ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κωνσταντόπουλος Κων/νος
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

<u>ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΣΤΗΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ</u> (Διάρκεια **3** ώρες)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1ο : Α. Θεωρία σελ. 60

Β. α) Θεωρία σελ. 74

β) Θεωρία σελ. 55

Γ. α) Σ

β) Σ

γ) Σ

δ) Σ

ε) Λ

στ) Σ

ζ) Σ

η) Σ

θ) Λ

ι) Λ

Θέμα 2ο : α) Αφού $\frac{\pi}{5}+\frac{3\pi}{10}=\frac{5\pi}{10}=\frac{\pi}{2}$, τότε είναι συμπληρωματικά οπότε

$\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{10}=\eta\mu\frac{\pi}{5}$ (1). Άρα

$$\eta\mu^4\frac{\pi}{5}-\sigma\upsilon\nu^2\frac{3\pi}{10}\overset{(1)}{=}\eta\mu^4\frac{\pi}{5}-\eta\mu^2\frac{\pi}{5}=\eta\mu^2\frac{\pi}{5}\left(\eta\mu^2\frac{\pi}{5}-1\right)=-\eta\mu^2\frac{\pi}{5}\left(1-\eta\mu^2\frac{\pi}{5}\right)=-\eta\mu^2\frac{\pi}{5}\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{5}$$

.

β) $$\frac{\varepsilon\varphi(2\pi+\theta)\cdot\varepsilon\varphi(\pi-\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu(2\pi+\theta)}{\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}=\frac{\cancel{\varepsilon\varphi\theta}\cdot\left(-\cancel{\varepsilon\varphi\theta}\right)\cdot\cancel{\sigma\upsilon\nu\theta}}{\left(-\cancel{\varepsilon\varphi\theta}\right)\cdot\cancel{\varepsilon\varphi\theta}\cdot\cancel{\sigma\upsilon\nu\theta}}=1.$$

γ) $$\frac{\eta\mu^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(7\pi+\alpha\right)\cdot\eta\mu\left(-\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\sigma\upsilon\nu^2\pi+\eta\mu\left(-\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\eta\mu^2\frac{\pi}{2}+(-\sigma\upsilon\nu\alpha)\cdot\left(-\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\right)}{\sigma\upsilon\nu^2\pi+\left(-\eta\mu\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)\right)}=$$

$$=\frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{\left(1-\sigma\upsilon\nu\alpha\right)\cdot\left(1+\sigma\upsilon\nu\alpha\right)}{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}=1+\sigma\upsilon\nu\alpha.$$

Θέμα 3ο : Α. Ι. - Επειδή έχει περίοδο $\mathrm{T}=4=\frac{2\pi}{\omega}\Leftrightarrow 4=\frac{2\pi}{\gamma\pi}\Leftrightarrow\gamma=1.$

Οπότε $f(x)=a+1+\left(\beta-2\right)\sigma\upsilon\nu(\pi x)$.

- Επειδή το $\mathrm{M}\left(\frac{1}{2},-3\right)\in C_f$ θα έχουμε

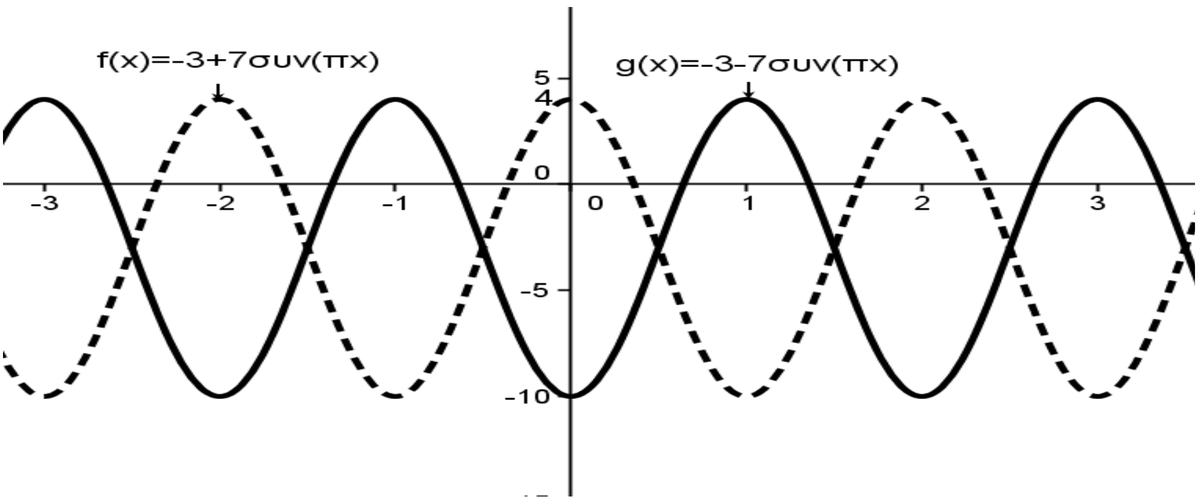
$$f\left(\frac{1}{2}\right)=-3\Leftrightarrow\alpha+1+\left(\beta-2\right)\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi\frac{1}{2})=-3\Leftrightarrow\alpha+1+\left(\beta-2\right)\cdot 0=-3\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\alpha+1=-3\Leftrightarrow\alpha=-4.$$

Οπότε $f(x)=-3+\left(\beta-2\right)\sigma\upsilon\nu(\pi x)$.

- Επειδή έχει μέγιστο 4 πρέπει

$$-3+\left|\beta-2\right|=4\Leftrightarrow\left|\beta-2\right|=7\Leftrightarrow\beta-2=\pm 7\Leftrightarrow\beta=9\acute{\eta}\beta=-5.$$

- Όλα τα παραπάνω φαίνονται από τη παρακάτω γραφική παράσταση της συνάρτησης.



ΙΙ. Το πεδίο ορισμού της f είναι όλο το $\mathbb{R}$, θα ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $-x\in\mathbb{R}$.

Έχουμε $f(-x)=\alpha+1+\left(\beta-2\right)\cdot\sigma\upsilon\nu(-\gamma\pi x)=\alpha+1+\left(\beta-2\right)\cdot\sigma\upsilon\nu(\gamma\pi x)=f(x)$. (άρτια)

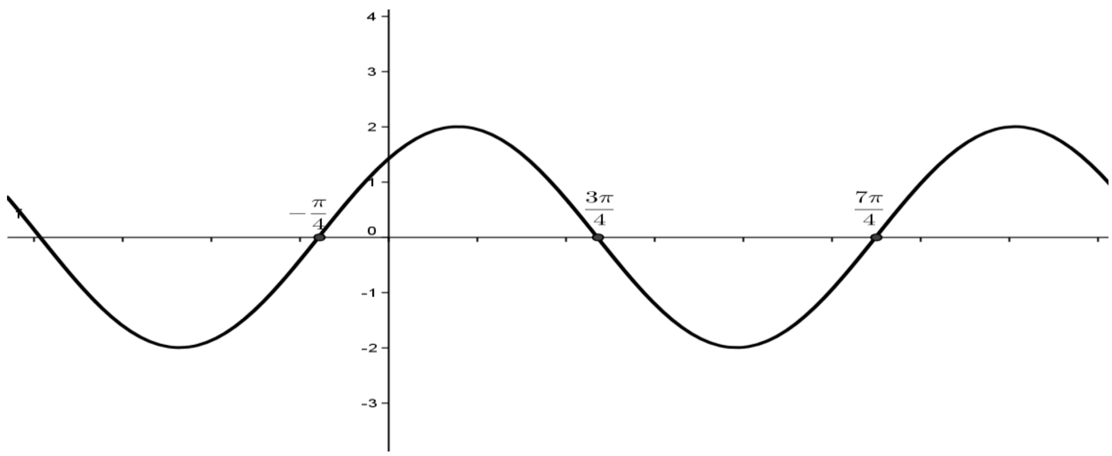
Β. Από τη γραφική παράσταση βλέπουμε ότι έχει μέγιστο το 2 και ελάχιστο το -2, οπότε θα ισχύει $\rho = 2$.

Η περίοδος της συνάρτησης είναι $\mathrm{T} = \frac{7\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2\pi$, οπότε $\omega = 1$.

Τα άκρα του διαστήματος με πλάτος $\mathrm{T} = 2\pi$ είναι $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$, οπότε

$-\frac{\pi}{4} + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$.

Άρα ο τύπος της συνάρτησης είναι: $f(x) = 2\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$



Θέμα 4ο : α) $4\sigma\upsilon\nu^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - 4\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 3 = 0$ (1)

Θέτουμε στην (1) $\sigma\upsilon\nu\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = y$, οπότε έχουμε να λύσουμε την δευτεροβάθμια

εξίσωση: $4y^2 - 4\sqrt{3}y + 3 = 0$. Είναι $\Delta = \left(-4\sqrt{3}\right)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 48 - 48 = 0$ και

$y = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-4\sqrt{3}}{2 \cdot 4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Άρα έχουμε να λύσουμε την εξίσωση

$\sigma\upsilon\nu\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}$

- $2x + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow x = \kappa\pi - \frac{\pi}{24}, \kappa \in \mathbb{Z}$

- $2x + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2x = 2\kappa\pi - \frac{5\pi}{12} \Leftrightarrow x = \kappa\pi - \frac{5\pi}{24}, \kappa \in \mathbb{Z}$

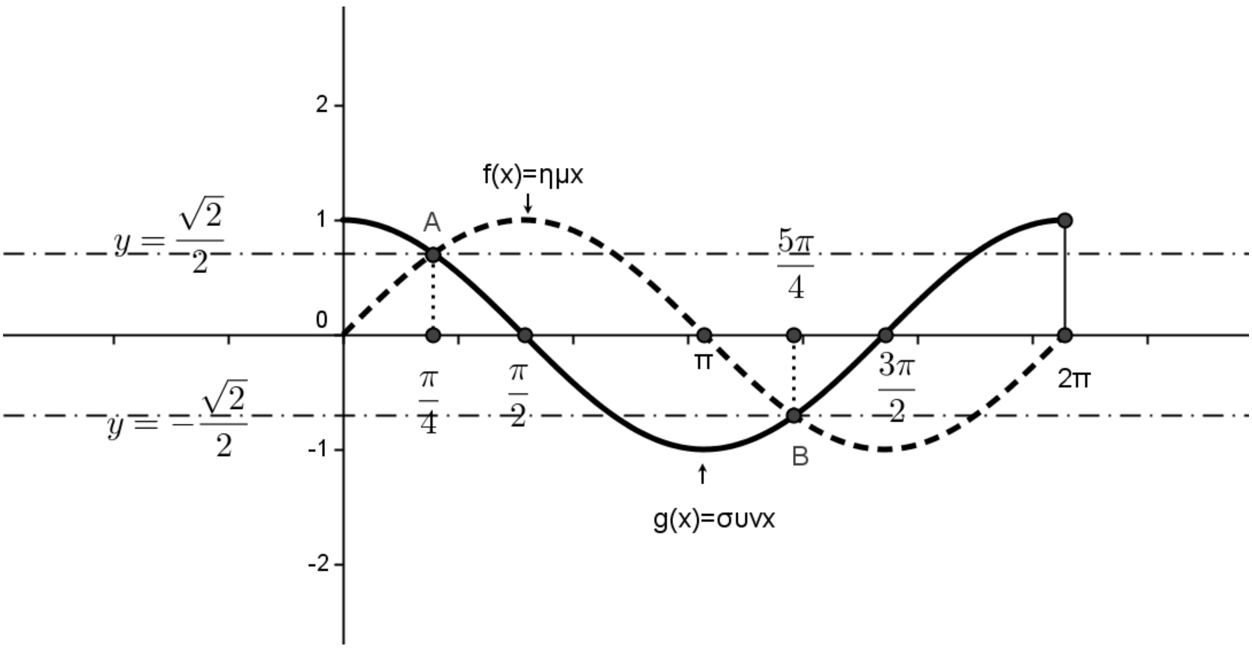
✓ $-\pi \le \kappa\pi - \frac{\pi}{24} \le \pi \Leftrightarrow -1 \le \kappa - \frac{1}{24} \le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{24} - 1 \le \kappa \le 1 + \frac{1}{24} \Leftrightarrow -\frac{23}{24} \le \kappa \le \frac{25}{24}$.

Άρα $\kappa = 0,1$ οπότε για $\kappa = 0$, έχουμε $x = -\frac{\pi}{24}$ και για $\kappa = 1$ έχουμε $x = \frac{23\pi}{24}$.

✓ $-\pi \le \kappa\pi - \frac{5\pi}{24} \le \pi \Leftrightarrow -1 \le \kappa - \frac{5}{24} \le 1 \Leftrightarrow \frac{5}{24} - 1 \le \kappa \le 1 + \frac{5}{24} \Leftrightarrow -\frac{19}{24} \le \kappa \le \frac{29}{24}$.

Άρα $\kappa = 0,1$ οπότε για $\kappa = 0$, έχουμε $x = -\frac{5\pi}{24}$ και για $\kappa = 1$ έχουμε $x = \frac{19\pi}{24}$.

β)



Τα κοινά σημεία είναι τα $A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ και $B\left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, οπότε οι λύσεις της εξίσωσης στο διάστημα $[0, 2\pi]$ είναι $x = \frac{\pi}{4}$ και $x = \frac{5\pi}{4}$.