$4^{ο}$ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ -ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Σε όλη την ύλη)

ΘΕΜΑ Α

1.Σχολικό βιβλίο, σελίδα 304

2.Σχολικό βιβλίο, σελίδα 303

3.Σχολικό βιβλίο, σελίδα 261

4. α) Σωστό β) Λάθος γ) Σωστό δ) Σωστό ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Θέτουμε $\frac{f(x)}{x}=g(x)\Leftrightarrow f(x)=xg(x)$ και η σχέση $f'(x)=\frac{f(x)}{x}-e^{\frac{f(x)}{x}}$ γράφεται:

$\left(xg(x)\right)'=g(x)-e^{g(x)}\Leftrightarrow g(x)+xg'(x)=g(x)-e^{g(x)}\Leftrightarrow xg'(x)=-e^{g(x)}\Leftrightarrow$

$-g'(x)e^{-g(x)}=\frac{1}{x}\Leftrightarrow$

$\left(e^{-g(x)}\right)'=\left(\ln x\right)'\Rightarrow e^{-g(x)}=\ln x+c$

Για $x=e$ είναι $g(e)=\frac{f(e)}{e}=0$ άρα $e^{0}=\ln e+c\Rightarrow c=0$, οπότε

$e^{-g(x)}=\ln x\Leftrightarrow -g(x)=\ln\left(\ln x\right)\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}=-\ln\left(\ln x\right)\Leftrightarrow f(x)=-x\cdot\ln\left(\ln x\right)$.

Β2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με:

$f'(x)=\left(-x\ln(\ln x)\right)'=-\ln(\ln x)-x\frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}=-\ln(\ln x)-\frac{1}{\ln x}$, και

$f''(x)=(-\ln(\ln x)-\frac{1}{\ln x})'=-\frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}+\frac{1}{x\ln^2 x}=\frac{1-\ln x}{x\ln^2 x}$.

$f''(x)\geq 0\Leftrightarrow\frac{1-\ln x}{x\ln^2 x}\geq 0\Leftrightarrow x\leq e$.

Η μονοτονία και το ακρότατο της f' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

	1	e	$+\infty$
f''	+		-
f'	↗		↘

Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$.
Παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x_0 = e$ το $f'(e) = -1$.

Ισχύει $f'(x) \le f'(e) = -1 < 0$, για κάθε $x > 1$.
Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A = (1,+\infty)$ επομένως
$f(A) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to1+} f(x)\right) = (-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$, γιατί
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-x\ln(\ln x)) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$ και
$\lim\limits_{x\to+1} f(x) = \lim\limits_{x\to+1}(-x\ln(\ln x)) = (-1)(-\infty) = +\infty$.

B3. Η εξίσωση γράφεται: $x\cdot\ln(\ln x) = -\ln m \Leftrightarrow f(x) = \ln m$, άρα για κάθε $m > 0$, $\ln m \in f(A)$, άρα υπάρχει $x_0 \in (1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \ln m$.
Το $x_0 \in (1,+\infty)$ είναι μοναδικό αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A = (1,+\infty)$.

B4. Η ανίσωση ισοδύναμα γράφεται: $f(x^2+2) - f(3x) < 3x - x^2 - 2$ (1)
Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = f(x) + x$ με $h'(x) = f'(x) + 1 \overset{(B2)}{\le} -1 + 1 = 0$

άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A = (1,+\infty)$.

Η (1) γράφεται $h(x^2+2) < h(3x)$ με $x > \frac{1}{3}$ οπότε
$x^2 + 2 > 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow (x < 1$ ή $x > 2)$. Τελικά $\frac{1}{3} < x < 1$ ή $x > 2$

ΘΕΜΑ Γ

α) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_g είναι $\frac{1}{2018} = g'(0)$

(1) Επειδή το σημείο επαφής $A(0, g(0))$ είναι κοινό σημείο της εφαπτομένης και της

C_g , οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση της εφαπτομένης και της C_g . Έτσι για $x = 0$, έχουμε: $0 - 2018\cdot g(0) + 2018 = 0 \Leftrightarrow g(0) = 1$ και για $x = 0$ στον τύπο $g'(x) = \frac{1}{3g^2(x)+\varepsilon} \Rightarrow g'(0) = \frac{1}{3\cdot1^2+\varepsilon} \overset{\text{από (1)}}{=} \frac{1}{2018} \Rightarrow \frac{1}{3+\varepsilon} = \frac{1}{2018} \Rightarrow$

$3 + \varepsilon = 2018 \Rightarrow \varepsilon = 2015$

β)Από τη σχέση $g'(x)=\dfrac{1}{3g^2(x)+2015}$ ισοδύναμα έχουμε:

$$3g^2(x)g'(x)+2015g'(x)=(x)' \Leftrightarrow \left[g^3(x)+2015g(x)\right]'=(x)'$$

Από τις Συνέπειες του Θ.Μ.Τ., υπάρχει σταθερά c: $g^3(x)+2015\cdot g(x)=x+c$.

Για $x=0$, έχουμε: $g^3(0)+2015\cdot g(0)=c \Rightarrow 1^3+2015\cdot 1=c \Rightarrow c=2016$.

Επομένως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει $g^3(x)+2015\cdot g(x)=x+2016$ **(2)**.

γ)Επειδή $g'(x)>0$ ηgείναι γνησίως αύξουσα άρα η gείναι "1-1".

Θέτουμε στη σχέση **(2)**όπου $g(x)=y$ και έχουμε:

$$y^3+2015y=x+2016 \Leftrightarrow g^{-1}(y)=y^3+2015y-2016$$

Τελικά είναι $g^{-1}(x)=x^3+2015x-2016$ **(3)**.

δ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $g''(x)=\dfrac{-(3g^2(x)+2015)'}{(3g^2(x)+2015)^2} \Leftrightarrow g''(x)=\dfrac{-6g(x)g'(x)}{(3g^2(x)+2015)^2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow g''(x)=\frac{-6g(x)\cdot\dfrac{1}{3g^2(x)+2015}}{(3g^2(x)+2015)^2} \Leftrightarrow g''(x)=\frac{-6g(x)}{(3g^2(x)+2015)^3}$$

$$g''(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=0$$

Από τη **(2)**για $g(x)=0$ βρίσκουμε $x=-2016$, η οποία είναι και η μοναδική της λύση αφού από το β) ερώτημα g: 1-1.

Επίσης είναι:

- $x<-2016 \overset{g\ \text{γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} g(x)<g(-2016) \Leftrightarrow g(x)<0 \Leftrightarrow -g(x)>0 \Leftrightarrow g''(x)>0$
  Άρα η g είναι κυρτή στο $(-\infty,-2016]$.

- Όμοια αν $x>-2016 \Leftrightarrow g''(x)<0$ και ηgείναι κοίλη στο $[-2016,+\infty)$.

Επειδή $g''(-2016)=0$ και η $g''(x)$ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του -2016, το σημείο $A(-2016,0)$ είναι το μοναδικό σημείο καμπής της C_g.

ε) $f(x)=\dfrac{g^{-1}(x)}{x\cdot g(x)\left(g^2(x)+2015\right)}$, δηλαδή $f(x)=\dfrac{x^3+2015x-2016}{x\left(g^3(x)+2015g(x)\right)}$, οπότε

$f(x)=\dfrac{x^3+2015x-2016}{x(x+2016)}$, άρα $f(x)=\dfrac{x^3+2015x-2016}{x^2+2016x}$ **(4)**

Η C_f έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις $x=0$, $x=-2016$.

Επειδή $\lambda=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3+2015x-2016}{x^3+2016x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3\left(1+\dfrac{2015}{x^2}-\dfrac{2016}{x^3}\right)}{x^3\left(1+\dfrac{2016}{x}\right)}=1\in\mathbb{R}$

και

$$\beta=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3+2015x-2016}{x^2+2016x}-\frac{x^3+2016x^2}{x^2+2016x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3+2015x-2016-x^3-2016x^2}{x^2+2016x}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-2016x^2+2015x-2016}{x^2+2016}\right)$$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2\left(-2016+\dfrac{2015}{x}-\dfrac{2016}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{2016}{x^2}\right)}=-2016\in\mathbb{R}$ η ευθεία $y=x-2016$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και $-\infty$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θέτουμε $g(x)=f(x)-x+1$ με $g(1)=f(1)-1+1=0$, αφού $f(1)=\dfrac{\ln 1}{\alpha}=0$

Είναι $g(x)=f(x)-x+1\le 0,\ x>0\Rightarrow g(x)\le g(1),\ x>0,$, άρα η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο εσωτερικό σημείο $x_0=1$ και αφού είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων από Θ. Fermat έχουμε $g'(1)=0$.

Είναι $g'(x)=f'(x)-1=\left(\dfrac{\ln x}{\alpha x}\right)'-1=\dfrac{\alpha-\alpha\ln x}{(\alpha x)^2}-1$, οπότε

$g'(1)=0\Leftrightarrow\dfrac{\alpha-0}{\alpha^2}-1=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{\alpha}=1\Leftrightarrow\alpha=1$.

Δ2. (α) Για $\alpha = 1$ $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ με $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, x>0.

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στο πίνακα

x	$-\infty$	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+		−
f(x)		↗		↘

Ο.μ

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$.

Παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x_0 = e$ το $f(e) = \frac{1}{e}$.

Έστω $A_1 = (0, e]$ και $A_2 = [e, +\infty)$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_1 = (0, e]$, άρα

$f(A_1) = \left(\lim_{x \to 0} f(x), f(e)\right] = \left(-\infty, \frac{1}{e}\right]$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_2 = [e, +\infty)$, άρα

$f(A_2) = \left(\lim_{x \to +\infty}, f(e)\right] = \left(0, \frac{1}{e}\right]$.

Οπότε $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = \left(-\infty, \frac{1}{e}\right] \cup \left(0, \frac{1}{e}\right] = \left(-\infty, \frac{1}{e}\right]$.

(β) Αφού η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x_0 = e$ το $f(e) = \frac{1}{e}$, θα είναι $f(x) \le f(e), x > 0 \Leftrightarrow f(x) \le \frac{1}{e}, x > 0$

Δ3. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = \ln^2 x + 2\lambda x,\ x > 0$

Έστω ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 με $0 < \rho_1 < \rho_2$.

Η g πληροί το Θ. Rolle στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοια ώστε $g'(x_1) = 0$.

Είναι $g'(x) = 2\frac{\ln x}{x} + 2\lambda,\ x > 0$ και

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow 2\frac{\ln x}{x}+2\lambda=0 \Leftrightarrow \ln x+\lambda x=0 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x}=-\lambda \Leftrightarrow f(x)=-\lambda$$

Από το παραπάνω ερώτημα Δ2(β) έχουμε ότι $f(x)\le\frac{1}{e} \Leftrightarrow -\lambda\le\frac{1}{e} \Leftrightarrow \lambda\ge-\frac{1}{e}$ που είναι **άτοπο**, αφού $\lambda<-\frac{1}{e}$.

Δ4.

<u>1ος τρόπος</u>

Θα δείξουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,e)$ τέτοιο ώστε

$$1-\ln\xi=\frac{\xi^2}{e^2-e} \Leftrightarrow \frac{1-\ln\xi}{\xi^2}=\frac{1}{e^2-e} \Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{1}{e^2-e}.$$

Η f πληροί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[1,e]$ άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα

$\xi\in(1,e)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{f(e)-f(1)}{e-1}=\frac{\frac{1}{e}}{e-1}=\frac{1}{e^2-e}$

<u>2ος τρόπος</u>

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=(1-\ln x)(e^2-e)-x^2,[1,e]$

Εφαρμόζουμε BOLZANO

$$g(1)=e^2-e-1>0, g(e)=-e^2<0 \Rightarrow \xi\in(1,e): g(\xi)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-\ln\xi)(e^2-e)-\xi^2=0 \Rightarrow \frac{1-\ln\xi}{\xi^2}=\frac{1}{e^2-e} \Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{1}{e^2-e}$$

Δ5. Είναι $E=\int_0^{\frac{1}{e}}\left|f^{-1}(x)\right|dx$, θέτουμε $x=f(u)\Rightarrow dx=f'(u)du$

Για $x=0\Rightarrow 0=f(u)\Leftrightarrow f(1)=f(u)\Leftrightarrow u=1$, και για

$x=\frac{1}{e}\Rightarrow\frac{1}{e}=f(u)\Leftrightarrow f(e)=f(u)\Leftrightarrow u=e$, αφού η f γν. αύξουσα άρα και $1-1$ στο $A_1=(0,e]$.

Οπότε

$$E=\int_1^e\left|f^{-1}f(u)\right|f'(u)du=\int_1^e uf'(u)du=\left[uf(u)\right]_1^e-\int_1^e f(u)du=\left[uf(u)\right]_1^e-\int_1^e\frac{\ln u}{u}du=$$

$$=\left[uf(u)\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{u}\ln u\,du=\left[uf(u)\right]_1^e-\int_1^e(\ln u)'\ln u\,du=$$

$$\left[uf(u)\right]_1^e-\left[\frac{\ln^2 u}{2}\right]_1^e=ef(e)-f(1)-\left(\frac{\ln^2 e}{2}-\frac{\ln^2 1}{2}\right)=e\frac{1}{e}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\text{ τ.μ.}$$