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{kx} + c \Rightarrow y = ce^{\frac{1}{kx}}$$

$y(1) = e \Rightarrow c = e^{1-\frac{1}{k}}$**,** Οπότε: $y(x) = e^{1-\frac{1}{k}+\frac{1}{kx}}$

**4)Να βρεθεί καμπύλη $y(x)$ (στο πρώτο τεταρτημόριο), η οποία περνά από τα σημεία $(3,2)$ και $(2,\sqrt{6})$ και αν η εφαπτομένη της στο τυχαίο σημείο $M(x,y)$ να τέμνει τον άξονα $Ox$ στο σημείο $A$ και τον άξονα $Oy$ στο σημείο $B$, ο λόγος των μηκών $\frac{MB}{MA}$ να είναι σταθερός.**

**Απάντηση**




$$y-y_A=y'(x-x_A)\Rightarrow y=y'(x-x_A)$$

$$y-y_B=y'(x-x_B)\Rightarrow y-y_B=y'x$$

$$\overline{MB}=\sqrt{(\overline{B\Lambda})^2+(\overline{\Lambda M})^2}\;\Rightarrow\;\overline{MB}=\sqrt{(y_B-y)^2+x^2}$$

$$\overline{MA}=\sqrt{(\overline{AK})^2+(\overline{KM})^2}\;\Rightarrow\;\overline{MA}=\sqrt{(x_A-x)^2+y^2}$$

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MA}}=a\Rightarrow\frac{(y_B-y)^2+x^2}{(x_A-x)^2+y^2}=a^2\;\Rightarrow\;\frac{(y'x)^2+x^2}{\left(\dfrac{y}{y'}\right)^2+y^2}=a^2$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{a}{x}\;\Rightarrow\;\ln y=a\ln x+c\Rightarrow\;y=cx^a$$

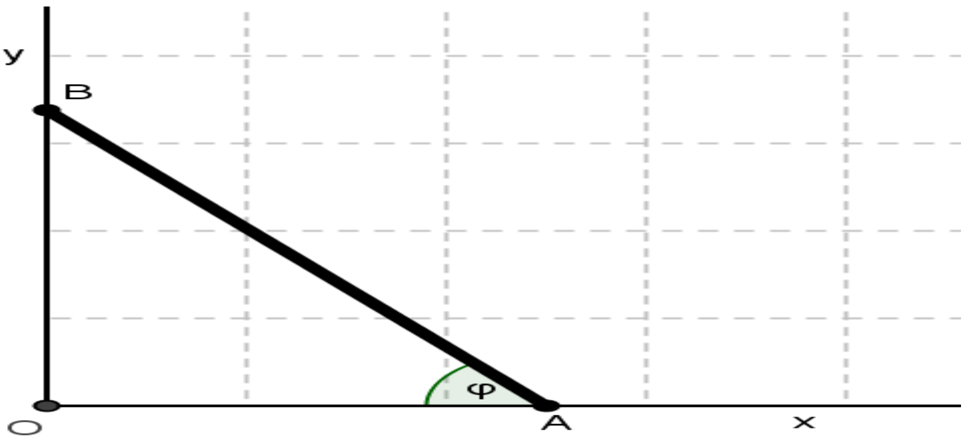
$$y(3)=2\Rightarrow 2=c3^a\text{ ,}\quad y(2)=\sqrt{6}\Rightarrow\sqrt{6}=c2^a$$

Οπότε: $a=-\dfrac{1}{2}$ και $y(x)=cx^{-1/2}$

**5)Τα άκρα $A$ και $B$ μιας ράβδου $AB$ σταθερού μήκους $l$ ολισθαί-νουν στους κάθετους ημιάξονες $Ox$ και $Oy$ αντίστοιχα έτσι ώστε, κάθε χρονική στιγμή $t$, η οξεία γωνία στο $A$ να μειώνεται με ρυθμό ανάλογο της οξείας γωνίας στο $B$, με συντελεστή αναλο-γίας $k>0$. Αν σε χρόνο**

$t=0$ **το τρίγωνο ήταν ισοσκελές, να βρεθούν οι γωνίες** $A$ **και** $B$ **ως συναρτήσεις του χρόνου. Σε πόσο χρόνο το εμβαδόν του τριγώνου υποδιπλασιάζεται;**

**Απάντηση**




$$\varphi(t)=O\hat{A}B,\quad O\hat{B}A=\frac{\pi}{2}-\varphi$$

$$\varphi'(t)=-k\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right),\quad \varphi(0)=\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\varphi'}{\frac{\pi}{2}-\varphi}=-k\Rightarrow -\ln\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=-kt+c\Rightarrow \varphi(t)=\frac{\pi}{2}-ce^{kt}$$

$$\varphi(0)=\frac{\pi}{4},\quad c=\frac{\pi}{4},\quad \varphi(t)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}e^{kt}$$

$$E(0)=\frac{1}{2}\overline{OA}\,\overline{OB}\Rightarrow E(0)=\frac{1}{2}(\overline{OA})^2\Rightarrow E(0)=\frac{l^2}{4}$$

$$E(t)=\frac{E(0)}{2}\Rightarrow E(t)=\frac{l^2}{8}$$

$$E(t)=\frac{1}{2}l\sin\varphi l\cos\varphi=\frac{l^2}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}e^{kt}\right)$$

$$\frac{1}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}e^{kt}\right)\Rightarrow \sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}e^{kt}\right)$$

$$\frac{5\pi}{6}=\frac{\pi}{2}e^{kt}\Rightarrow kt=\ln\left(\frac{5}{3}\right)\Rightarrow t=\frac{1}{k}\ln\left(\frac{5}{3}\right).$$

**6) Εστω ότι βρισκόμαστε σε ένα δωμάτιο όγκου $1200m^3$, που περιέχεται αέρας χωρίς $CO_2$ (διοξείδιο του άνθρακα. Τη χρονική στιγμή $t=0$ εισέρχεται στο δωμάτιο καπνός τσιγάρων με ρυθμό $0,1\frac{m^3}{\min}$, που περιέχει $0,04m^3$ $CO_2$. Ο αέρας αναμιγνύεται καλά με το $CO_2$ και το μίγμα εξέρχεται με τον ίδιο ρυθμό. Να βρεθεί η ποσότητα του $CO_2$ που υπάρχει στο δωμάτιο κάθε χρονική στιγμή. Δεδομένου ότι η εκτεταμένη έκθεση σε ένα μίγμα αέρα και $CO_2$ με περιεκτικότητα σε $CO_2$ $0,00012m^3$ έχει βλαβερές συνέπειες για τον ανθρώπινο οργανισμό, να βρεθεί ο χρόνος που χρειάζεται ώστε η ποσότητα του $CO_2$ στο παραπάνω δωμάτιο να φτάσει τα $0,00012m^3$.**

**Απάντηση**

Έδώ έχουμε ένα φαινόμενο μίξης. Δηλαδή στο δωμάτιο που υπάρχει καθαρός αέρας εισέρχεται $CO_2$, αναμιγνύεται καλά με τον καθαρό αέρα και εξέρχεται. Ζητάμε, στην ουσία, την ποσότητα του $CO_2$ που υπάρχει στο δωμάτιο κάθε χρονική στιγμή t. Επειδή δεχόμαστε ότι *«Η ταχύτητα μεταβολής* $\frac{dy}{dt}$ *της ποσότητας* $y(t)$ *της ουσίας στον κλειστό χώρο τη χρονική στιγμή t είναι η διαφορά του ρυθμού εισόδου και του ρυθμού εξόδου από τον κλειστό χώρο»,* θα έχουμε, αν $y(t)$ είναι η ποσότητα του $CO_2$ στο δωμάτιο τη χρονική στιγμή t:

$\frac{dy}{dt}$=( ρυθμός εισόδου)-(ρυθμός εξόδου), και:

(ρυθμός εισόδου)=(συγκέντρωση που εισέρχεται).(ταχύτητα εισαγωγής)

(ρυθμός εξόδου)=(συγκέντρωση που εξέρχεται).(ταχύτητα εξαγωγής)

Άρα: $\frac{dy}{dt}=\frac{0,04}{12000}-\frac{y(t)}{12000}\Rightarrow\frac{y'}{0,04-y}=\frac{1}{12000}\Rightarrow$

$$\Rightarrow -\ln\left|0,04-y\right|=\frac{1}{12000}t+c\Rightarrow y=0,04-ce^{-\frac{t}{12000}}$$

Επειδή ο αέρας είναι αρχικά καθαρός, έχουμε την αρχική συνθήκη: $y(0)=0$, άρα $0=0,04-c\Rightarrow c=0,04$.

Τελικά: $y(t)=0,04-0,04e^{-\frac{t}{12000}}$.

Θέλουμε να βρούμε το t ώστε: $y(t)=0,00012$, που είναι το κρίσιμο σημείο για το $CO_2$.

Άρα: $0,00012=0,04-0,04e^{-\frac{t}{12000}}\Rightarrow 0,04e^{-\frac{t}{12000}}=0,03988\Rightarrow$

$$\Rightarrow e^{-\frac{t}{12000}}=0,997\Rightarrow -\frac{t}{12000}=\ln(0,997)\Rightarrow t\simeq 36.$$

Άρα θα χρειαστούν 36 λεπτά περίπου, ώστε να φτάσει η συγκέντρωση του $CO_2$ στα $0,00012m^3$.

**7)Ο ρυθμός με τον οποίο ένα σφαιρικό ομογενές κομμάτι ναφθαλίνης μεταπίπτει από την στερεά στην αέρια κατάσταση (εξαχνώνεται) είναι ανάλογος της επιφάνειάς της. Εστω αρχικά, ότι η ναφθαλίνη έχει ακτίνα $0,5cm$ και ότι μετά από 3 μήνες, η ακτίνα της έχει γίνει $0,35cm$. Να εκφράσετε την ακτίνα της ναφθαλίνης σαν συνάρτηση του χρόνου και να υπολογίσετε πότε θα εξαχνωθεί εντελώς η ναφθαλίνη.**

**Απάντηση**

Κατ΄αρχήν, θα πρέπει να εκφράσουμε την ακτίνα της ναφθαλίνης σαν συνάρτηση του χρόνου t (σε μήνες). Έστω $r(t)$, η ακτίνα. Γνωρίζουμε ότι είναι σφαίρα (σφαιρικό κομμάτι) και ότι ο ρυθμός με τον οποίο εξαχνούται η ναφθαλίνη (δηλ. ο ρυθμός μεταβολής του όγκου της) είναι ανάλογος της επιφάνειάς της.

Ο όγκος $V(t)$ και η επιφάνεια $S(t)$ της σφαίρας είναι αντίστοιχα:

$V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t)$ και $S(t) = 4\pi r^2(t)$ και

$V'(t) = \frac{dV(t)}{dt} = \frac{4}{3}\pi 3r^2(t)r'(t) = 4\pi r^2(t)r'(t)$,

Προκύπτει η ΣΔΕ: $4\pi r^2(t)r'(t) = k4\pi r^2(t) \Rightarrow r'(t) = k, \quad (k > 0)$

$\Rightarrow r(t) = kt + c$,

όμως $r(0) = 0,5$ και $r(3) = 0,35$, οπότε $c = 0,5$ και $k = -0,05$. Δηλαδή $r(t) = -0,05t + 0,5$. Όταν θα εξαχνωθεί πλήρως, σημαίνει $r(t) = 0$.

Άρα: $-0,05t + 0,5 = 0 \Rightarrow 0,05t = 0,5 \Rightarrow t = 10\, \mu\acute{\eta}\nu\varepsilon\varsigma$

**8)Ο ρυθμός διάσπασης ενός ραδιενεργού υλικού την χρονική στιγμή $t$ είναι ανάλογος της υπάρχουσας ποσότητάς του την χρονική στιγμή αυτή. Αν ο χρόνος υποδιπλασιασμού του είναι 2000 χρόνια, να βρείτε το ποσοστό της διάσπασής του σε 200 χρόνια.**

**Απάντηση**

$$y'(t) = -ky(t), \qquad y(0) = y_0$$

$$\frac{y'}{y} = -k \Rightarrow y(t) = ce^{-kt}, \qquad c = y_0$$

$$y(t) = y_0 e^{-kt}$$

$$\frac{y_0}{2} = y_0 e^{-2000k} \Rightarrow -\ln 2 = -2000k \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{2000}$$

$$y(t) = y_0 e^{-\frac{\ln 2}{2000}t}$$

$$y(200)=y_0e^{-\frac{\ln 2}{2000}200}\Rightarrow y(200)=y_0e^{-\frac{\ln 2}{10}}\Rightarrow y(200)=y_0 2^{-10}$$

**9)Σε μια αρχαιολογική έρευνα, οι επιστήμονες βρήκαν κοντά σε ένα απολιθωμένο ανθρώπινο οστό ένα αρχαίο εργαλείο. Αν το εργαλείο και το απολίθωμα περιέχουν 65% και 60% της αρχικής ποσότητας του $^{14}C$, αντίστοιχα, να προσδιοριστεί, αν είναι δυνατόν το εργαλείο να είχε χρησιμοποιηθεί από αυτόν τον άνθρωπο. (Ο χρόνος υποδιπλασιασμού του $^{14}C$ είναι 5600 χρόνια).**

**Απάντηση**

Αν $y(t)$ είναι η ποσότητα του $^{14}C$ την χρονική στιγμή t,τότε:

$y'(t)=-ky(t)$, ( k>0).

Άρα: $\frac{y'}{y}=-k\Rightarrow \ln|y|=-kt+c\Rightarrow y=ce^{-kt}$ (1) , όμως έστω $y_0=y(0)$,

οπότε: $c=y_0$

Άρα η (1) γίνεται

$$\left.\begin{aligned} & y(t)=y_0e^{-kt} \\ & \text{Επειδή } y(5600)=\frac{y_0}{2} \end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{y_0}{2}=y_0e^{-5600k}\Rightarrow e^{-k}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5600}}$$

Άρα τελικά: $y(t)=y_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5600}}$ (*)

Αφού η ποσότητα του $^{14}C$ που βρέθηκε είναι το 65% της αρχικής ποσότητας, η ηλικία του εργαλείου θα βρεθεί από την :

$$y(t)=0,65y_0\overset{(*)}{\Rightarrow} y_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5600}}=0,65y_0\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5600}}=0,65\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{t}{5600}\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\ln(0,65)\Rightarrow t=\frac{5600\cdot\ln(0,65)}{\ln(0,5)}$$ χρόνια.

Δηλ. η ηλικία του εργαλείου θα είναι περίπου 3489 χρόνια. Ομοίως για το

οστό: $y(t)=0,60y_0 \overset{(*)}{\Rightarrow} y_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5600}}=0,60y_0 \Rightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5600}}=0,60 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{t}{5600}\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\left(0,60\right) \Rightarrow t=\frac{5600\cdot\ln\left(0,6\right)}{\ln\left(0,5\right)}$$ χρόνια.

Δηλ. η ηλικία του οστού θα είναι περίπου 4139 χρόνια , άρα το εργαλείο είναι μεταγενέστερο, άρα δεν είχε χρησιμοποιηθεί από τον άνθρωπο αυτόν.

**10)Μια μέρα είχαμε λίγο χρόνο ελεύθερο με τον Κώστα και φτιάξαμε ένα τσάι να πιούμε. Το φλυτζάνι είχε θερμοκρασία 100$^o$ C και μετα από 5' είχε 90$^o$ C και επειδή ήταν ακόμα καυτό, μου λέει ο Κώστας: «να το βάλουμε 5' ακόμα στο ψυγείο (θερμοκρασίας 15$^o$ C) και μετά να το πιούμε». Εγώ του λέω: «να το αφήσουμε 10' ακόμα στο δωμάτιο (σταθερής θερμοκρασίας 25$^o$ C) και μετά να το πιούμε». Ποιός ήπιε το τσάι πιο ζεστό?**

**Απάντηση:**

Καταρχάς , θα λάβουμε υπ΄όψιν μας ότι η μεταβολή της θερμοκρασίας ενός σώματος υπόκειται στο νόμο ψύξης του Newton: *«ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας $T(t)$ ενός σώματος, που βρίσκεται σε ένα μέσο σταθερής θερμοκρασίας, $T_\mu$ είναι ανάλογος της διαφοράς της θερμοκρασίας του σώματος και της θερμοκρασίας του μέσου»*, δηλαδή:

$\dfrac{dT(t)}{dt}=T'(t)=-k\left(T(t)-T_\mu\right)$ (*), $k>0$ $\textit{σταθερά}$ (που εξαρτάται από το σώμα, δηλ. το υλικό του, το εμβαδόν της επιφανείας του κλπ).

Η (*) είναι μία ΣΔΕ 1$^{ης}$ τάξης χωριζόμενων μεταβλητών:

$\dfrac{T'(t)}{T(t)-T_\mu}=-k$ , εδώ έχουμε $T_\mu=25^0$ και επίσης $T(0)=100^0$

Άρα:

$$\frac{T'(t)}{T(t)-T_\mu}=-k\Rightarrow \ln\left|T(t)-25^0\right|=-kt+c\Rightarrow \left.\begin{array}{c}T(t)=25^0+ce^{-kt}\\ T(0)=100^0\end{array}\right\}\Rightarrow c=75^0$$

Άρα: $T(t)=25^0+75^0e^{-kt}$ (1)

Επειδή $T(5)=90^0$, έχουμε από την (1):

$$90^0=25^0+75^0e^{-k5}\Rightarrow e^{-k}=\left(\frac{65^0}{75^0}\right)^{\frac{1}{5}} \text{ και } T(t)=25^0+75^0\left(\frac{65^0}{75^0}\right)^{\frac{t}{5}} \quad (2)$$

Άρα μετά από 10΄δηλ. Τ(15) θα είναι η θερμοκρασία του τσαγιού του δικού μου, οπότε: $(2)\Rightarrow T(15)=25^0+75^0\left(\frac{65^0}{75^0}\right)^3\Rightarrow T(15)=73{,}82^0$

Για να βρούμε τη θερμοκρασία του τσαγιού του Κώστα, θα λύσουμε:

$$\left.\begin{array}{c}T'(t)=-k\left(T(t)-15^0\right)\\ T(0)=90^0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{c}\dfrac{T'(t)}{T(t)-15^0}=-k\\ T(0)=90^0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{c}\ln\left(T(t)-15^0\right)=-kt+c\\ T(0)=90^0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c}T(t)=15^0+ce^{-kt}\\ T(0)=90^0\end{array}\right\}\Rightarrow c=75^0$$

Άρα: $$\left.\begin{array}{c}T(t)=15^0+75^0e^{-kt}\\ e^{-k}=\left(\dfrac{65^0}{75^0}\right)^{\frac{1}{5}}\end{array}\right\}\Rightarrow T(t)=15^0+75^0\left(\frac{65^0}{75^0}\right)^{\frac{t}{5}}$$

Ζητάμε το $T(5)$ , οπότε: $T(5)=15^0+75^0\frac{65^0}{75^0}\Rightarrow T(5)=80^0$.

Τελικά ο Κώστας θα πιεί πιο ζεστό το τσάι του.

**11)Μια μέρα άρχισε να χιονίζει νωρίς το πρωΐ και το χιόνι συνέχισε να πέφτει με σταθερό ρυθμό . Ένα εκχιονιστικό μηχάνημα ξεκίνησε στις 11π.μ. να καθαρίσει ένα δρόμο. Υποθέτουμε ότι ο όγκος του χιονιού που εισέρχεται στο εκχιονιστικό μηχάνημα ισούται με τον όγκο του χιονιού που εκτοξεύεται από το μηχάνημα. Επίσης υποθέτουμε ότι το εκχιονιστικό μηχάνημα καθαρίζει το δρόμο με σταθερό ρυθμό R. Μέχρι τις 2μ.μ. το μηχάνημα καθάρισε 4 χλμ. Του δρόμου. Επίσης μέχρι τις 5μ.μ. καθάρισε άλλα 2 χλμ. Πότε άρχισε να χιονίζει?**

**Απάντηση**

Έστω $y(t)$ μία συνάρτηση που εκφράζει το δρόμο που έχει διανύσει το εκχιονιστικό σαν συνάρτηση του χρόνου, W το πλάτος του δρόμου και h το ύψος του χιονιού. Αν το μηχάνημα διανύει $\Delta_y$ μέτρα σε Δt ώρες, τότε μαζεύει χιόνι με όγκο ίσο με $h.W.\Delta_y$ και εκτοξεύει RΔt όγκο χιονιού.

Άρα από την υπόθεση:

$$hW\Delta_y = R\Delta t \Rightarrow \frac{\Delta_y}{\Delta t} = \frac{R}{hW} \overset{\lambda=\frac{R}{W}=ct}{\Rightarrow} \frac{\Delta_y}{\Delta t} = \frac{\lambda}{h(t)} \underset{\Delta t\to 0}{\Rightarrow} \frac{dy}{dt} = \frac{\lambda}{h(t)} \ (1)$$

Το ύψος του χιονιού εξαρτάται από το χρόνο και μάλιστα είναι ανάλογο του χρόνου που άρχισε να χιονίζει $t_a$ καθώς και της διάρκειας $t$ που χιονίζει, δηλ. $h(t) = k\left(t_a + t\right)$ (2) , $k =$σταθερά αναλογίας.

Οπότε: $(1)\overset{(2)}{\Rightarrow}\frac{dy}{dt} = \frac{\lambda}{k(t_a + t)}$ (3) που είναι Χ.Μ. Η λύση της:

$$dy = \frac{\lambda}{k}\frac{dt}{t_a + t} \ \Rightarrow dy = \frac{\lambda}{k}\ln\left[t_a + t\right] + c_1 \quad (4)$$

Για $t = 0$, θεωρούμε ότι αντιστοιχεί στο 11π.μ

Άρα έχουμε από τα δεδομένα: $y(0) = 0$ , $y(3) = 4 \quad \kappa\alpha\iota \ y(6) = 6$

$$(4) \overset{y(0)=0}{\Rightarrow} c_1 = -\frac{\lambda}{k}\ln t_a \quad (5)$$

Οπότε η $(4)\overset{(5)}{\Rightarrow} y(t)=\frac{\lambda}{k}\ln\left[t_a+t\right]-\frac{\lambda}{k}\ln t_a \Rightarrow y(t)=\frac{\lambda}{k}\ln\frac{t_a+t}{t_a}$ (6)

Η (6) λόγω των άλλων συνθηκών γίνεται: $y(3)=\frac{\lambda}{k}\ln\frac{t_a+3}{t_a}=4$ και

$y(6)=\frac{\lambda}{k}\ln\frac{t_a+6}{t_a}=6$ . Διαιρώντας κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{\ln\frac{t_a+3}{t_a}}{\ln\frac{t_a+6}{t_a}}=\frac{4}{6} \Rightarrow \ln\left[\frac{t_a+3}{t_a}\right]^3=\ln\left[\frac{t_a+6}{t_a}\right]^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{\left(t_a+3\right)^3}{t_a^3}=\frac{\left(t_a+6\right)^2}{t_a^2} \Rightarrow t_a^2+3t_a-9=0$, οπότε $t_a=\frac{-3\pm 3\sqrt{5}}{2}$

Επειδή $3\sqrt{5}>3$ και $t_a$ πρέπει να είναι αρνητικό (άρχισε να χιονίζει πριν $t=11$π.μ)

$t_a=\frac{-3-3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow t_a=-4{,}85h=-291'$. Άρα αν από τις $11\pi.\mu=660'$ αφαιρέσουμε τα 291΄ βρίσκουμε: 660΄-291΄=369΄:60΄=6.15h

Άρα άρχισε να χιονίζει περίπου στις 06:15΄π.μ το πρωί .

**Βιβλιογραφία**


1) B.J. Rice and J.D. Strange, Ordinary Differential Equations with Applications, Brooks/Cole Publishing Company, Pacific Grove, California (1994).

2) N.Finizio and G.Ladas, Ordinary Differrential Equations with Modern Applications, Wadsworth Publishing Company Inc. Belmont, California.

3) Π.Σιαφαρίκας, Εφαρμογές των Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων, Τόμος Ι, Πάτρα,( 2002).