ΗΜΕΡΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Θέμα: «Μια αναλυτική προσέγγιση τριγωνομετρικών συναρτήσεων»

Εισηγητής: Κων/νος Λ. Κωνσταντόπουλος
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

Εδώ θα ασχοληθούμε με τις συναρτήσεις ημx και συνx, αποδεικνύοντας τις περισσότερες ιδιότητές τους από την εξίσωση της απλής αρμονικής κίνησης ($y''(x)+y(x)=0$) και χωρίς την εισαγωγή των άπειρων σειρών.

Κάποιες, ελάχιστες ιδιότητες των γραμμικών δ.ε που χρησιμοποιούμε, είναι απλές, αλλά θα τις αναφέρουμε:

I) Η $y''(x)+y(x)=0(1)$ (είναι μία γραμμική δ.ε $2^{ης}$ τάξης ομογενής με σταθερούς συντελεστές).

Λύση αυτής είναι μία συνάρτηση συνεχής που υπάρχει τουλάχιστον και η $2^{η}$ παράγωγος αυτής και είναι επίσης συνεχής συνάρτηση και αν αντικαταστήσουμε στο α΄ μέλος θα κάνει μηδέν.

II) Από το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας της λύσης μιας δ.ε που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες: $y(x_0)=\alpha$ και $y'(x_0)=\beta$ (2), το πρόβλημα (1)&(2) έχει μοναδική λύση.

Γεωμετρικά, σημαίνει ότι υπάρχει μία και μόνο καμπύλη που περνά από το (x_0,α) και έχει κλίση β στο σημείο αυτό, η εξίσωση της οποίας ικανοποιεί την (1).

III) Δύο συναρτήσεις λέγονται γραμμικώς ανεξάρτητες αν $\exists \kappa,\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\kappa y_1(x)+\lambda y_2(x)=0 \Rightarrow \kappa=\lambda=0$.

IV) Αν $y_1(x)$ και $y_2(x)$ είναι 2 γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της (1), τότε κάθε άλλη λύση αυτής $y(x)$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $y_1(x)$ και $y_2(x)$, δηλαδή: $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$.

➢ Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x)$ (αντίστοιχα $g(x)$) ως λύση του προβλήματος αρχικών τιμών:

$$y'' + y = 0 \qquad (1)$$

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1 \qquad (2)$$

(αντίστοιχα $g(0) = 1, \quad g'(0) = 0$) $\qquad (3)$

1. Δείξτε ότι οι $f(x)$ και $g(x)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

2. Να δεχθούν οι ακόλουθες σχέσεις:

I. $f'(x) = g(x)$ και $g'(x) = -f(x)$.

II. $f^2(x) + g^2(x) = 1$.

III. $f(x+\alpha) = f(x)g(\alpha) + f(\alpha)g(x)$, $\alpha =$αυθαίρετη σταθερά

IV. $g(x+\alpha) = g(x)g(\alpha) - f(x)f(\alpha)$, $\alpha =$αυθαίρετη σταθερά

V. $f(-x) = -f(x)$ και $g(-x) = g(x)$.

VI. Να βρεθεί συνάρτηση $h(x)$ με την ιδιότητα $h'(x) = h(-x)$

❖ **Δείξτε ότι οι $f(x)$ και $g(x)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.**

Απόδειξη

1. Έστω ότι υπάρχουν σταθερές κ, λ τέτοιες ώστε

$$\kappa f(x)+\lambda g(x)=0 \qquad (4)$$

Θα δείξουμε ότι $\kappa=\lambda=0$.

Παραγωγίζοντας τη σχέση (4) ως προς x έχουμε;

$$\kappa f'(x)+\lambda g'(x)=0 \qquad (5)$$

Οι σχέσεις (4) και (5) ισχύουν για κάθε x. Άρα θα ισχύουν και για x=0.

Συνεπώς θα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\kappa f(0)+\lambda g(0)=0\\ \kappa f'(0)+\lambda g'(0)=0\end{array}\right\}\overset{(2)}{\underset{(3)}{\Rightarrow}}\left.\begin{array}{l}\kappa\cdot 0+\lambda\cdot 1=0\\ \kappa\cdot 1+\lambda\cdot 0=0\end{array}\right\}\Rightarrow.$$

$$\Rightarrow \lambda=0,\ \kappa=0$$

Άρα οι $f(x)$ και $g(x)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

- $f'(x)=g(x)$ **και** $g'(x)=-f(x)$.

2.

I$_{\alpha}$. Απόδειξη της $f'(x)=g(x)$,

Αφού η $f(x)$ είναι λύση της (1) θα ισχύει:

$f''(x)+f(x)=0$ και παραγωγίζοντας αυτή ως προς x έχουμε $f'''(x)+f'(x)=0$.

Αν θέσουμε όπου $f'(x)=y(x)$, τότε θα έχουμε:

$y''(x)+y(x)=0$. Όμως είναι:
$y(0)=f'(0)=1=\mathbf{g(0)}$,

$y'(x)=f''(x)$ και άρα:
$y'(0)=f''(0)=-f(0)=0=\mathbf{g'(0)}$.

Δηλαδή η $y(x)\left[=\mathbf{g(x)}\right]=f'(x)$ είναι λύση του

προβλήματος αρχικών τιμών που συνιστάται από τις

(1) και (3).Όμως αυτή η λύση είναι μοναδική και κατά συνέπεια θα είναι $f'(x)=g(x)\left(=y(x)\right)$.

I_β. Απόδειξη της $g'(x) = -f(x)$.

Αποδείξαμε ότι $f'(x) = g(x)$, παραγωγίζοντας θα έχουμε: $f''(x) = g'(x)$ (*), όμως από την (1) ισχύει για την f ότι:

$$f''(x) + f(x) = 0 \Rightarrow f''(x) = -f(x) \overset{(*)}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow g'(x) = -f(x)$$

- $f^2(x)+g^2(x)=1.$

II. Απόδειξη της $f^2(x)+g^2(x)=1.$

Αφού η $g(x)$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης (1) θα ισχύει:

$$g''(x)+g(x)=0.$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης με $g'(x)$ παίρνουμε: $g'(x)g''(x)+g'(x)g(x)=0.$

Αυτή τώρα η σχέση με ολοκλήρωση κατά μέλη μας δίνει:

$$\int g'(x)g''(x)dx+\int g'(x)g(x)dx=ct \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[g'(x)\right]^2+\frac{1}{2}\left[g(x)\right]^2=ct$$

Όμως στο δεύτερο ερώτημα δείξαμε ότι $g'(x)=-f(x)$, οπότε η παραπάνω σχέση τελικά γίνεται:

$$\left[f(x)\right]^2+\left[g(x)\right]^2=ct=b$$

Αυτή η σχέση αφού ισχύει για κάθε x θα ισχύει και για x=0. Συνεπώς θα έχουμε:

$\left[f(0)\right]^2+\left[g(0)\right]^2=b \Rightarrow b=1.$ Έτσι τελικά θα έχουμε:

$$\left[f(x)\right]^2+\left[g(x)\right]^2=1.$$

- $f(x+\alpha) = f(x)g(\alpha) + f(\alpha)g(x)$,
  $\alpha =$αυθαίρετη σταθερά

III. Απόδειξη της $f(x+\alpha) = f(x)g(\alpha) + f(\alpha)g(x)$, $\alpha =$αυθαίρετη σταθερά

Η $f(x)$ είναι λύση της (1) οπότε όπως εύκολα μπορεί κάποιος να δει και η $f(x+\alpha)$, όπου α=αυθαίρετη σταθερά, είναι λύση της (1).

Συνεπώς η $f(x+\alpha)$ μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των $f(x)$ και $g(x)$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν σταθερές β και γ τέτοιες ώστε:

$$f(x+\alpha) = \beta \cdot f(x) + \gamma \cdot g(x) \quad (*)$$

Υπολογισμός των β και γ:

Για $x = 0$ η (*) μας δίνει: $f(\alpha) = \gamma$.

Παραγωγίζοντας την (*) ως προς x παίρνουμε:

$$f'(x+\alpha) = \beta \cdot f'(x) + \gamma \cdot g'(x) \overset{x=0}{\Rightarrow} f'(\alpha) = \beta.$$

Άρα η (*) γίνεται:

$f(x+\alpha) = f'(\alpha) \cdot f(x) + f(\alpha) \cdot g(x)$ και λόγω του δευτέρου ερωτήματος όπου $f'(\alpha) = g(\alpha)$, έχουμε τελικά:

$$f(x+\alpha) = f(x)g(\alpha) + f(\alpha)g(x)$$

- $g(x+\alpha)=g(x)g(\alpha)-f(\alpha)f(x)$,
  $\alpha=$**αυθαίρετη σταθερά**

IV. **Απόδειξη της** $g(x+\alpha)=g(x)g(\alpha)-f(\alpha)f(x)$, $\alpha=$αυθαίρετη σταθερά

Η $g(x)$ είναι λύση της (1) οπότε όπως εύκολα μπορεί κάποιος να δει και η $g(x+\alpha)$, όπου α=αυθαίρετη σταθερά, είναι λύση της (1).

Συνεπώς η $g(x+\alpha)$ μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των $f(x)$ και $g(x)$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν σταθερές β και γ τέτοιες ώστε:

$$g(x+\alpha)=\beta\cdot f(x)+\gamma\cdot g(x) \quad (*)$$

Υπολογισμός των β και γ:

Για $x=0$ η (*) μας δίνει: $g(\alpha)=\gamma$.

Παραγωγίζοντας την (*) ως προς x παίρνουμε:

$$g'(x+\alpha)=\beta\cdot f'(x)+\gamma\cdot g'(x)\overset{x=0}{\Rightarrow}g'(\alpha)=\beta.$$

Άρα η (*) γίνεται:

$g(x+\alpha)=g'(\alpha)\cdot f(x)+g(\alpha)\cdot g(x)$ και λόγω του τρίτου ερωτήματος όπου $g'(\alpha)=-f(\alpha)$, έχουμε τελικά:

$$g(x+\alpha)=g(x)g(\alpha)-f(\alpha)f(x)$$

❖ $f(-x)=-f(x)$ **και** $g(-x)=g(x)$.

V. Απόδειξη των $f(-x)=-f(x)$ και $g(-x)=g(x)$.

Στις προηγούμενες σχέσεις:
$f(x+\alpha)=f(x)g(\alpha)+f(\alpha)g(x)$ και
$g(x+\alpha)=g(x)g(\alpha)-f(\alpha)f(x)$ θέτουμε για
$\alpha=-x$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=f(x)g(-x)+f(-x)g(x) \\ g(0)=g(x)g(-x)-f(-x)f(x) \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(x)g(-x)+f(-x)g(x)=0 \\ g(x)g(-x)-f(-x)f(x)=1 \end{array}\right\}$$

Έτσι καταλήγουμε στο σύστημα για τα $g(-x)$ και $f(-x)$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)g(-x)+g(x)f(-x)=0 \\ g(x)g(-x)-f(x)f(-x)=1 \end{array}\right\}$$

Ορίζουσα:

$$D=\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ g(x) & -f(x) \end{vmatrix}=-f^2(x)-g^2(x)=-1\neq 0$$

Που σημαίνει ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση την

$$\left(g(-x), f(-x)\right) = \left(\frac{D_{g(-x)}}{D}, \frac{D_{f(-x)}}{D}\right)$$

Είναι $D_{g(-x)} = \begin{vmatrix} 0 & g(x) \\ 1 & -f(x) \end{vmatrix} = -g(x)$ και

$$D_{f_{(-x)}} = \begin{vmatrix} f(x) & 0 \\ g(x) & 1 \end{vmatrix} = f(x)$$

Τελικά η λύση του είναι**:**

$$\left(g(-x), f(-x)\right) = \left(\frac{-g(x)}{-1}, \frac{f(x)}{-1}\right) = (g(x), -f(x))$$

,

δηλαδή: $f(-x) = -f(x)$ και $g(-x) = g(x)$.

- **Να βρεθεί συνάρτηση $h(x)$ με την ιδιότητα** $h'(x) = h(-x)$

Απόδειξη

Από την εκφώνηση έχουμε $h'(x) = h(-x)$. Από αυτή την σχέση παραγωγίζοντας ως προς x παίρνουμε:

$$h''(x) = -h'(-x) \Rightarrow h''(x) = -h(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h''(x) + h(x) = 0$$

Άρα η $h(x)$ είναι λύση της (1).

Όμως η (1) έχει δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις, τις $f(x)$ και $g(x)$

Κατά συνέπεια η $h(x)$ γράφεται ως εξής:

$$h(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x).$$

*

Πράγματι: $f(x)=\eta\mu x$ και $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$.

Γνωρίζουμε ότι ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

1. $\kappa\eta\mu x+\lambda\sigma\upsilon\nu x=0 \Rightarrow \kappa=\lambda=0$

2. $(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$ και $(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$.

3. $\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x=1$.

4. $\eta\mu(\alpha+\beta)=\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$.

5. $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta-\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta$.

6. $\eta\mu(-x)=-\eta\mu x$ και $\sigma\upsilon\nu(-x)=\sigma\upsilon\nu x$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ:

1. **D. A. Kearns,** ***An Analytic Approach to Trigonometric Functions,*** **American Mathematical Monthly, Vol. 65, No.8 (1958), pp. 616-620.**

2. **Π. Σιαφαρίκας,** ***Εφαρμογές των Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων, τόμος Ι,*** **Πάτρα (2005).**

Ευχαριστώ πολύ