1ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ -ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Κεφάλαιο 1)

ΘΕΜΑ Α

1.Βλέπε Σχολικό βιβλίο σελίδα 167.

2.Βλέπε Σχολικό βιβλίο σελίδα 191.

3. **α)** Λ, **β)** Σ, **γ)** Σ, **δ)** Λ, **ε)** Λ.

ΘΕΜΑ Β

1.

Η συνάρτηση $g(x)=f(x)+\eta\mu x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων

- Η σχέση $f^2(x)+2f(x)\eta\mu x=x^2+\sigma\upsilon\nu^2 x$ γίνεται
  $f^2(x)+2f(x)\eta\mu x=x^2+1-\eta\mu^2 x \Leftrightarrow f^2(x)+2f(x)\eta\mu x+\eta\mu^2 x=x^2+1\Leftrightarrow$
  $\left(f(x)+\eta\mu x\right)^2=x^2+1\Leftrightarrow g^2(x)=x^2+1>0$ άρα $g(x)\neq 0$ και αφού είναι συνεχής θα διατηρεί πρόσημο. Όμως $g(0)=f(0)+\eta\mu 0=1+0=1>0$, οπότε $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

2.

- Αφού $g(x)>0$ τότε από το προηγούμενο ερώτημα θα έχουμε
  $g^2(x)=x^2+1\Rightarrow g(x)=\sqrt{x^2+1}$, όμως $g(x)=f(x)+\eta\mu x$,

  οπότε $f(x)+\eta\mu x=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow f(x)=\sqrt{x^2+1}-\eta\mu x$.

3.α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2+\sigma\upsilon\nu x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\eta\mu x+\sqrt{x^2+1}-2+\sigma\upsilon\nu x}{x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{-\eta\mu x}{x}+\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{-\eta\mu x}{x}+\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{-\eta\mu x}{x}+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right]=-1+0+0=-1$$

β)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\eta\mu x+\sqrt{x^2+1}\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left[-\frac{\eta\mu x}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right] = (+\infty)(0+1) = +\infty$$

Γιατί $\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| \le \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \le \frac{\eta\mu x}{x} \le \frac{1}{|x|}$ όμως $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|}=0$ και $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right)=0$ οπότε από το κριτήριο της παρεμβολής $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)=0$.

ΘΕΜΑ Γ

1. α) Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της $(0,+\infty)$, θα είναι συνεχής και στο e οπότε θα ισχύει:

$$\lim_{x\to e^-} f(x) = \lim_{x\to e^+} f(x) = f(e) \Leftrightarrow \lim_{x\to e^-}\left(2+\ln^2 x\right) = \lim_{x\to e^+}\left(\alpha x+\ln(x-e+1)\right) = f(e)$$

$$\Leftrightarrow 3 = \alpha e = 3 \Leftrightarrow \alpha = \frac{3}{e}.$$

β) Επειδή $f(1) = 2+\ln^2 1 = 2 < 6$,

$f(2e) = \frac{3}{e}2e+\ln(2e-e+1) = 6+\ln(e+1) > 6$, γιατί

$e+1 > e \Leftrightarrow \ln(e+1) > \ln e \Leftrightarrow 6+\ln(e+1) > 6+1 = 7 \Leftrightarrow f(2e) > 7$

δηλαδή $f(1) < 6 < f(2e)$ και η f είναι συνεχής στο $[1,2e]$ τότε, σύμφωνα με το Θ. ενδιαμέσων τιμών υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1,2e): f(x_0) = 6$.

2. α) Έστω $x_1, x_2 > 0$ με

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow e^{f(x_1)} = e^{f(x_2)} \Rightarrow f\left(e^{f(x_1)}\right) = f\left(e^{f(x_2)}\right) \Rightarrow$$

$4\ln x_1 + 3 = 4\ln x_2 + 3 \Rightarrow \ln x_1 = \ln x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. Άρα η f είναι $1-1$.

β) $(f\circ f)\left(e^{f(x)}\right) = \ln\left(\ln x^4+3\right)^2+1 \Rightarrow (f\circ f)\left(e^{f(x)}\right) = 2\ln\left(\ln x^4+3\right)+1 \Rightarrow$

$f(f(e^{f(x)})) = 2\ln(4\ln x+3)+1 \Rightarrow f(4\ln x+3) = 2\ln(4\ln x+3)+1$

Θέτουμε $4\ln x+3 = y > 0$, οπότε $f(y) = 2\ln y+1$, άρα $f(x) = 2\ln x+1,\ x>0$.

γ) $(f\circ f)(x) = f\left(e^{x-2014}\right) \Leftrightarrow f(f(x)) = f\left(e^{x-2014}\right) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = e^{x-2014} \Leftrightarrow 2\ln x+1 = e^{x-2014} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\ln x+1-e^{x-2014}=0$ **(2)**

Θέτουμε $t(x)=2\ln x+1-e^{x-2014}$, η οποία είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e},1\right]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και $t(\frac{1}{e})=2\ln\frac{1}{e}+1-e^{\frac{1}{e}-2014}=-2+1-e^{\frac{1}{e}-2014}=-1-e^{\frac{1}{e}-2014}<0$,

$t(1)=2\ln 1+1-e^{1-2014}=1-\frac{1}{e^{2013}}>0$, επομένως ισχύει $t(\frac{1}{e})t(1)<0$, οπότε από το Θ.Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$ τέτοιο ώστε $t(x_0)=0$ και λόγω της **(2)** έχουμε ισοδύναμα ότι η εξίσωση $(f\circ f)(x)=f\left(e^{x-2014}\right)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\left(\frac{1}{e},1\right)$.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1)

Για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x ισχύει $x^2+1>x^2$ και επειδή η $\sqrt{x}$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $[0,+\infty)$, άρα παίρνουμε $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}>|x|$. Όμως από τις ιδιότητες της απόλυτης τιμής ισχύει $|x|\geq -x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.Συνδυάζοντας τις προηγούμενες δύο ανισότητες παίρνουμε $\sqrt{x^2+1}>-x\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}+x>0$ που είναι αυτό που θέλαμε να δείξουμε.

Δ2)

Έστω $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ (1). Αφού η συνάρτηση x^2 είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, άρα $x_1^2<x_2{}^2\Leftrightarrow x_1^2+1<x_2^2+1\overset{\sqrt{x}\uparrow}{\Leftrightarrow}\sqrt{x_1^2+1}<\sqrt{x_2^2+1}$ (2).

Προσθέτοντας τις (1), (2) κατά μέλη παίρνουμε

$$\sqrt{x_1^2+1}+x_1<\sqrt{x_2^2+1}+x_2\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ όπως το θέλαμε.

Δ3)

$$f(-x)=\sqrt{(-x)^2+1}-x=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{f(x)}\ (3)$$

Για τη μονοτονία έχουμε αποδείξει ήδη ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Θα βρούμε τη μονοτονία στο $(-\infty,0]$. Έστω λοιπόν $x_1,x_2\in(-\infty,0]$ με $x_1<x_2$. Τότε, $-x_1>-x_2\geq 0$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ (από το ερώτημα Δ2), άρα παίρνουμε $f(-x_1)>f(-x_2)\overset{(3)}{\Leftrightarrow}\dfrac{1}{f(x_1)}>\dfrac{1}{f(x_2)}\overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow} f(x_1)<f(x_2)$.

Θα δείξουμε τώρα ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

- Αν $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ άρα $f(x_1)<f(x_2)$.
- Αν $x_1,x_2\in(-\infty,0]$ με $x_1<x_2$ τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$ άρα $f(x_1)<f(x_2)$.
- Αν $x_1<0<x_2$ τότε $f(x_1)<f(0)<f(x_2)$, άρα και πάλι $f(x_1)<f(x_2)$.

Επομένως σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

Δ4)

Η δοσμένη σχέση γράφεται

Δ5)

Θέτουμε $y=f(x)$, με $y>0$ και έτσι

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+1}+x=y\\ y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2+1}=y-x\\ y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+1=(y-x)^2\\ y>0\\ y-x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{y^2-1}{2y}\\ y>0\\ y-\dfrac{y^2-1}{2y}\geq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{y^2-1}{2y}\\ y>0\\ y^2+1\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{y^2-1}{2y}\\ y>0\end{cases}$$

οπότε $f^{-1}(x)=\dfrac{x^2-1}{2x},\ x>0$.