**5ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ –ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Σε όλη την ύλη)**

**ΘΕΜΑ Α**

**1.** Βλέπε σχολικό βιβλίο «Μαθηματικά θετικής και τεχνολογικής Κατεύθυνσης»,

σελίδες 262-263.

**2.** Βλέπε σχολικό βιβλίο «Μαθηματικά θετικής και τεχνολογικής Κατεύθυνσης»,

σελίδα 303.

**3. 1)** Λάθος, **2)** Λάθος, **3)** Λάθος, **4)** Σωστό, **5)** Λάθος .

**ΘΕΜΑ Β**

1. Στη σχέση  αν θέσουμε x=y=0, τότε  .

 (1)

Έστω  , τότε 

Γιατί: ,  και από την (1) .

Άρα η  είναι παραγωγίσιμη σε κάθε  με  .

1. Από το 1ο ερώτημα για κάθε  θα έχουμε 

Για x=0: , οπότε ,  .

1. H  είναι παραγωγίσιμη με .

Έχουμε .

Η μονοτονία και τα ακρότατα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

|  |  |
| --- | --- |
| x | - 1   |
|   | + | - |
|   |   o.μ   |

Η  έχει ολικό μέγιστο στο  .

1. Η συνάρτηση  είναι γν. Φθίνουσα στο  , άρα για  (2).

Αφού η  είναι συνεχής στο  και όχι παντού μηδέν ( γιατί ισχύει μόνο για x=3), τότε παίρνουμε:

 . (3)

Όμοια θα έχουμε  . (4)

Από (3),(4) έχουμε: . (5)

Είναι  , για κάθε , οπότε το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από την  , τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=2 & x=3 ισούται με , οπότε η (5) γίνεται: .

**ΘΕΜΑ Γ**

1. α) Για , θέτουμε . Τότε  και

. Επομένως .

Όμως οι συναρτήσεις και  είναι συνεχείς. Επομένως και η  είναι συνεχής. Άρα .

β)Αρκεί να δείξουμε ότι 

Αν θέσουμε όπου , τότε, όταν  το και έχουμε:

. Άρα .

**2.**



Διότι:

 και , (θέτουμε , ( οπότε 

*Σχόλιο: Δεν μπορούμε να εργαστούμε με τον κανόνα DeL’Hospital γιατί δεν γνωρίζουμε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα της μορφής .*

**3.** Η συνάρτηση  είναι συνεχής στο  ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων. Για την  στο διάστημα [0,3] ισχύουν:

* Είναι συνεχής στο [0,3].
* 

και στο δεύτερο τεταρτημόριο το συνημίτονο είναι αρνητικός αριθμός.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, η εξίσωση  θα έχει μία τουλάχιστον λύση στο (0,3),δηλαδή η γραφική παράσταση της  θα τέμνει τον άξονα  σε ένα τουλάχιστον σημείο.

**4.** Ας υποθέσουμε ότι η εξίσωση  έχει δυο τουλάχιστον λύσεις μεγαλύτερες του 1, τις και με . Θεωρούμε τη συνάρτηση . Η  είναι συνεχής στο ,παραγωγίσιμη στο  με παράγωγο  και ισχύει .

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα του Rolle, θα υπάρχει  τέτοιο ώστε . Έχουμε

. Όμως . Επομένως  που είναι άτοπον αφού .

ΘΕΜΑ Δ



 β) 

  , μοναδική αφού η  είναι γν. Αύξουσα.

 

 

 Άρα έχει σημείο καμπής την αρχή των αξόνων Ο(0,0).

δ) Ισχύουν οι προϋποθέσεις του ΘΜΤ για τη συνάρτηση  στο διάστημα  , οπότε υπάρχει  τ.ω.  ,

Έχουμε: Aπό το (γ) ερώτημα ότι για x>0 ισχύει  που σημαίνει ότι η  είναι γνησίως φθίνουσα και από το (β) ερώτημα . Οπότε, 

ε) 

στ) Βάσει όλων των προηγουμένων μπορούμε να κάνουμε τη γραφική παράσταση της  και η γραφική παράσταση της θα είναι συμμετρική ως προς y=x , διχοτόμο της γωνίας του 1ου τεταρτημορίου.

Λόγω της συμμετρίας για τον υπολογισμό του εμβαδού Ε1 αρκεί να υπολογίσουμε το εμβαδόν Ε2.



****