Μάθημα: Άλγεβρα & Στοιχεία Πιθανοτήτων
Α Λυκείου
Διδακτική Ενότητα: Το λεξιλόγιο της Λογικής
(2 διδακτικές ώρες)

Αλέξανδρος Γ. Συγκελάκης

Στόχοι του μαθήματος

Οι μαθητές στο τέλος της ενότητας θα πρέπει να είναι σε θέση:

- Να διαχωρίζουν τους διάφορους συνδυασμούς συμβόλων σε εκφράσεις που έχουν νόημα και σε εκφράσεις που δεν έχουν νόημα.
- Να διακρίνουν τις εκφράσεις σε αληθείς, ψευδείς ή σε εκείνες που έχουν μεν νόημα αλλά δεν μπορούμε απαραίτητα να τις χαρακτηρίσουμε αληθείς ή ψευδείς.
- Να μπορούν να διακρίνουν τις έννοιες: έκφραση, πρόταση (αληθής ή ψευδής), προτασιακός τύπος, ποσοδείκτης (καθολικός και υπαρξιακός).
- Να έρθουν σε πρώτη επαφή με τις βασικές λογικές πράξεις (άρνηση, διάζευξη, σύζευξη, συνεπαγωγή, ισοδυναμία) και να δουν τους πίνακες αληθείας τους ώστε να είναι σε θέση να χαρακτηρίσουν μία πιο σύνθετη πρόταση ως αληθή ή ψευδή.
- Να διατυπώνουν την αντίθετη, αντίστροφη και αντιστροφοαντίθετη πρόταση μίας πρότασης και φτιάχνοντας τον πίνακα αληθείας της αντιστροφοαντίθετης πρότασης να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι μία πρόταση και η αντιστροφοαντίθετή της είναι ισοδύναμες προτάσεις (άσκηση για το σπίτι).
- Να χρησιμοποιούν αντιπαραδείγματα ως μέσο απόρριψης μίας πρότασης που «υποψιάζονται» ότι είναι ψευδής.
- Τέλος, να εμπλακούν σε διαδικασίες απόδειξης, να εκφραστούν με μαθηματική ορολογία, να συνεργαστούν και να μάθουν να διατυπώνουν καλύτερα μαθηματικές προτάσεις.

Διδακτικά μέσα και υλικά

- Φύλλο εργασίας.
- Φορητός υπολογιστής &projector.

- Καθοδηγούμενη διδασκαλία,καθοδηγούμενος διάλογος, παραγωγική διδακτική μέθοδος.

Πορεία Διδασκαλίας

1η Διδακτική Ώρα

Διέγερση του ενδιαφέροντος και προσέλκυση της προσοχής των μαθητών

- Δίνονται αρχικά - μέσω της **εισαγωγικής δραστηριότητας -** στους μαθητές μερικές εκφράσεις της καθημερινότητας με σκοπό να τις χαρακτηρίσουν αρχικά ως αληθής ή ψευδείς σύμφωνα με τη χρήση της ελληνικής γλώσσας και έξω από τα πλαίσια της Μαθηματικής Λογικής. Οι εκφράσεις τίθενται για να προβληματίσουν αλλά και να διεγείρουν το ενδιαφέρον των μαθητών και για να μελετηθούν όχι μόνο σύμφωνα με τη χρήση που έχουν στην καθημερινή χρήση της γλώσσας αλλά και αργότερα στα πλαίσια της Μαθηματικής Λογικής.

Ορισμός: Κάθε συνδυασμός συμβόλων προκαθορισμένων εννοιών λέμε ότι είναι μία **έκφραση**. Μία έκφραση είναι δυνατόν να έχει ή να μην έχει νόημα. Μερικές εκφράσεις που έχουν νόημα χαρακτηρίζονται ως **«αληθείς»** ή ως **«ψευδείς»** ενώ κάποιες άλλες μπορεί να έχουν νόημα αλλά να μη μπορούμε να τις χαρακτηρίσουμε ούτε ως αληθείς ούτε ως ψευδείς.

- Στο σημείο αυτό δίνεται η **Δραστηριότητα 1** του φύλλου εργασίας. Κάποιες από τις απλέςεκφράσεις (1,2,3,4,6,7,11,12) που δίνονται έχουν νόημα αλλά δεν είναι απαραίτητο να μπορούν να χαρακτηριστούν ως αληθείς ή ψευδείς (3 και 4) και άλλες δεν έχουν νόημα και δεν είναι εκφράσεις (5,8,9,10). Για την ακρίβεια θα τεθεί το ζήτημα πότε μία έκφραση ονομάζεται αληθής και πότε ψευδής και αν ο χαρακτηρισμός αυτός είναι μοναδικός (π.χ. η 12) για την κάθε πρόταση ώστε να γίνει διαχωρισμός των εκφράσεων της καθημερινότητας (στις οποίες μπορεί να μην είναι δυνατόν να αποφανθούμε αν είναι αληθείς ή ψευδείς) με τις προτάσεις μέσα στα πλαίσια της Μαθηματικής Λογικής που θα μπορεί κάποιος **<u>με σιγουριά</u>** να αποφανθείαν είναι αληθείς ή ψευδείς. Έτσι εισάγεται ο ορισμός της «πρότασης» στη Μαθηματική Λογική.

<u>Ορισμός:</u> Κάθε έκφραση η οποία έχει πλήρες και αυτοτελές νόημα και μπορεί να χαρακτηριστεί **με ένα** ακριβώς τρόπο ως αληθής ή ως ψευδής ονομάζεται (λογική) **πρόταση**.

Στα μαθηματικά ασχολούμαστε με προτάσεις δηλαδή με εκφράσεις που μπορούμε **<u>με ένα μόνο τρόπο</u>** να τις χαρακτηρίσουμε ως αληθείς ή ως ψευδείς.Κάθε πρόταση p που χαρακτηρίζεται ως αληθής λέμε ότι έχει **τιμή αλήθειας**α και κάθε πρόταση που χαρακτηρίζεται ως ψευδής λέμε ότι έχει τιμή αλήθειας ψ.

- Στο σημείο αυτό δίνεται η **Δραστηριότητα 2** του φύλλου εργασίας. Σε αυτή τη δραστηριότητα πλέον είμαστε μέσα στα πλαίσια της Μαθηματικής Λογικής κι έτσι οι εκφράσεις που είναι με μονοσήμαντο τρόπο αληθείς ή ψευδείς θα χαρακτηρίζονται ως προτάσεις (1,2,6,7,11). Είναι καλό να τονιστεί στους μαθητές ότι τα παραδείγματα της εισαγωγικής δραστηριότητας καθώς επίσης και της δραστηριότητας 1 είναι ειλημμένα από την ελληνική γλώσσα και ότι στα Μαθηματικά θα μας ενδιαφέρουν οι Μαθηματικές προτάσεις.

Πολλές φορές σχηματίζουμε προτάσεις συνδέοντας κατάλληλα άλλες προτάσεις με διάφορες εκφράσεις τους οποίους καλούμε **λογικούς συνδέσμους**. Στο μάθημα της (Μαθηματικής) Λογικής ως λογικοί σύνδεσμοι θεωρούνται οι εκφράσεις:«**όχι**», «**και**», «**ή**», «**αν, …., τότε**», «**αν και μόνο αν**».
Με αυτούς μπορούμε να φτιάξουμε νέες **σύνθετες προτάσεις**όπως:

1. «Η Κρήτη είναι νησί ή το Παρίσι είναι στην Αγγλία».
2. «Εάν ο 8 είναι άρτιος τότε $7 > 3$».
3. «Ο 6 είναι άρτιος αν και μόνο αν είναι διαιρετός του 2».
4. «Όχι ο 7 είναι περιττός» η οποία είναι ταυτόσημη της πρότασης «ο 7 δεν είναι περιττός».
5. Ο αριθμός 3 είναι ρητός και ο -3 ακέραιος.

6. Αν ο α είναι ίσος με 5 τότε ο α + 1 είναι ίσος με 6.
7. Αν $\alpha \cdot \beta = 0$ τότε ($\alpha = 0$ ή $\beta = 0$).
8. Αν ($\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$) τότε $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.
9. Αν ένα τετράπλευρο δεν έχει ίσες διαγώνιες τότε δεν είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
10. Αν ο Μάρτιος έχει 31 ημέρες τότε ο σκύλος έχει 4 πόδια.

Κάθε μία από αυτές τις σύνθετες προτάσεις που προκύπτουν από προτάσεις και τους παραπάνω λογικούς συνδέσμους, θεωρούμε ότι έχει νόημα (για τα Μαθηματικά) και ότι μπορούμε να την χαρακτηρίσουμε με τη σειρά της (με ένα μόνο τρόπο) ως αληθή ή ως ψευδή ανεξάρτητα αν αυτές οι προτάσεις έχουν ή όχι νόημα στην καθημερινή χρήση του λόγου. Οι λογικοί αυτοί σύνδεσμοι που χρησιμοποιούνται για να φτιάξουμε νέες σύνθετες προτάσεις αποτελούν τις βασικές λογικές πράξεις.

Βασικές Λογικές Πράξεις

1. Άρνηση

Καλούμε **άρνηση** μίας πρότασης p μία νέα πρόταση που συμβολίζεται με $\bar{p}$και διαβάζεται «όχι p» και είναι αληθής εάν η p είναι ψευδής και ψευδής εάν η p είναι αληθής.

- Στο σημείο αυτό δίνεται η **Δραστηριότητα 3** του φύλλου εργασίας. Σκοπός της δραστηριότητας 3 είναι οι μαθητές να μπουν στη διαδικασία διατύπωσης απλών προτάσεων. Η απλή κατασκευή της άρνησης των απλών προτάσεων είναι ιδανική άσκηση ακόμη και για αδύναμους μαθητές στους οποίους δίνουμε την ευκαιρία να απαντήσουν και να εκφραστούν.

2. Διάζευξη

Καλούμε **διάζευξη** 2 προτάσεων p και q μία νέα πρόταση που συμβολίζεται με $p \vee q$ και διαβάζεται «p ή q» και είναι ψευδής μόνο εάν και οι δύο προτάσεις p και q είναι ψευδείς και αληθής σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση.

3. Σύζευξη

Καλούμε **σύζευξη** 2 προτάσεων p και q μία νέα πρόταση που συμβολίζεται με $p \wedge q$ και διαβάζεται «p και q» και είναι αληθής μόνο εάν και οι δύο προτάσεις p και q είναι αληθείς και ψευδής σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση.

- Στο σημείο αυτό δίνεται η **Δραστηριότητα 4** του φύλλου εργασίας.
- Καλό είναι να τονιστεί στους μαθητές ότι ο συμβολισμός των λογικών συνδέσμων άρνησης, σύζευξης και διάζευξης προτάσεων στα πλαίσια της Μαθηματικής Λογικής, δεν περιέχεται στο σχολικό εγχειρίδιο κι έτσι δε μπορούν να κάνουν χρήση αυτών. Ο λόγος που χρησιμοποιούνται παραπάνω είναι για λόγους πληρότητας.

4. Συνεπαγωγή

Καλούμε **συνεπαγωγή** δύο προτάσεων p και q μία νέα πρόταση που συμβολίζεται με $p \Rightarrow q$ και διαβάζεται «αν p τότε q» ή «p συνεπάγεται q» ή «p πρέπει q» ή «q αρκεί p» ή «p είναι ικανή συνθήκη της q» ή «q είναι αναγκαία συνθήκη της p» και είναι ψευδής μόνο εάν η p είναι αληθής και η q ψευδής. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις η συνεπαγωγή είναι αληθής.

<u>**Παρατηρήσεις:**</u>

1. Η συνεπαγωγή $q \Rightarrow p$ καλείται **αντίστροφη** της συνεπαγωγής $p \Rightarrow q$. Η συνεπαγωγή $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ καλείται **αντίθετη** της $p \Rightarrow q$ και τέλος η συνεπαγωγή $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ καλείται **αντιστροφοαντίθετος** της $p \Rightarrow q$.
2. Προκαλεί εντύπωση το γεγονός ότι η συνεπαγωγή θεωρείται αληθής ακόμη και στην περίπτωση που η υπόθεση είναι ψευδής. Αυτή είναι μία παραδοχή που παρά το ότι η εξήγησή της είναι έξω από τους σκοπούς του βιβλίου της Α Λυκείου θα προσπαθήσουμε να την εξηγήσουμε με το παρακάτω παράδειγμα:

Ας υποθέσουμε ότι ένας γονιός λέει στο παιδί του: *«Εάν πάρεις στο αυριανό διαγώνισμα βαθμό μεγαλύτερο από 85/100 τότε θα σου δώσω 10 ευρώ»*. Αν ο μαθητής πάρει βαθμό 90/100 και ο γονιός του δώσει 10 ευρώ τότε η υπόσχεση έχει τηρηθεί κι έτσι η πρόταση είναι αληθής, ενώ αν ο μαθητής πάρει βαθμό 90/100 και ο γονιός του δώσει 5 ευρώ τότε η υπόσχεση δεν έχει τηρηθεί κι έτσι η πρόταση είναι ψευδής. Τι γίνεται όμως στην περίπτωση που ο μαθητής πάρει βαθμό 70/100; Τότε είτε ο γονιός δώσει 10 ευρώ είτε δώσει 5 ευρώ στο παιδί του τότε δεν τίθεται θέμα για το αν έχει κρατηθεί η υπόσχεση οπότε αν ο γονιός δώσει τελικά 5 ευρώ στο παιδί του, το παιδί δεν μπορεί να παραπονεθεί ότι η υπόσχεση δεν κρατήθηκε. Το ίδιο εάν του δώσει 10. Όμως ως πρόταση (στα πλαίσια της Μαθηματικής Λογικής) πρέπει να χαρακτηρισθεί ως αληθής ή ως ψευδής. Σε αυτή την περίπτωση οι επί της Μαθηματικής Λογικής ασχολούμενοι προτίμησαν να διαλέξουν την *«αθώος μέχρι αποδείξεως του αντιθέτου»* λύση και την χαρακτηρίζουν αληθή. (Εάν ο μαθητής πήγαινε σε ένα υποτιθέμενο «δικαστήριο» την μητέρα του που του έδωσε 5 ή 10 ευρώ με βαθμό 70/100 τότε το δικαστήριο δε θα μπορούσε να κατηγορήσει τη μητέρα του ότι αθέτησε την υπόσχεσή της και φυσικά ούτε να την «καταδικάσει». Έτσι την «αθωώνει» μέχρι αποδείξεως του αντιθέτου).

Για παράδειγμα οι προτάσεις:

(1) «Αν οι ελέφαντες πετούν τότε το πρωτάθλημα θα το πάρει ο Παναθηναϊκός»

(2) «Αν οι ελέφαντες πετούν τότε το πρωτάθλημα δεν θα το πάρει ο Παναθηναϊκός»

είναι και οι δύο αληθείς παίρνοντας ως δεδομένο (φυσικά) ότι οι ελέφαντες δεν πετούν (*)

(*) Σημείωση προς τους φανατικούς φιλάθλους του Παναθηναϊκού: Παρακαλώ μην πάρετε στα σοβαρά την πρόταση (1) και τοποθετήσετε μερικούς ελέφαντες πάνω σε ένα δέντρο ελπίζοντας ότι κάποιος θα πετάξει.

Ακόμα και η πρόταση:

«Αν ο Μάρτιος έχει 31 ημέρες τότε ο σκύλος έχει 4 πόδια»

είναι αληθής διότι παρά το ότι οι ημέρες του μήνα Μαρτίου δεν έχουν σχέση με τον αριθμό των ποδιών ενός σκύλου, εντούτοις οι προτάσεις «Ο Μάρτιος έχει 31 ημέρες» και «Ο σκύλος έχει 4 πόδια» είναι αληθείς κάνοντας την συνεπαγωγή αληθή. Αυτό συμβαίνει διότι η χρήση του «Αν… τότε…» στη Μαθηματική Λογική έχει τελείως διαφορετική χρήση απ' ό,τι στην καθημερινότητα.

Ιστορικό Σχόλιο: Όταν ο BertrandRussell είπε ότι από την υπόθεση $0 = 1$ μπορούσε να αποδείξει ο,τιδήποτε κάποιοσφοιτητής του, του ζήτησε να αποδείξει ότι είναι ο Πάπας. ORussell αναφώνησε: «Εύκολο! Θεωρούμε το σύνολο που περιέχει δύο στοιχεία, εμένα και τον Πάπα. Όμως αφού $0 = 1$ άρα $1 = 2$ (προσθέτω και στα δύο μέλη τη μονάδα) συνεπώς το σύνολο που περιέχει τα δύο στοιχεία, στην πραγματικότητα περιέχει μόνο ένα. Άρα εγώ και ο Πάπας είμαστε το ίδιο πρόσωπο!»

- Στο σημείο αυτό δίνεται η **Δραστηριότητα 5** του φύλλου εργασίας. Τονίζουμε για άλλη μία φορά ότι δε μας ενδιαφέρει εάν η πρόταση έχει νόημα με την καθημερινή χρήση της γλώσσας αλλά αφού η συνεπαγωγή είναι μία νέα πρόταση που προκύπτει από δύο προτάσεις, άρα **οφείλει** να χαρακτηριστεί με ένα και μόνο τρόπο ως αληθής ή ως ψευδής.

5. Ισοδυναμία

Καλούμε **ισοδυναμία** δύο προτάσεων p και q μία νέα πρόταση που συμβολίζεται με $p \Leftrightarrow q$ και διαβάζεται «p αν και μόνο αν q» ή «p ισοδυναμεί q» ή «p είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη της q» ή «p πρέπει και αρκεί q» ή «p τότε και μόνο τότε q» ή «p και q είναι ισοδύναμες» και είναι αληθής μόνο αν οι p και q έχουν ίδια τιμή αλήθειας (δηλαδή είναι και οι δύο αληθείς ή και οι δύο ψευδείς). Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις είναι ψευδής.

- Στο σημείο αυτό δίνεται η **Δραστηριότητα 6** του φύλλου εργασίας.

Επίλογος 1ης Διδακτικής ώρας

- Γίνεται μία σύντομη ανακεφαλαίωση και δίνεται ο παρακάτω συγκεντρωτικός πίνακας τιμών αλήθειας των λογικών πράξεων.
- Τέλος, ο διδάσκων καλεί τους μαθητές να ξαναδούν την εισαγωγική δραστηριότητα του φύλλου εργασίας και να απαντήσουν σε κάθε μία πρόταση σαν αυτή να εντασσόταν στα πλαίσια της **Μαθηματικής Λογικής** (αν υπάρχει χρόνος τότε αυτό γίνεται στο μάθημα διαφορετικά αφήνεται ως εργασία στο σπίτι) και όχι της καθημερινής χρήσης του λόγου.(Αληθείς: i,iii,iv, vii, viiiα,γ,δ, Ψευδείς:ii,v, vi, viii β)
- Δίνεται ως εργασία στο σπίτι η **Δραστηριότητα 7** του φύλλου εργασίας.

Οι παραπάνω πράξεις ανάλογα με την τιμή αλήθειας των προτάσεων p και q συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα ο οποίος ονομάζεται **πίνακας τιμών αλήθειας** κάθε μίας πράξης (η οποία από μόνη της αποτελεί πρόταση):

p	q	$\bar{p}$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
α	α	ψ	α	α	α	α
α	ψ	ψ	α	ψ	ψ	ψ
ψ	α	α	α	ψ	α	ψ
ψ	ψ	α	ψ	ψ	α	α

2η Διδακτική Ώρα

- Γίνεται σύντομη εξέταση στις έννοιες της 1ης Διδακτικής Ώρας και γίνεται συζήτηση με τους μαθητές για την **Δραστηριότητα 7** του Φύλλου Εργασίας ώστε οι μαθητές να είναι σε θέση να αντιληφθούν την ισοδυναμία μίας πρότασης και της αντιστροφοαντίθετής της καθώς επίσης και τη διατύπωση της αντιστροφοαντίθετης πρότασης.
- Αμέσως μετά δίνεται η εξής δραστηριότητα στους μαθητές για να προκαλέσει το ενδιαφέρον τους.

Εισαγωγική Δραστηριότητα: Να εξετάσετε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής:

i. Αν $\alpha^2 = 9$ τότε $\alpha = 3$.

ii. Για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό α αν $\alpha^2 = 9$ τότε $\alpha = 3$.

iii. Υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε αν $\alpha^2 = 9$ τότε $\alpha = 3$.

iv. Για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό α ισχύει $\alpha^2 > 0$.

- Η παραπάνω δραστηριότητα είναι κατάλληλη για να αναδείξουμε τη σημασία των ποσοδεικτών σε εκφράσεις οι οποίες εξαρτώνται από μεταβλητές (εδώ το α) δηλαδή τους λεγόμενους προτασιακούς τύπους. Δίνεται λοιπόν αμέσως μετά από τη συζήτηση ο ορισμός του προτασιακού τύπου καθώς επίσης και η έννοια του υπαρξιακού και καθολικού ποσοδείκτη.

Προτασιακός Τύπος – Ποσοδείκτες

Ορισμός:Προτασιακός τύπος μιας μεταβλητής καλείται κάθε έκφραση η οποία περιέχει μία ή περισσότερες μεταβλητές και η οποία καθίσταται πρόταση όταν η εν λόγω μεταβλητή (ή μεταβλητές) αντικατασταθεί με ένα οποιοδήποτε στοιχείο ενός ορισμένου συνόλου (πεδίο ορισμού του προτασιακού τύπου).

Προσοχή! Ο προτασιακός τύπος <u>δεν είναι πρόταση</u> που μπορεί να χαρακτηριστεί ως αληθής ή ως ψευδής. Για άλλες τιμές της μεταβλητής από την οποία εξαρτάται μπορεί να είναι αληθής και για άλλες τιμές μπορεί να είναι ψευδής.

Παραδείγματα αποτελούν οι παρακάτω προτασιακοί τύποι:

1. $p(x)$: «ο x είναι άρτιος αριθμός» ο οποίος είναι αληθής για $x = 2$ και ψευδής για $x = 7$. Για συντομία γράφουμε ότι η πρόταση $p(2)$ είναι αληθής ενώ η $p(7)$ είναι ψευδής.
2. $p(x,y)$: «ο x είναι μεγαλύτερος του y» ο οποίος είναι προτασιακός τύπος δύο μεταβλητών x, y. Η πρόταση $p(1,0)$ είναι αληθής ενώ η πρόταση $p(2,3)$είναι ψευδής.
3. $p(\alpha)$: «$\alpha^2 > 9$» ο οποίος είναι προτασιακός τύπος μίας μεταβλητής. Η πρόταση $p(-4)$είναι αληθής ενώ οι $p(3)$ και $p(0)$ είναι ψευδείς.

<u>**Ορισμός:**</u>Έστω $p(x)$ είναι ένας προτασιακός τύπος μίας μεταβλητής x με πεδίο ορισμού το σύνολο A. Η πρόταση που είναι αληθής εάν όλα τα στοιχεία x του συνόλου A έχουν την ιδιότητα $p(x)$ και ψευδής σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση, συμβολίζεται με $(\forall x)\, p(x)$ και διαβάζεται «για κάθε x, η $p(x)$ είναι αληθής» ή πιο σύντομα «για κάθε x ισχύει η $p(x)$». Το σύμβολο «$\forall$ » καλείται καθολικός ποσοδείκτης και διαβάζεται «για κάθε».

Για παράδειγμα αν έχουμε τον προτασιακό τύπο «$x^2 + 1 > 0$ » με πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών$\mathbb{R}$ τότε η πρόταση $(\forall x)(x^2 + 1 > 0)$είναι αληθής. Όμοια αν έχουμε τον προτασιακό τύπο «$\nu + 2 > 10$» με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ τότε η πρόταση $(\forall \nu)(\nu + 2 > 10)$ είναι ψευδής γιατί για παράδειγμα για $\nu = 3$ δεν ισχύει. Γενικά για να αποδείξουμε ότι ένας ισχυρισμός δεν είναι αληθής, αρκεί να βρούμε ένα παράδειγμα για το οποίο ο συγκεκριμένος ισχυρισμός δεν ισχύει, ή όπως λέμε, αρκεί να βρούμε ένα **αντιπαράδειγμα**. Έτσι, για την πρόταση $(\forall \nu)(\nu + 2 > 10)$, ο $\nu = 3$ αποτελεί ένα αντιπαράδειγμα.

Ορισμός:Έστω $p(x)$ είναι ένας προτασιακός τύπος μίας μεταβλητής x με πεδίο ορισμού το σύνολο A. Η πρόταση που είναι αληθής εάν τουλάχιστον ένα στοιχείο x του συνόλου A έχει την ιδιότητα $p(x)$ συμβολίζεται με $(\exists x)p(x)$ και διαβάζεται «υπάρχει x ώστε η $p(x)$ να είναι αληθής» ή πιο σύντομα «υπάρχει x ώστε να ισχύει η $p(x)$». Το σύμβολο « $\exists$ » καλείται **υπαρξιακός ποσοδείκτης** και διαβάζεται «υπάρχει».

Για παράδειγμα για τον προτασιακό τύπο «$2^{\nu} < \nu + 4$» με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$, η πρόταση $(\exists \nu)(2^{\nu} < \nu + 4)$ είναι αληθής ενώ για τον προτασιακό τύπο «$x^2 + 1 > 0$» με πεδίο ορισμού το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ η πρόταση$(\exists x)(x^2 + 1 = 0)$είναι ψευδής.

Παρανόηση:Πολλές φορές μας ρωτάνε αν η συνεπαγωγή $\alpha^2 = 9 \Rightarrow \alpha = 3$ είναι ή όχι σωστή. Για την ακρίβεια η ερώτηση αυτή **δεν έχει νόημα** διότι πρόκειται για ένα προτασιακό τύπο και όχι για μία πρόταση. Για$\alpha = 3$ είναι αληθής (αληθής υπόθεση αληθές συμπέρασμα) ενώ για $\alpha = -3$ δεν είναι αληθής (αληθής υπόθεση, ψευδές συμπέρασμα).
Αυτό που συνήθως υπονοείται είναι: «Να εξετάσετε αν η πρόταση $(\forall \alpha \in R)(\alpha^2 = 9 \Rightarrow \alpha = 3)$είναι αληθής». Φυσικά η τελευταία δεν είναι αληθής διότι ο προτασιακός τύπος «$\alpha^2 = 9 \Rightarrow \alpha = 3$» δεν είναι αληθής πρόταση όταν το $\alpha = -3$ (είπαμε ότι θεωρούμε την πρόταση $(\forall x)\, p(x)$ αληθή ΜΟΝΟ στην περίπτωση που η πρόταση p είναι αληθής **για όλες** τις τιμές της μεταβλητής x).

Σημαντικό: Στην απόδειξη της πρότασης $(\forall x)(p(x) \Rightarrow q(x))$ κάνουμε την απόδειξη για εκείνα τα x για τα οποία ο p(x) είναι αληθής. Για τα υπόλοιπα x για τα οποία ο p(x) είναι ψευδής πρόταση, η συνεπαγωγή $p(x) \Rightarrow q(x)$ είναι έτσι κι αλλιώς αληθής. Άρα στο εξής για να αποδείξουμε ότι η $(\forall x)(p(x) \Rightarrow q(x))$ είναι αληθής θα θεωρούμε ότι η $p(x)$ είναι αληθής και θα προσπαθούμε να δείξουμε με (λογικά) επιχειρήματα ότι η q(x) είναι επίσης αληθής. Αυτός είναι και ο λόγος που για να εξετάσουμε αν η παραπάνω πρόταση $(\forall \alpha \in R)(\alpha^2 = 9 \Rightarrow \alpha = 3)$ είναι αληθής εξετάζουμε την αλήθεια της πρότασης$\alpha = 3$ μόνο για εκείνα τα α για τα οποία η πρόταση $\alpha^2 = 9$ είναι αληθής δηλαδή μόνο για $\alpha = 3$ και $\alpha = -3$.

- Στο σημείο αυτό δίνεται η **Δραστηριότητα 8** του φύλλου εργασίας που ταυτίζεται με την ερώτηση κατανόησης 1 και τονίζουμε στους μαθητές ότι όλοι σε όλους τους προτασιακούς τύπους υπονοείται από την εκφώνηση ο καθολικός ποσοδείκτης (το σχολικό βιβλίο γράφει *«**<u>για όλους</u>** τους πραγματικούς αριθμούς α και β»*).

- Τονίζουμε στους μαθητές το ***«Σημαντικό»***που γράφει στην παραπάνω παράγραφο κάτι που θα τους βοηθήσει να μην παίρνουν περιττές περιπτώσεις για τις μεταβλητές που καθιστούν την πρόταση έτσι κι αλλιώς αληθή.

- Αν υπάρχει διαθέσιμος χρόνος είναι καλό να αναφερθούμε στην άρνηση προτάσεων που περιέχουν σύζευξη, διάζευξη προτάσεων ή στην άρνηση της καθολικότητας ή της ύπαρξης και να βοηθήσουμε τους μαθητές μας να αντιληφθούν ότι η άρνηση της διάζευξης είναι η σύζευξη, η άρνηση της σύζευξης είναι η διάζευξη, η άρνηση του «για κάθε» είναι το «υπάρχει» και η άρνηση του «υπάρχει» είναι το «για κάθε». Η άρνηση του «το πολύ» είναι «το ελάχιστο» και η άρνηση του «το ελάχιστο» είναι «το πολύ». Εκφραστικά θα βοηθήσει η **Δραστηριότητα 9** του Φύλλου εργασίας.

<u>Παράδειγμα:</u> «Να αποδείξετε ότι το τετράγωνο κάθε περιττού φυσικού είναι επίσης περιττός» που διατυπώνεται σε συμβολική γλώσσα ως εξής:

$$(\forall x \in N)(\,x \text{ περιττός} \Rightarrow x^2 \text{ περιττός})$$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω ότι ο x είναι περιττός (είναι μία αληθής πρόταση). Τότε ο x είναι της μορφής x=2k+1 όπου k φυσικός αριθμός.

$$x^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2r + 1$$

όπου$r = 2k^2 + 2k$. Άρα ο r είναι φυσικός αριθμός οπότε ο x^2 είναι περιττός.

Πιο σύντομα θα μπορούσαμε να γράψουμε:

$$x \text{ περιττός} \Rightarrow x = 2k+1, k \in N \Rightarrow x^2 = (2k+1)^2 \Rightarrow x^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow$$

$$x^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \Rightarrow x^2 = 2r + 1, r = 2k^2 + 2k \in N \Rightarrow x^2 \text{περιττός}$$

<u>Παραδείγματα από Πανελλήνιες εξετάσεις:</u>

Α) Προβληματικά διατυπωμένες ερωτήσεις

- (Μαθηματικά Γενικής Παιδείας/2009)

α. Για το γινόμενο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g ισχύει ότι

$$\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g'(x) + f(x)g(x)$$

- (Μαθηματικά Κατεύθυνσης 2013)

α) Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$, $\rho > 0$ παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ^2, όπου z, z_0 μιγαδικοί αριθμοί.

- (Μαθηματικά Κατεύθυνσης. Επαναληπτικές 2012)

ε) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta)$$

- (Μαθηματικά Κατεύθυνσης 2012)

ε) $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$

- (Μαθηματικά Γενικής Παιδείας 2010)

ε) Η διάμεσος είναι ένα μέτρο θέσης, το οποίο επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις.

- (Μαθηματικά Κατεύθυνσης 2010)

$(\sigma\upsilon\nu x)' = \eta\mu x,\ x \in \mathbb{R}$

Β) Ορθά διατυπωμένες ερωτήσεις

- (Μαθηματικά Κατεύθυνσης 2014)

α) Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $z - \bar{z} = 2\mathrm{Im}(z)$

- (Μαθηματικά Γενικής Παιδείας 2014)

β) Για δύο οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A-B) = P(B) - P(A \cap B)$$

- (Μαθηματικά Γενικής Παιδείας, Επαναληπτικές 2011)

ε) Η διάμεσος (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων, οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά, ορίζεται πάντα ως η μεσαία παρατήρηση.

- (Μαθηματικά Κατεύθυνσης, Επαναληπτικές 2011)

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z=\alpha+\beta i$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$z - \bar{z} = 2\beta$$

ε) Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

- (Μαθηματικά Κατεύθυνσης 2011)

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$ ορίζουμε $z^0=1$

- (Μαθηματικά Γενικής Παιδείας, Επαναληπτικές 2010)

α) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το Α, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ έχει πάντα πεδίο ορισμού το Α

- (Μαθηματικά Κατεύθυνσης 2009)

δ. Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Πηγές – Βιβλιογραφία:

Σ. Ανδρεαδάκης κα, *Άλγεβρα και στοιχεία πιθανοτήτων Α Λυκείου* (ΙΤΥΕ έκδοση 2014)
Ν. Βαρουχάκης κα,*Μαθηματικά Α Λυκείου, Άλγεβρα* (έκδοση Ζ' 1985)
Ν. Σ. Μαυρογιάννης, *Άλγεβρα Α Λυκείου, Σχολικές Σημειώσεις* (έκδοση 2013 www.nsmavrogiannis.gr)
Α. Κ. Κυριακόπουλος,*Μαθηματική Λογική* (Εκδόσεις Παπαδημητρόπουλου Β' Έκδοση 1977)
http://www.math.niu.edu/~richard/Math101/implies.pdf
Ιστότοπος Μαθηματικών - www.mathematica.gr

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ενότητα: Το λεξιλόγιο της Λογικής

Ονοματεπώνυμο……………………………………………………………...

Εισαγωγική Δραστηριότητα:

i) Η έκφραση *«το 5 είναι αριθμός μεγαλύτερος από το 2»* είναι Α) Αληθής, Β) Ψευδής, Γ) Δεν μπορώ να απαντήσω.
ii) Η έκφραση *«Η Κρήτη είναι στο Παρίσι»* είναι Α) Αληθής, Β) Ψευδής, Γ) Δεν μπορώ να απαντήσω.
iii) Η έκφραση *«Η Κρήτη είναι στο Παρίσι ή η Αθήνα είναι στην Ελλάδα»* είναι Α) Αληθής, Β) Ψευδής, Γ) Δεν μπορώ να απαντήσω.
iv) Ένας φίλος σας, σας λέει στο τηλέφωνο: *«Σήμερα το απόγευμα που θα κατέβω στο κέντρο θα πάω για ψώνια ή θα πάω για ένα καφέ»*. Τελικά ο φίλος σας πήγε μόνο για καφέ. Ο φίλος σας είπε Α) Αλήθεια Β) Ψέματα, Γ) Δεν μπορώ να απαντήσω.
v) Ένας φίλος σας λέει στο τηλέφωνο: *«Σήμερα το απόγευμα που θα κατέβω στο κέντρο θα πάω για ψώνια και θα πάω για ένα καφέ»*. Τελικά ο φίλος σας πήγε μόνο για καφέ. Ο φίλος σας είπε Α) Αλήθεια Β) Ψέματα, Γ) Δεν μπορώ να απαντήσω.

vi) Η έκφραση *«Αν το 5 είναι μεγαλύτερο από το 2 τότε το Παρίσι βρίσκεται στην Αθήνα»* είναι Α) Αληθής, Β) Ψευδής, Γ) Δεν μπορώ να απαντήσω.

vii) Η έκφραση *«Αν το 0 είναι ίσο με 1 τότε το 1 είναι ίσο με 2»* είναι Α) Αληθής, Β) Ψευδής, Γ) Δεν μπορώ να απαντήσω.

viii) Η μητέρα ενός συμμαθητή σας του δήλωσε: *«Εάν πάρεις στο αυριανό διαγώνισμα βαθμό μεγαλύτερο από 85/100 τότε θα σου δώσω 10 ευρώ».* Να εξετάσετε εάν η μητέρα κράτησε την υπόσχεσή της σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) Ο μαθητής έγραψε 90/100 και η μητέρα του, του έδωσε 10 ευρώ.

β) Ο μαθητής έγραψε 90/100 και η μητέρα του, του έδωσε 5 ευρώ.

γ) Ο μαθητής έγραψε 70/100 και η μητέρα του, του έδωσε 10 ευρώ.

δ) Ο μαθητής έγραψε 70/100 και η μητέρα του, του έδωσε 5 ευρώ.

____

____

____

____

____

____

<u>Δραστηριότητα 1η:</u> Ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις έχουν νόημα και ποιες όχι; Εκείνες που έχουν νόημα να τις χαρακτηρίσετε ως ψευδείς ή ως αληθείς.

1. Η Κρήτη είναι νησί.
2. Ο αριθμός 5 είναι άρτιος.
3. Που πηγαίνετε;
4. Καλό ταξίδι.
5. Το Ηράκλειο είναι.
6. Το σύμπαν περιέχει $2^{64}+1$ πλανήτες.
7. Το τρίγωνο ΑΒΓ που βλέπετε στον πίνακα είναι αμβλυγώνιο.
8. Μαρία + 7.
9. Ο Γιώργος.
10. Δίνεται η εξίσωση x^2.
11. Η εργασία που είχα για το σπίτι τελείωσε.
12. Ο Γιάννης είναι ψηλός.

Δραστηριότητα 2η: Ποιες από τις εκφράσεις που έχουν νόημα στη δραστηριότητα 1 είναι προτάσεις; Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από αυτές ως αληθή ή ως ψευδή.

Δραστηριότητα 3η: Να γράψετε την άρνηση κάθε μίας από τις παρακάτω προτάσεις και να την χαρακτηρίσετε ως αληθή ή ως ψευδή.

1. Ο αριθμός 2 είναι ρητός.(Αληθής)
2. Ο αριθμός 2 δεν είναι λύση της εξίσωσης $x^2 - 5x + 6 = 0$. (Ψευδής)
3. Ο 7 δεν είναι άρτιος.(Αληθής)
4. Το 2 είναι διαιρέτης του 2014.(Αληθής)

Δραστηριότητα 4η: Λαμβάνοντας υπόψη τους πίνακες αλήθειας της σύζευξης και διάζευξης προτάσεων να χαρακτηρίσετε ως αληθείς ή ως ψευδείς τις παρακάτω προτάσεις στα πλαίσια της Μαθηματικής Λογικής.

1. Η Κρήτη είναι νησί είτε το Παρίσι είναι στην Αγγλία.(Αληθής)
2. Ο αριθμός 3 είναι ρητός και ο -3 ακέραιος.(Αληθής)

3. Ο αριθμός 3 ή ο αριθμός -3 είναι λύση της εξίσωσης $x^2-5x+6=0$.(Αληθής)

(η παραπάνω πρόταση είναι συντομογραφία της «*Ο αριθμός 3 είναι λύση της εξίσωσης* $x^2-5x+6=0$ *ή αριθμός -3 είναι λύση της εξίσωσης* $x^2-5x+6=0$»και όμοια και στις προτάσεις που ακολουθούν)

4. Ο αριθμός 3 και ο αριθμός -3 είναι λύση της εξίσωσης $x^2-5x+6=0$.(Ψευδής)
5. Ο αριθμός 3 ή ο αριθμός 2 είναι λύση της εξίσωσης $x^2-5x+6=0$.(Αληθής)
6. Ο αριθμός 2 είναι μεγαλύτερος ή ίσος από το 2.(Αληθής)
7. Ο αριθμός 2 είναι μεγαλύτερος και ίσος από το 2.(Ψευδής)
8. Ο αριθμός 2 είναι μεγαλύτερος ή ίσος από το 1.(Αληθής)

<u>Δραστηριότητα 5η</u>: Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω συνεπαγωγές ως αληθή ή ως ψευδή.

1. Αν η γωνία Α ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι ίση με 94 μοίρες τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.(Αληθής)
2. Αν ο 5 είναι περιττός τότε $2>1$.(Αληθής)
3. Αν ο 5 είναι περιττός τότε $0>1$.(Ψευδής)
4. Αν $0=1$ τότε $5=6$.(Αληθής)
5. Αν ο 5 είναι άρτιος τότε το Παρίσι είναι στη Γαλλία.(Αληθής)

Δραστηριότητα 6η: Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω ισοδυναμίες ως αληθή ή ως ψευδή.

1. Η γωνία Α ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι ίση με 94 μοίρες αν και μόνο αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.(Ψευδής)
2. Ο 5 είναι περιττός αν και μόνο αν το Παρίσι είναι στη Γαλλία.(Αληθής)
3. $0 > 1 \Leftrightarrow 1 > 2$.(Αληθής)

____

____

____

____

____

____

Δραστηριότητα 7η: Εάν p, q δύο προτάσεις τότε

i. Να συμπληρώσετε τον πίνακα αληθείας της πρότασης $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$.
ii. Έπειτα να τον συγκρίνετε με τον πίνακα αληθείας της πρότασης $p \Rightarrow q$. Τι παρατηρείτε;
iii. Να συμπληρώσετε τον πίνακα αληθείας της πρότασης $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$ για να διαπιστώσετε ότι η ισοδυναμία είναι πάντοτε αληθής άρα οι προτάσεις $p \Rightarrow q$ και $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ είναι ισοδύναμες.
iv. Πως θα γραφτεί η αντιστροφοαντίθετη της πρότασης «Αν πέσω τότε θα χτυπήσω» σύμφωνα με την παραπάνω ισοδυναμία;
v. Να διατυπώσετε τις αντιστροφοαντίθετες των προτάσεων της δραστηριότητας 5.
vi. Να διατυπώσετε την αντιστροφοαντίθετη της πρότασης: «Αν ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει άνισες διαγωνίους τότε το ΑΒΓΔ δεν είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.» Είναι αληθής ή ψευδής η αρχική πρόταση;
vii. Εκφωνητής σε ραδιοφωνική διαφήμιση: *«Εμπιστευθείτε μας! Αν πάρετε από το κατάστημά μας σπόρους, η παραγωγή σας θα είναι η καλύτερη (Α) και αν η παραγωγή σας δεν είναι η καλύτερη τότε δεν θα έχετε πάρει τους σπόρους από εμάς (Β).»* Τι διαφορετικό είπε ο

εκφωνητής στην πρόταση (Β) σε σχέση με αυτό που είπε στην πρόταση (Α);

p	q	$p \Rightarrow q$	$\bar{q}$	$\bar{p}$	$\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$

Ενδεικτική Απάντηση:

i,ii, iii

p	q	$p \Rightarrow q$	$\bar{q}$	$\bar{p}$	$\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$
α	α	α	ψ	ψ	α	α
α	ψ	ψ	α	ψ	ψ	α
ψ	α	α	ψ	α	α	α
ψ	ψ	α	ψ	α	α	α

iv. Αν δεν χτυπήσω τότε δεν θα πέσω.

vi. Αν το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο τότε έχει ίσες διαγωνίους. (Αληθής)

vii. Ο εκφωνητής δεν είπε τίποτα διαφορετικό καθώς η Β είναι η αντιστροφοαντίθετη της Α.

<u>Δραστηριότητα 8η</u>: Ερώτηση κατανόησης 1 του σχολικού βιβλίου.

I.	Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α και β. Διαφορετικά να κυκλώσετε το γράμμα Ψ.		
1.	$\alpha^2 = 9 \Rightarrow \alpha = 3$	Α	Ψ
2.	$\alpha^2 = \alpha \Leftrightarrow \alpha = 1$	Α	Ψ
3.	$\alpha^2 \neq \alpha \Rightarrow \alpha \neq 1$	Α	Ψ
4.	$\alpha \neq 2 \Leftrightarrow \alpha^2 \neq 4$	Α	Ψ
5.	$\alpha > 2 \Rightarrow \alpha^2 > 4$	Α	Ψ
6.	$\alpha < 2 \Rightarrow \alpha^2 < 4$	Α	Ψ
7.	$\alpha^2 < 4 \Rightarrow \alpha < 2$	Α	Ψ
8.	$\alpha^2 > 4 \Rightarrow \alpha > 2$	Α	Ψ
9.	$\alpha < 2$ και $\beta < 3 \Rightarrow \alpha \cdot \beta < 6$	Α	Ψ

<u>Δραστηριότητα 9η:</u> Να γράψετε την άρνηση των παρακάτω προτάσεων:

i. Θα πάω για μπάνιο ή για ψάρεμα.(Δε θα πάω για μπάνιο και δε θα πάω για ψάρεμα)
ii. Κάθε άνθρωπος έχει μαλλιά.(Υπάρχει (τουλάχιστον ένας) άνθρωπος που δεν έχει μαλλιά)
iii. Είναι $\alpha = 0$ είτε $\beta = 0$.(Είναι $\alpha \neq 0$και $\beta \neq 0$)
iv. Τουλάχιστον ένας από τους α ή β είναι μεγαλύτερος του 1.(Και ο α και ο β είναι μικρότερος ή ίσος του 1)
v. Και οι 5 αριθμοί α, β, γ, δ, ε είναι θετικοί.(Τουλάχιστον ένας από τους α,β,γ,δ,ε είναι αρνητικός ή μηδέν)
vi. Τουλάχιστον δύο από τους α,β,γ είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 1. (Το πολύ ένας από τους α,β,γ είναι μικρότερος του 1)

<u>Δραστηριότητες για το σπίτι:</u>

1) Ερώτηση κατανόησης 2 του σχολικού βιβλίου.

2) Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως αληθή ή ως ψευδή. Σε περίπτωση που χαρακτηρίσετε κάποια από τις προτάσεις ως ψευδή να γράψετε ένα κατάλληλο αντιπαράδειγμα.

1. Σε κάθε τετράπλευρο το άθροισμα των άθροισμα γωνιών είναι $360°$.(Αληθής)
2. Για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό α ισχύει $\alpha^2 > 0 \Rightarrow \alpha > 0$.(Ψευδής. Για $\alpha = -3$ αληθής υπόθεση ψευδές συμπέρασμα)
3. Για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό α ισχύει: $\alpha^2 \neq 3\alpha \Rightarrow \alpha \neq 3$. (Αληθής αρκεί να πάρουμε την αντιστροφοαντίθετη πρόταση)
4. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει: $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0 \Rightarrow \alpha\beta \neq 0$.(Ψευδής αρκεί να πάρουμε το αντιπαράδειγμα $\alpha = 0, \beta = 1$. Φαίνεται ευκολότερα αν πάρουμε την αντιστροφοαντίθετη πρόταση)
5. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ισχύει η συνεπαγωγή: $\begin{cases}\alpha = \beta \\ \gamma = \delta\end{cases} \Rightarrow \alpha + \gamma = \beta + \delta$(Αληθής)
6. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ισχύει η συνεπαγωγή: $\alpha + \gamma = \beta + \delta \Rightarrow \begin{cases}\alpha = \beta \\ \gamma = \delta\end{cases}$(Ψευδής. Για $\alpha = 1, \gamma = 3, \beta = \gamma = 2$ έχουμε αληθή υπόθεση αλλά ψευδές συμπέρασμα)
7. Για κάθε $\alpha \in R$ ισχύει η ισοδυναμία $\alpha^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$. (Αληθής)
8. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει: $\alpha\beta \neq 0$ αν και μόνο αν $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$.(Αληθής. Αν πάρουμε την αντιστροφοαντίθετη πρόταση φαίνεται ευκολότερα)

9. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει: $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ αν και μόνο αν $\alpha = 0$ και $\beta = 0$.(Αληθής)

10. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει: Αν $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ τότε $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$. (Ψευδής. Για $\alpha = 0, \beta = 1$ έχουμε αληθή υπόθεση αλλά ψευδές συμπέρασμα. Φαίνεται ευκολότερα παίρνοντας την αντιστροφοαντίθετη)

11. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει: Αν $\alpha\gamma = \beta\gamma$ τότε $\alpha = \beta$.(Ψευδής. Για $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 0$ έχουμε αληθή υπόθεση αλλά ψευδές συμπέρασμα)

12. Για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό α ισχύει: Αν $(\alpha - 2)^2 > 0$ τότε $\alpha \neq 2$. (Αληθής)

I. **Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α και β. Διαφορετικά να κυκλώσετε το γράμμα Ψ.**

1.	$\alpha^2 = 9 \Rightarrow \alpha = 3$	Για α=-3 αληθής υπόθεση ψευδές συμπέρασμα	Α	Ψ
2.	$\alpha^2 = \alpha \Leftrightarrow \alpha = 1$	Για α=0 αληθής υπόθεση ψευδές συμπέρασμα	Α	Ψ
3.	$\alpha^2 \neq \alpha \Rightarrow \alpha \neq 1$	Με αντιστροφοαντίθετη πρόταση είναι άμεσο	Α	Ψ
4.	$\alpha \neq 2 \Leftrightarrow \alpha^2 \neq 4$	Με αντιστροφοαντίθετη πρόταση και α=-2 αληθής υπόθεση ψευδές συμπέρασμα	Α	Ψ
5.	$\alpha > 2 \Rightarrow \alpha^2 > 4$	Με α>2 υψώνουμε στο τετράγωνο θετικά μέλη και παίρνουμε το συμπέρασμα	Α	Ψ
6.	$\alpha < 2 \Rightarrow \alpha^2 < 4$	Με α=-3 αληθής υπόθεση ψευδές συμπέρασμα	Α	Ψ
7.	$\alpha^2 < 4 \Rightarrow \alpha < 2$	Με αντιστροφοαντίθετη πρόταση είναι παρόμοια με την 5 (ή με επίλυση της ανίσωσης α^2 < 4)	Α	Ψ
8.	$\alpha^2 > 4 \Rightarrow \alpha > 2$	Για α = -3 αληθής υπόθεση ψευδές συμπέρασμα	Α	Ψ
9.	$\alpha < 2$ και $\beta < 3 \Rightarrow \alpha \cdot \beta < 6$	Για α=β=-3 αληθής υπόθεση ψευδές συμπέρασμα	Α	Ψ