ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΕΞΑΝΤΛΗΣΗΣ

Ιστορικά στοιχεία

Οι αρχαίοι Έλληνες μέσα από την Γεωμετρία έθεσαν τις βάσεις για το σημαντικότερο εργαλείο της ανθρώπινης νόησης (Τα Μαθηματικά). Ειδικότερα μέσα από την Γεωμετρία, επινόησαν και τελειοποίησαν την «***Μέθοδο της εξάντλησης***» πού είναι ο πρόδρομος του σημερινού Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Πρωτοπόροι της μεθόδου αυτής είναι **ο Ιπποκράτης ο Χίος (470 – 410 π.Χ.)** στον οποίο **ο Εύδημος** αποδίδει, αλλά κάτι τέτοιο ήταν μάλλον αδύνατο για την εποχή αυτή, το παρακάτω θεώρημα:

«τὰ γὰρ ὅμοια τῶν κύκλων τμήματα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν βάσεων τετράγωνα, διότι καὶ οἱ ὅμοιοι κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα»[1].

«Ο λόγος των εμβαδών ομοίων κυκλικών τμημάτων είναι ίσος με το λόγο των τετραγώνων των βάσεων τους »

Όπως υποστηρίζει ο Εύδημος, ο Ιπποκράτης απέδειξε το θεώρημα δείχνοντας ότι ο λόγος των εμβαδών δύο κύκλων, είναι ίσος προς το λόγο των τετραγώνων των διαμέτρων τους. Η απόδειξη αυτή απαιτεί κάποια διαδικασία εξάντλησης, αλλά δεν έχουμε τίποτα το οποίο να μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι κατείχε ένα τέτοιο εργαλείο. Η απόδειξη που αναφέρεται στο βιβλίο XII.2 *των Στοιχείων του Ευκλείδη*, οφείλεται μάλλον στον Εύδοξο, ο οποίος έζησε μετά από τον Ιπποκράτη και πριν από τον Ευκλείδη. Πάντως ο Ιπποκράτης είναι ο πρώτος στην ιστορία των μαθηματικών πού έκανε το τετραγωνισμό μιας καμπυλόγραμμης επιφάνειας (τετραγωνισμός των μηνίσκων

Ο Δημόκριτος (460 – 370 π.Χ.) ο οποίος ήταν πολύ υπερήφανος για τα μαθηματικά του λέγοντας ότι ούτε οι «**αρπεδονάπτες**» της Αιγύπτου δεν τον ξεπερνούσαν, φαίνεται ότι είχε ασχοληθεί με μαθηματικά προβλήματα τα οποία απαιτούσαν κάποιο είδος απειροστικής αντιμετώπισης**.**

Ιστορικά επιβεβαιωμένο είναι πάντως ότι πατέρας της «***Μεθόδου της εξάντλησης***» είναι ο **Εύδοξος ο Κνίδιος (408-355 π.Χ.)**[2]**,** ο οποίος εκτός από τους υπολογισμούς του

[1] Musaios, Εύδημος, Fragment 140, line 174

[2] G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών* Τομ. 1, Μετάφραση Μ.Κ. Κωβαίου, Ε.Μ.Ε, σελ. 60.
C. Boyer, *A History of Mathematics*, New York, John Wiley & Sons 1968, σελ. 100.

όγκου της τριγωνικής πυραμίδας και του όγκου του κόλουρου κώνου, στο Δωδέκατο Βιβλίο των *Στοιχείων του Ευκλείδη* απέδειξε ότι:

1) *(Πρόταση 2)* Οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα

Ο λόγος των εμβαδών δύο κύκλων με διαμέτρους δ, Δ είναι ίσος με το λόγο $\frac{\delta^2}{\Delta^2}$.

2) *(Πρόταση 5)* Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.
Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες καὶ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Δύο πυραμίδες (τριγωνικές και μετά πολυγωνικές) με ίσα ύψη είναι ανάλογες των βάσεων τους.

3) *(Πρόταση 6)* Πᾶν πρίσμα τρίγωνον ἔχον βάσιν διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας.

Κάθε τριγωνικό πρίσμα διαιρείται σε τρεις ισοδύναμες τριγωνικές πυραμίδες.

4) Ο λόγος δύο ομοίων τριγωνικών πυραμίδων ανάγεται σε λόγο παραλληλεπιπέδων, για να αποδειχθεί *(Πρόταση 8)* **ότι ισούται με τον κύβο του λόγου δύο ομολόγων ακμών τους.**

Αἱ ὅμοιαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

5) Στην *(Πρόταση 11)* αποδεικνύεται ότι **αν δύο κώνοι (ή κύλινδροι) έχουν ίσα ύψη , τότε είναι ανάλογοι των βάσεων τους.**
Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὧν αἱ βάσεις.

6) Τέλος στην *(Πρόταση 17)* αποδεικνύεται ότι
Αἱ σφαῖραι πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων διαμέτρων.

« ο λόγος των όγκων δυο σφαιρών με ακτίνες ρ_1, ρ_2 ***είναι ίσος με το λόγο***

$$\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^3$$

Αξίωμα Ευδόξου Αρχιμήδη

Αν δοθούν δύο άνισα μεγέθη $A<B$ του ίδιου είδους τότε υπάρχει θετικός ακέραιος ν τέτοιος ώστε $\nu \cdot A > B$

Από το αξίωμα των Αρχιμήδη – Ευδόξου προκύπτει μία πρόταση η οποία αποτελεί τη βάση της μεθόδου της εξάντλησης.

Αν από ένα μέγεθος αφαιρέσουμε ένα τμήμα μεγαλύτερο ή ίσο από το μισό του, και από το υπόλοιπο αφαιρέσουμε τμήμα πάλι μεγαλύτερο ή ίσο του μισού του και αν η διαδικασία αυτή των αφαιρέσεων συνεχιστεί, θα καταλήξουμε σε μέγεθος μικρότερο από οποιοδήποτε προκαθορισμένο μέγεθος του ίδιου είδους.

Η πρόταση αυτή την οποία θα αποκαλούμε **«ιδιότητα της εξάντλησης»** μπορεί να διατυπωθεί με σύγχρονους όρους ως εξής:

Έστω Μ ένα μέγεθος και ε ένα προκαθορισμένο μέγεθος του ίδιου είδους και ρ ένας ρητός αριθμός τέτοιος ώστε $\frac{1}{2} \le \rho < 1$, τότε υπάρχει θετικός ακέραιος Ν τέτοιος ώστε, $M\,1-\rho^{\nu} < \varepsilon$ για καθε θετικο ακέραιο $\nu > N$.
Δηλαδή η «ιδιότητα της εξάντλησης» είναι ισοδύναμη με την πρόταση

$$\lim_{\nu \to \infty} M\,1-\rho^{\nu} = 0.$$

Θα αποδείξουμε εδώ τη παρακάτω πρόταση από τα *Στοιχεία του Ευκλείδη (Στοιχεία XII.2)* σε εφαρμογή της «Μεθόδου της Εξάντλησης»

Ο λόγος των εμβαδών δύο κύκλων με διαμέτρους δ, Δ είναι ίσος με το λόγο $\frac{\delta^2}{\Delta^2}$

Απόδειξη

Έστω οι κύκλοι c, C με εμβαδά α, Α και διαμέτρους δ, Δ αντίστοιχα.
Θέλουμε να δείξουμε ότι $\frac{\alpha}{A} = \frac{\delta^2}{\Delta^2}$, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι δεν ισχύουν οι δύο άλλες δυνατές περιπτώσεις, $\frac{\alpha}{A} > \frac{\delta^2}{\Delta^2}$ και $\frac{\alpha}{A} < \frac{\delta^2}{\Delta^2}$.
Ας υποθέσουμε ότι $\frac{\alpha}{A} > \frac{\delta^2}{\Delta^2}$, τότε θα υπάρχει $\alpha^* < \alpha$ τέτοιο ώστε

$$\frac{\alpha^*}{A} = \frac{\delta^2}{\Delta^2}. \quad (1)$$

Έστω $\alpha-\alpha^{*}=\varepsilon>0$ εγγράφουμε κανονικά πολύγωνα με εμβαδά p_{ν}, P_{ν} στους κύκλους c, C . Διπλασιάζουμε τις πλευρές των κανονικών πολυγώνων, άρα θα αφαιρέσουμε από τα ενδιάμεσα εμβαδά περισσότερο από το μισό τους.

Οπότε σύμφωνα με την ιδιότητα της εξάντλησης, τα ενδιάμεσα εμβαδά με διαδοχικούς διπλασιασμούς των αριθμών των πλευρών μπορούν να ελαττωθούν μέχρι να είναι $\alpha-p_{\nu}<\varepsilon$.
Αφού όμως $\alpha-\alpha^{*}=\varepsilon>0$, θα είναι και $p_{\nu}>\alpha^{*}$(2).
Γνωρίζουμε όμως ότι $\frac{p_{\nu}}{P_{\nu}}=\frac{\delta^2}{\Delta^2}$ και λόγω της (1) θα είναι $\frac{\alpha^{*}}{A}=\frac{p_{\nu}}{P_{\nu}}$, οπότε λόγω της (2) θα πρέπει $P_{\nu}>A$ άτοπο, γιατί το P_{ν} είναι το εμβαδόν ενός κανονικού πολυγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο με εμβαδόν Α.
Όμοια αποδεικνύεται ότι δεν ισχύει η $\frac{\alpha}{A}<\frac{\delta^2}{\Delta^2}$, και έτσι το θεώρημα αποδείχτηκε.
Η πρόταση πού αποδείξαμε προηγουμένως είναι το πρώτο θεώρημα για μεγέθη καμπυλόγραμμων σχημάτων, και δίνει επάξια στον Εύδοξο, το τίτλο του πατέρα του ολοκληρωτικού λογισμού.

Αρχιμήδης

Πέρασε περίπου ένας αιώνας από την εποχή πού έζησε ο Εύδοξος για να εμφανιστεί ο **Αρχιμήδης (287 – 212π.Χ.).**

Από το έργο του, θα αναφερθούμε εν συντομία σε εκείνα στα οποία καταδεικνύεται η τεράστια επίδραση που είχε το έργο του σε όλους τους μεταγενέστερους θεμελιωτές του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Α. Στο έργο του ***Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου α΄ και β΄*** ανάμεσα σε πολλά άλλα έχει ανακαλύψει και αποδείξει ότι:

1) *Πρόταση 13*[3]*:* Παντὸς κυλίνδρου ὀρθοῦ ἡ ἐπιφάνεια χωρὶς τῆς βάσεως ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου καὶ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου.

Παντός ορθού κυλίνδρου η επιφάνεια χωρίς τη βάση είναι ίση με κύκλο, του οποίου η ακτίνα είναι μέση ανάλογος της πλευράς του κυλίνδρου (του ύψους) και της διαμέτρου της βάσης του κυλίνδρου.

2) *Πρόταση 33*[4]*:* Πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ.

---

[3] Ε. Σ. Σταμάτη, *Αρχιμήδους Απαντα*, Τόμος Α΄, Μέρος Β΄, Έκδοση Τεχνικού Επιμελητηρίου , Αθήνα 1970, σελ. 48.
[4] Ε. Σ. Σταμάτη, *Αρχιμήδους Απαντα*, Τόμος Α΄, Μέρος Β΄, Έκδοση Τεχνικού Επιμελητηρίου , Αθήνα 1970, σελ. 114.

Η επιφάνεια κάθε σφαίρας είναι τετραπλάσια του μεγίστου κύκλου αυτής. (Σχήμα 3)

3) *Πρόταση 34*[5]*:* Πᾶσα σφαῖρα τετραπλασία ἐστὶ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

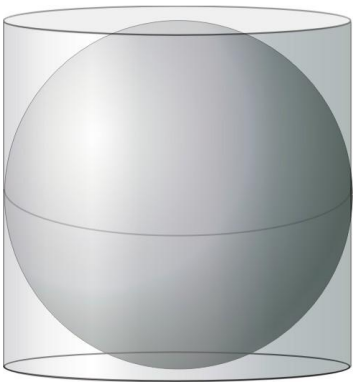
Κάθε σφαίρα είναι τετραπλάσια του κώνου πού έχει βάση ίση με το μέγιστο κύκλο της σφαίρας, και ύψος ίσο με την ακτίνα της.

Πορίσματα:
Προδεδειγμένων δὲ τούτων φανερὸν ὅτι πᾶς κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν μέγιστον κύκλον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας, ἡμιόλιός ἐστι τῆς σφαίρας καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ μετὰ τῶν βάσεων ἡμιολία
τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας[6].

Αφού απεδείχθησαν αυτά είναι φανερό ότι κάθε κύλινδρος που έχει βάση το μέγιστο κύκλο της σφαίρας, και ύψος ίσο με τη διάμετρο της σφαίρας, είναι τα 3/2 του όγκου της σφαίρας, και η κυρτή επιφάνεια αυτού μαζί με τις βάσεις είναι επίσης τα 3/2 της επιφάνειας της σφαίρας.

Έτσι συνέκρινε το εμβαδόν και τον όγκο μίας σφαίρας και ενός κυλίνδρου ο οποίος ήταν περιγεγραμμένος γύρω από αυτήν.

Το διάγραμμα *(Σχήμα 1)* του φημισμένου αυτού θεωρήματος, έχει χαραχθεί στον τάφο του που βρίσκεται στη Σικελία.



Σχήμα 1

Β. Στο έργο του ***Περί των Μηχανικών Θεωρημάτων, προς τον Ερατοσθένη Έφοδος (Μέθοδος),*** απαντά στο ερώτημα: Με ποιες διαισθητικές μεθόδους έφτανε στο προσδοκώμενο αποτέλεσμα, ώστε να εφαρμόζει μετά για την απόδειξη τη μέθοδο της

[5] Ε. Σ. Σταμάτη, *Αρχιμήδους Απαντα*, Τόμος Α', Μέρος Β', Έκδοση Τεχνικού Επιμελητηρίου , Αθήνα 1970, σελ. 118.
[6] Στο ίδιο σελ. 124.

εξάντλησης; Εκεί περιγράφει συστηματικά πως ανακάλυψε με την μηχανική μέθοδο τα αποτελέσματα, και πως τα απέδειξε στη συνέχεια γεωμετρικά.

Ὁρῶν δέ σε, καθάπερ λέγω, σπουδαῖον καὶ φιλοσοφίας προεστῶτα ἀξιολόγως καὶ τὴν ἐν τοῖς μαθήμασιν κατὰ τὸ ὑποπίπτον θεωρίαν τετιμηκότα ἐδοκίμασα γράψαι σοι καὶ εἰς τὸ αὐτὸ βιβλίον ἐξορίσαι τρόπου τινὸς ἰδιότητα, καθ' ὅν σοι παρεχόμενον ἔσται λαμβάνειν ἀφορμὰς εἰς τὸ δύνασθαί τινα τῶν ἐν τοῖς μαθήμασι θεωρεῖν διὰ τῶν μηχανικῶν. Τοῦτο δ πέπεισμαι χρήσιμον ε ναι οὐδ ν ἧσσον καὶ εἰς τὴν ἀπόδειξιν αὐτῶν τῶν θεωρημάτων. Καὶ γάρ τινα τῶν πρότερόν μοι φανέντων μηχανικῶς ὕστερον γεωμετρικῶς ἀπεδείχθη διὰ τὸ χωρὶς ἀποδείξεως ε ναι τὴν διὰ τούτου τοῦ τρόπου θεωρίαν· ἑτοιμότερον γάρ ἐστι προλαβόντα διὰ τοῦ τρόπου γνῶσίν τινα τῶν ζητημάτων πορίσασθαι τὴν ἀπόδειξιν μᾶλλον ἢ μηδενὸς ἐγνωσμένου ζητεῖν[7]...

«Βλέπω σε σένα όπως έχω ήδη πει ένα σπουδαίο περί την φιλοσοφία και έχοντα τιμήσει τη μαθηματική έρευνα, έκρινα ορθό να σου εκθέσω σε αυτό το βιβλίο και να καθορίσω μέθοδο, η οποία θα σου δίνει τη δυνατότητα να εξετάζεις μερικές μαθηματικές προτάσεις δια της μηχανικής. Είμαι δε πεπεισμένος ότι αυτό δεν είναι λιγότερο χρήσιμο και από την απόδειξη των ίδιων των θεωρημάτων. Διότι μερικά από αυτά τα οποία απέδειξα προηγουμένως μηχανικά αποδείχθηκαν και γεωμετρικά, διότι είναι ευκολότερο να βρει κανείς δια της μηχανικής μεθόδου κάτι για τα προβλήματα αυτά και μετά να βρει την γεωμετρική απόδειξη, παρά να ερευνά χωρίς να ξέρει τίποτα προηγουμένως…»

Ἡμῖν δ συμβαίνει καὶ τοῦ νῦν ἐκδιδομένου θεωρήματος τὴν εὕρεσιν ὁμοίαν ταῖς πρότερον γεγενῆσθαι· ἠβουλήθην δ τὸν τρόπον ἀναγράψας ἐξενεγκεῖν ἅμα μ ν καὶ διὰ τὸ προειρηκέναι ὑπ φ αὐτοῦ, μή τισιν δοκῶμεν κενὴν φωνὴν καταβεβλῆσθαι, ἅμα δ καὶ πεπεισμένος εἰς τὸ μάθημα οὐ μικρὰν ἂν συμβαλέσθαι χρείαν· ὑπολαμβάνω γάρ τινας ἢ τῶν ὄντων ἢ ἐπιγινομένων διὰ τοῦ ἀποδειχθέντος τρόπου καὶ ἄλλα θεωρήματα οὔπω ἡμῖν συνπαραπεπτωκότα εὑρήσειν.

«Συμβαίνει σε μένα η εύρεση του εκδιδομένου θεωρήματος να έχει γίνει όπως τα προηγούμενα και ήθελα να περιγράψω την μέθοδο αυτή για την οποία έχω ομιλήσει και προηγουμένως, για να μη φανεί ότι λέμε κενά λόγια και ότι είμαι πεπεισμένος ότι δεν προσφέρω μικρότερη υπηρεσία στα μαθηματικά. Νομίζω ότι μερικοί από τους συγχρόνους μου και τους μεταγενέστερους θα βρουν και άλλα θεωρήματα με τον τρόπο αυτό.»

Ο Αρχιμήδης από τον πρόλογο του έργου του *Τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής (παραβολής)* είχε αρχίσει να υπαινίσσεται πως είχε συλλάβει τα κυριότερα αποτελέσματα γράφοντας:

Ἀναγράψαντες οὖν αὐτοῦ τὰς ἀποδείξιας ἀποστέλλομες πρῶτον μ ν ὡς διὰ τῶν μηχανικῶν ἐθεωρήθη, μετὰ ταῦτα δ καὶ ὡς διὰ τῶν γεωμετρουμένων ἀποδείκνυται[8].

Αναγράψαντες λοιπόν του προβλήματος αυτού τας αποδείξεις τας αποστέλλομεν πρώτον μεν τας δια των μηχανικών μεθόδων, κατόπιν δε πως έγινε η απόδειξις δια των γεωμετρικών μεθόδων.

[7] Ε.Σ. Σταμάτη, *Αρχιμήδους Άπαντα*, Τόμος Β΄, Έκδοση Τεχνικού Επιμελητηρίου , Αθήνα 1973, σελ. 386.

[8] Ε.Σ. Σταμάτη, *Αρχιμήδους Άπαντα*, Τόμος Β΄, Έκδοση Τεχνικού Επιμελητηρίου , Αθήνα 1973, σελ. 220.

Γενική Περιγραφή της Μεθόδου της Εξάντλησης

Η βασική ιδέα όπως είδαμε είναι να προσεγγίσει το ζητούμενο **εμβαδόν Ε** ή **όγκο V** με εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα σχήματα —χωρία

1ο Βήμα

Ορίζει εμβαδά ή όγκους $\varepsilon_\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$ εγγεγραμμένων χωρίων και εμβαδά ή όγκους $E_\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$ περιγεγραμμένων χωρίων της ζητούμενης επιφάνειας ή του όγκου.

Τότε θα ισχύει: $$\varepsilon_\nu \le E \le E_\nu, \nu \in \mathbb{N}^* \qquad (1)$$

2ο Βήμα

Μαντεύει όπως είπαμε με **«μηχανικό»** τρόπο ένα αριθμό **C**, τέτοιο ώστε:

$$\varepsilon_\nu \le C \le E_\nu, \nu \in \mathbb{N}^* \qquad (2)$$

3ο Βήμα

Αποδεικνύει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\nu \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε $E_\nu - \varepsilon_\nu < \varepsilon$ και συμπεραίνει στο τέλος ότι $E = C$

Η απόδειξη του συμπεράσματος γίνεται με την μέθοδο της « **εις άτοπο απαγωγής**»

- **Έστω** $C > E$

Τότε για $\varepsilon = \dfrac{C-E}{2}$ θα υπάρχει $\nu \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε $E_\nu - \varepsilon_\nu < \dfrac{C-E}{2}$ **(3)**

Από τις σχέσεις **(1)** και **(2)** έχουμε $\varepsilon_\nu \le E < C \le E_\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$

Επομένως:

$$\left.\begin{matrix}\varepsilon_\nu \le E \\ C < E_\nu\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}-\varepsilon_\nu \ge -E \\ C < E_\nu\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}-E \le -\varepsilon_\nu \\ C < E_\nu\end{matrix}\right\} \Rightarrow C - E < E_\nu - \varepsilon_\nu < \frac{C-E}{2} \quad \textbf{(άτοπο)}$$

- **Έστω** $C < E$

Τότε για $\varepsilon = \dfrac{E-C}{2}$ θα υπάρχει $\nu \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε $E_\nu - \varepsilon_\nu < \dfrac{E-C}{2}$ **(3)**

Από τις σχέσεις **(1)** και **(2)** έχουμε $\varepsilon_\nu \le C < E \le E_\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$

Επομένως:

$$\left.\begin{matrix}\varepsilon_\nu \le C \\ E \le E_\nu\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}-\varepsilon_\nu \ge -C \\ E < E_\nu\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}-C \le -\varepsilon_\nu \\ E < E_\nu\end{matrix}\right\} \Rightarrow E - C < E_\nu - \varepsilon_\nu < \frac{E-C}{2} \quad \textbf{(άτοπο)}$$

Οπότε τελικά $E = C$

Εφαρμογή (Μέθοδος της εξάντλησης σε σύγχρονη διατύπωση)[9]

Θα δείξουμε ότι το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από τις $y=x^2, y=0$ **και τις ευθείες** $x=0$ **και** $x=\lambda\ (\lambda>0)$ **είναι ίσο με** $E=\frac{\lambda^3}{3}$

1ο Βήμα

● **Χωρίζουμε το διάστημα** $[0,\lambda]$ **σε ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους** $\Delta x=\frac{\lambda}{\nu}$ **με άκρα τα σημεία:** $x_0=0, x_1=\frac{\lambda}{\nu}, x_2=\frac{2\lambda}{\nu}, \ldots, x_{\nu-1}=\frac{(\nu-1)\lambda}{\nu}, x_\nu=\lambda$

Τα εσωτερικά ορθογώνια έχουν βάσεις ίσες με $\Delta x=\frac{\lambda}{\nu}$ και ύψη

$$\upsilon_0=0, \upsilon_1=\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^2, \ldots, \upsilon_{\nu-1}=\left(\frac{(\nu-1)\lambda}{\nu}\right)^2,$$

Ενώ τα **εξωτερικά ορθογώνια** έχουν βάσεις ίσες με $\Delta x=\frac{\lambda}{\nu}$ και ύψη

$$\upsilon_1=\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^2, \ldots, \upsilon_\nu=\left(\frac{\nu\lambda}{\nu}\right)^2.$$

Το άθροισμα των εμβαδών των εσωτερικών ορθογωνίων είναι

$$\varepsilon_\nu=\frac{\lambda}{\nu}\ \upsilon_0+\upsilon_1+\ldots+\upsilon_{\nu-1}\ =\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^3\ 1^2+2^2+\ldots+(\nu-1)^2$$

Το άθροισμα των εμβαδών των εξωτερικών ορθογωνίων είναι

$$E_\nu=\frac{\lambda}{\nu}\ \upsilon_1+\upsilon_2+\ldots+\upsilon_\nu\ =\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^3\ 1^2+2^2+\ldots+\nu^2$$

Επομένως $\varepsilon_\nu\le E\le E_\nu$

2ο Βήμα

Μαντεύουμε ότι $C=\frac{\lambda^3}{3}$ **δηλαδή** $\varepsilon_\nu\le\frac{\lambda^3}{3}\le E_\nu$

Ο Αρχιμήδης μαντεύει τον αριθμό αυτό με την «μηχανική» μέθοδο, εμείς θα το δούμε διαφορετικά.

Από την ταυτότητα $1^2+2^2+\ldots+\nu^2=\frac{\nu^3}{3}+\frac{\nu^2}{2}+\frac{\nu}{6}$ έχουμε

[9] «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών» Βασιλείου Ν. Γεωργίου

$$1^2+2^2+...+(\nu-1)^2=\frac{\nu^3}{3}-\frac{\nu^2}{2}+\frac{\nu}{6}$$ και

$$1^2+2^2+...+\nu^2=\frac{\nu^3}{3}+\frac{\nu^2}{2}+\frac{\nu}{6}>\frac{\nu^3}{3},\nu\in\mathbb{N}^*$$ ακόμα

$$1^2+2^2+...+(\nu-1)^2=\frac{\nu^3}{3}-\frac{\nu^2}{2}+\frac{\nu}{6}=\frac{\nu^3}{3}-\frac{\nu(3\nu-1)}{6}<\frac{\nu^3}{3},\nu\in\mathbb{N}^*$$

Επομένως $\varepsilon_\nu\le\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^3\frac{\nu^3}{3}\le E_\nu$ ή $\varepsilon_\nu\le\frac{\lambda^3}{3}\le E_\nu$

3ο Βήμα

Θα αποδείξουμε ότι κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\nu\in\mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε $E_\nu-\varepsilon_\nu<\varepsilon$

Είναι $E_\nu-\varepsilon_\nu=\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^3(1^2+2^2+...+\nu^2)-\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^3(1^2+2^2+...+(\nu-1)^2)=\frac{\lambda^3}{\nu}$

Από το θεώρημα Ευδόξου – Αρχιμήδη για τους θετικούς αριθμούς λ^3,ε υπάρχει $\nu\in\mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε $\nu\cdot\varepsilon>\lambda^3\Rightarrow\frac{\lambda^3}{\nu}<\varepsilon$.

Επομένως για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\nu=\left[\frac{\lambda^3}{\varepsilon}\right]+1$ τέτοιο ώστε $E_\nu-\varepsilon_\nu<\varepsilon$, άρα $E=\frac{\lambda^3}{3}$

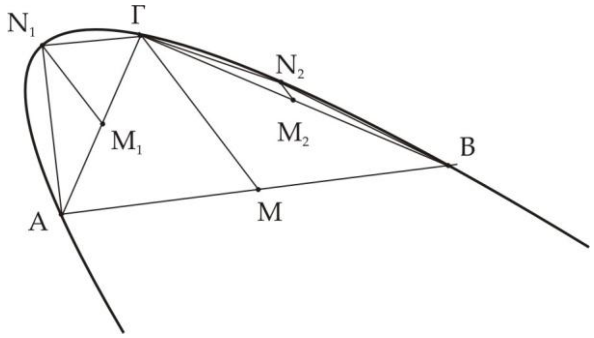
Γ. Στο έργο του ***Τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής (παραβολή),*** υπάρχει ένα από τα πιο χαρακτηριστικά παραδείγματα εφαρμογής της ***Μεθόδου της εξάντλησης.***

1) Πρόταση 24[10]*:* Πᾶν τμᾶμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἐπί τριτόν ἐστι τριγώνου τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον.

Παν τμήμα περιεχόμενο υπό ευθείας και παραβολής είναι τα τέσσερα τρίτα του τριγώνου που έχει την ίδια βάση προς αυτό και ίσο ύψος.

<u>Απόδειξη</u>

[10] Ε.Σ. Σταμάτη, *Αρχιμήδους Άπαντα*, Τόμος Β', Έκδοση Τεχνικού Επιμελητηρίου , Αθήνα 1973, σελ. 260.



Σχήμα 3

Ας είναι Ε το εμβαδόν του τμήματος της παραβολής που θέλουμε να τετραγωνίσουμε και Μ το μέσο της ΑΒ *(Σχήμα 3)*. Από το Μ φέρουμε παράλληλο προς τον άξονα της παραβολής που τέμνει την παραβολή στο Γ, υποθέτουμε Τ το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.
Από τα μέσα M_1, M_2 των πλευρών ΑΓ και ΒΓ φέρουμε παράλληλες προς την ΜΓ που τέμνουν τη παραβολή στα σημεία N_1, N_2.

Αποδεικνύεται ότι

$$\mathbf{AN_1\Gamma + BN_2\Gamma = \frac{1}{4}}\ \mathrm{T}.$$

Διχοτομώντας τα νέα ευθύγραμμα τμήματα και φέρνοντας παράλληλες προς τον άξονα της παραβολής θα τελικά προκύψει τελικά ότι:

$$E = T + \frac{1}{4}\ T + \frac{1}{4^2}\ T + \ldots + \frac{1}{4^n}\ T \ \cdots \ (1)$$

Με σύγχρονους όρους θα λέγαμε ότι το δεύτερο μέλος της (1) είναι ένα άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου με λόγο $\lambda = \frac{1}{4} < 1$ οπότε

$$E = \frac{4}{3}\ T.$$

Ο Αρχιμήδης, όμως, δεν κατέχει την έννοια «άπειρο άθροισμα των όρων μιας φθίνουσας γεωμετρικής προόδου»

Ηξερε όμως :
2) Πρόταση 23[11]*:* Εἴ κα μεγέθεα τεθέωντι ἑξῆς ἐν τῷ τετραπλασίονι λόγῳ, τὰ πάντα μεγέθεα καὶ ἔτι τοῦ ἐλαχίστου τὸ τρίτον μέρος ἐς τὸ αὐτὸ συντεθέντα ἐπίτριτα ἐσσοῦνται τοῦ μεγίστου.

[11] Ε.Σ. Σταμάτη, *Αρχιμήδους Άπαντα*, Τόμος Β', Έκδοση Τεχνικού Επιμελητηρίου , Αθήνα 1973, σελ. 258.

Εάν υπάρχωσι μεγέθη εις συνεχή φθίνουσα γεωμετρικήν πρόοδον με λόγον έν τέταρτον και όλα τα μεγέθη προστεθώσι και εις το άθροισμα προστεθή το έν τρίτον του μικρότερου όρου, το συνολικό άθροισμα θα είναι τα τέσσαρα τρίτα του μεγίστου όρου.

Ο Αρχιμήδης παίρνει ένα μερικό άθροισμα (άθροισμα των πέντε πρώτων όρων) και αποδεικνύει ότι διαφέρει από το $\frac{4}{3}$ Τ κατά ένα πολύ μικρό μέγεθος $\left(\frac{1}{3}T_4\right)$. Ο Αρχιμήδης ξέρει ότι αν πάρει περισσότερους όρους, το νέο άθροισμα θα διαφέρει από το $\frac{4}{3}$ Τ κατά ένα πολύ μικρότερο μέγεθος. Δηλαδή με σύγχρονους όρους: Για κάθε θετικό ακέραιο ε, υπάρχει ένα μερικό άθροισμα το οποίο διαφέρει από το $\frac{4}{3}$ Τ κατά ένα μέγεθος μικρότερο του ε. Το οποίο σημαίνει ότι αυτό το άπειρο άθροισμα ισούται με $\frac{4}{3}$ Τ.

Στο τελευταίο στάδιο της απόδειξης όπως το κάνει συχνά, ο Αρχιμήδης αποδεικνύει με διπλή άτοπο απαγωγή , ότι το Ε δεν μπορεί να είναι ούτε μικρότερο ούτε μεγαλύτερο από το $\frac{4}{3}$ Τ.

Το εμβαδόν για παράδειγμα τμήματος της παραβολής $y = x^2$ και της ευθείας $y=1$ θα είναι $\frac{4}{3}$, οπότε το χωρίο που περικλείεται από την παραβολή και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$, θα είναι $\frac{1}{3}$.

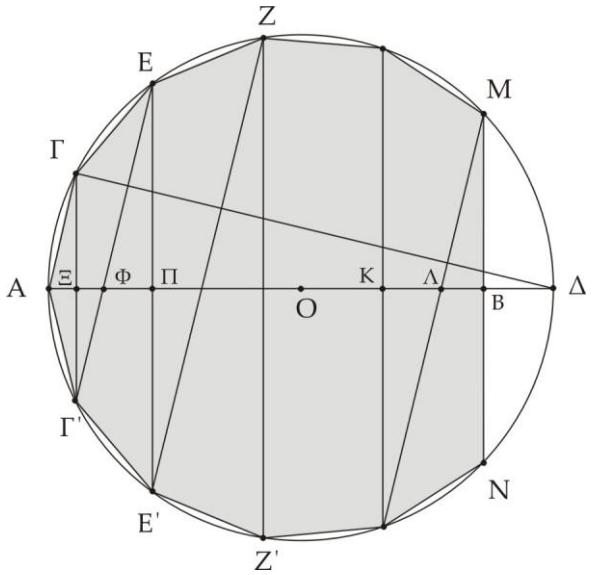
Δηλαδή με σύγχρονους όρους $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

Δ. *Πρόταση 33*[12]: Πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ.

Η επιφάνεια κάθε σφαίρας είναι τετραπλάσια του μεγίστου κύκλου αυτής. *(Σχήμα 3)*

[12] Ε. Σ. Σταμάτη, *Αρχιμήδους Άπαντα*, Τόμος Α', Μέρος Β', Έκδοση Τεχνικού Επιμελητηρίου , Αθήνα 1970, σελ. 114.

Απόδειξη



α) Θα χρειαστούμε το τύπο,

$$E = \pi\ell\ R + r \quad (*),$$

που δίνει το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας, ενός κόλουρου κώνου ακτίνων R, r και γενέτειρας ℓ.

β) Θα υπολογίσουμε το εμβαδόν του σφαιρικού τμήματος που προκύπτει από την περιστροφή του τόξου MAN κατά 360^0 περί την ΑΔ.

γ) Χωρίζουμε το τόξο MAN σε 2n ίσα τόξα μήκους ℓ το καθένα (*Σχήμα 3)*,
και φέρουμε τις χορδές Γ′Γ, Ε′Ε,..., Μ′Μ, οι οποίες είναι κάθετες στη διάμετρο ΑΔ στα σημεία Ξ, Π,…, Β αντίστοιχα.
Θέτουμε $ΓΞ = y_1$, $ΕΠ = y_2, \ldots,$ $ΜΒ = y_n$.
Το εμβαδόν του σφαιρικού τμήματος που παράγεται προσεγγίζεται από το άθροισμα των εμβαδών των εσωτερικών κόλουρων κώνων, που προκύπτουν από την περιστροφή της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας, η οποία λόγω της (*) θα είναι,

$$E = \pi\ 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n\ \ell \quad (1)$$

Στη συνέχεια ο Αρχιμήδης ενώνει τις απέναντι διαγώνιες κορυφές όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω Φ το σημείο τομής των ΞΠ, Γ′Ε, τότε από την ισότητα των τριγώνων ΑΓΞ, ΦΞΓ′, προκύπτει ότι ΑΞ = ΞΦ = x_1, όμοια
ΦΠ = $x_2, \ldots,$ $ΖΛ = x_{n-1}$, $ΒΛ = x_n$.
Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ είναι όμοιο με κάθε ένα από τα ορθογώνια τρίγωνα, ΑΓΞ, ΦΕΠ, . . . , ΛΒΜ, οπότε:

$$\frac{2x_1}{2y_1}=\frac{2x_2}{2y_2}=\frac{2x_3}{2y_3}=\cdots=\frac{2x_{n-1}}{2y_{n-1}}=\frac{x_n}{y_n}=\frac{\ell}{\Gamma\Delta},$$

άρα,

$$\frac{2x_1+2x_2+\cdots+2x_{n-1}+x_n}{2y_1+2y_2+\cdots 2y_{n-1}+y_n}=\frac{\ell}{\Gamma\Delta}=\frac{\ell}{\Gamma\Delta}.$$

Αφού όμως $2x_1+2x_2+\cdots+2x_{n-1}+x_n=AB$ η (1) γράφεται,

$$E=\pi\cdot\Gamma\Delta\cdot AB$$

Αν τώρα το $n\to\infty$, τότε $\ell\to 0$ οπότε $E_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma}=4\pi R^2$.

Παρατήρηση: Επειδή ο αριθμός των πλευρών του παραπάνω πολυγώνου είναι 2n αν υποθέσουμε ότι το τόξο MAN είναι α rad, τότε ισχύει:

$$2y_1+2y_2+\cdots+2y_{n-1}+y_n=2R\sin\frac{\alpha}{n}+2R\sin\frac{2\alpha}{n}+\cdots+2R\sin\frac{n-1\ \alpha}{n}+\sin\alpha$$

άρα ο Αρχιμήδης μπορούσε να υπολογίσει το $\sum_{k=1}^{n}\sin k\omega$.

Για R=1 έχουμε,

$$\sin\frac{\alpha}{n}+\sin\frac{2\alpha}{n}+\cdots+\sin\frac{n-1\ \alpha}{n}+\frac{1}{2}\sin\frac{n\alpha}{n}=\frac{1-\cos\alpha}{2}\cot\frac{\alpha}{2n}.$$

Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη με $\frac{\alpha}{n}$, τότε το πρώτο μέλος είναι ένα άθροισμα του Riemann για τη συνάρτηση $f(x)=\sin x$ στο διάστημα $0,\alpha$, και αφού $\lim_{n\to\infty}1-\cos\alpha\ \frac{\alpha}{2n}\cot\frac{\alpha}{2n}=1-\cos\alpha$, θα ισχύει,

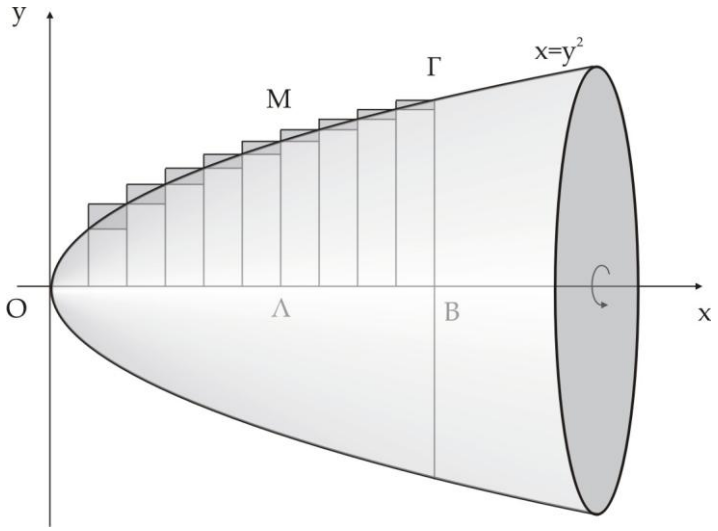
$$\int_0^{\alpha}\sin x dx=1-\cos\alpha.$$

Ε. Στο έργο του ***Περί κωνοειδέων και σφαιροειδέων*** βρήκε το εμβαδόν της έλλειψης, και μας έδειξε τον τρόπο για να υπολογίσουμε τον όγκο των σχημάτων τα οποία σχηματίζονται από την τομή επιπέδων καθέτων στον άξονα συμμετρίας επιφανειών, οι οποίες γεννιούνται από την περιστροφή μίας έλλειψης, μίας παραβολής ή ενός κλάδου μιας υπερβολής. Στις λύσεις χρησιμοποιεί τη μέθοδο της εξάντλησης, με ένα τρόπο ο οποίος προσεγγίζει βαθύτερα τον σύγχρονο ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος ως εξής. Εγγράφει και περιγράφει στο τμήμα που θέλει να υπολογίσει, στερεά σχήματα, «κυλίνδρους» ή «κόλουρους κώνους» τα οποία διαφέρουν όσο θέλει, οπότε κάνει τη διαφορά αυτή τόσο μικρή όσο χρειάζεται για να υπολογίσει το τμήμα που παρεμβάλλεται.

3) Στις προτάσεις 19-22, ασχολείται με τον πραγματικό σκοπό της πραγματείας, δηλαδή με τη μελέτη του όγκου των τμημάτων (ορθών ή κεκλιμένων) των δύο κωνοειδών και των σφαιροειδών αντίστοιχα.

Επειδή η διαδικασία υπολογισμού τμημάτων κομμένων από «παραβολοειδή» μοιάζει πολύ με τη σύγχρονη ολοκλήρωση, θα περιγράψουμε την παρακάτω περίπτωση.

Όγκος παραβολοειδούς = $\frac{1}{2}$ Όγκος κυλίνδρου *(Σχήμα 2)*



Σχήμα 2

α) Χωρίζει το ΟΒ σε n ίσα μέρη μήκους h, άρα $\mathbf{OB = n \cdot h}$

β) Χωρίζει τον όγκο σε εσωτερικούς και εξωτερικούς κυλίνδρους κάθε ένας από τούς οποίους έχει όγκο $\mathbf{V_k = \pi k h^2}$ με $\mathbf{k = 1, 2, \cdots, n-1}$.

γ) Ας συμβολίσουμε με V(I), V(J) το άθροισμα των όγκων των εσωτερικών και εξωτερικών κυλίνδρων αντίστοιχα και V τον όγκο του κυλίνδρου, τότε έχουμε

$$\frac{V\ I}{V} = \frac{\pi h^2\ 1+2+...+(n-1)}{\pi OB \cdot B\Gamma^2} = \frac{n-1}{2n} < \frac{1}{2} \quad (1)$$

και

$$\frac{V\ J}{V} = \frac{\pi h^2\ 1+2+...+n}{\pi OB \cdot B\Gamma^2} = \frac{n+1}{2n} > \frac{1}{2} \quad (2)$$

Αν συμβολίσουμε με $\mathcal{V}$ τον όγκο του παραβολοειδούς και υποθέσουμε ότι

$\mathcal{V} > \frac{1}{2}V$, τότε μπορούμε να επιλέξουμε n τέτοιο ώστε $\mathcal{V} > V(I) > \frac{1}{2}V$, άτοπο λόγω της (1). Αν υποθέσουμε ότι $\mathcal{V} < \frac{1}{2}V$, τότε μπορούμε να επιλέξουμε n τέτοιο ώστε $\mathcal{V} < V(J) < \frac{1}{2}V$, άτοπο λόγω (2).

Οπότε τελικά $\mathcal{V} = \frac{1}{2}V$.

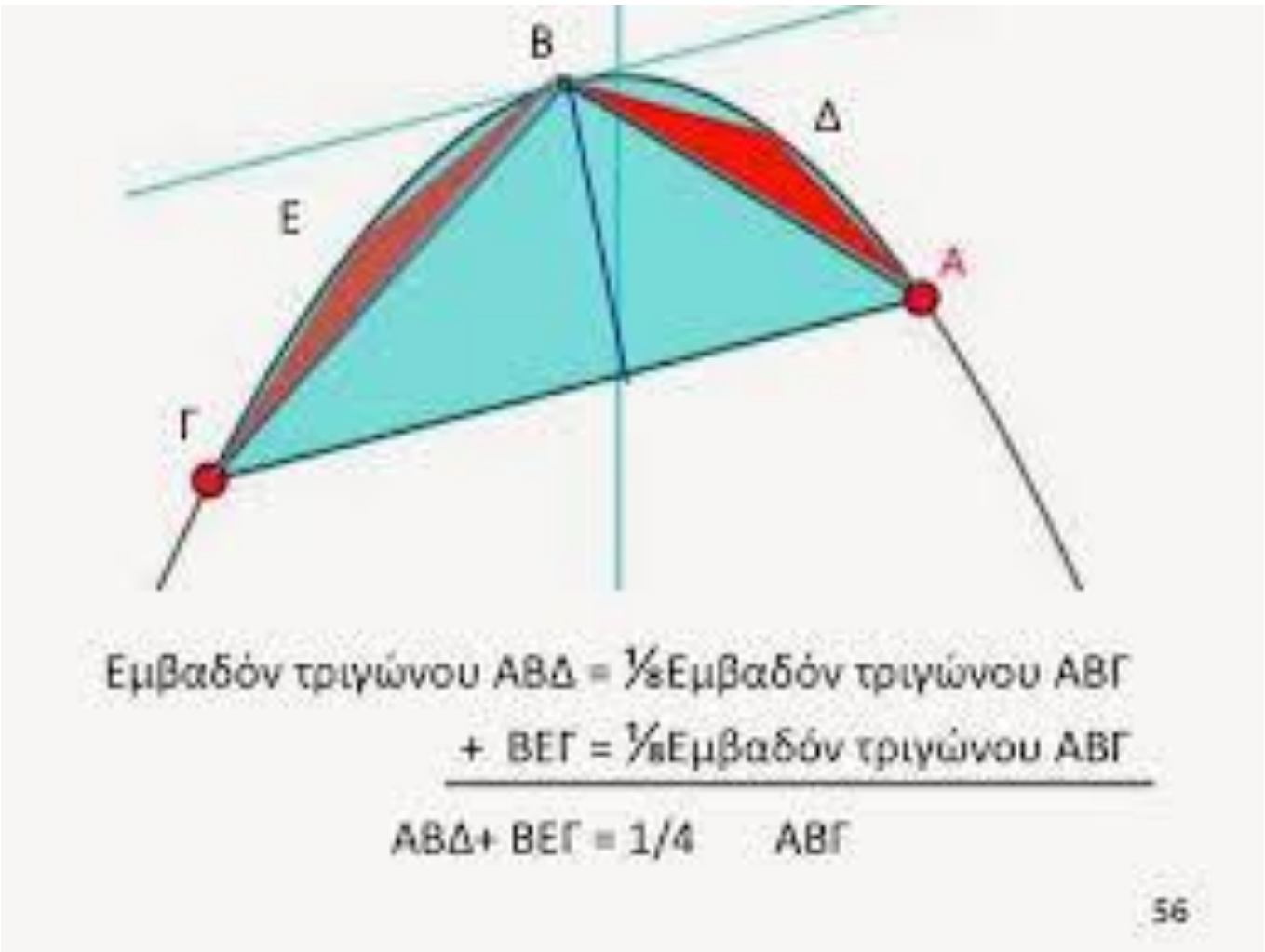
Με σύγχρονους όρους και συμβολισμούς θα λέγαμε.

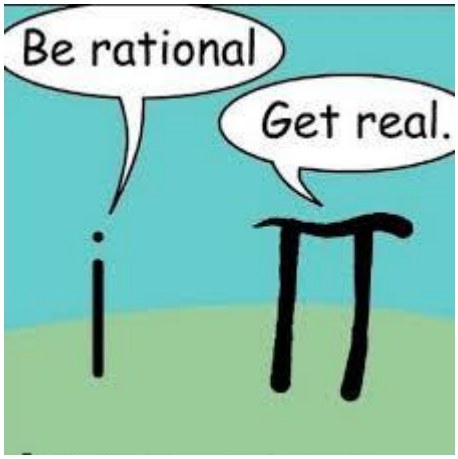
Έστω η παραβολή $y^2 = x,\ 0 \le x \le \alpha$.

Χωρίζουμε το διάστημα [0, α] σε n ίσα υποδιαστήματα x_{i-1}, x_i, $i = 1,2,...,n$, με $0 = x_o < x_1 < ... < x_n = \alpha$, και θα έχουμε $y_i^2 = x_i$,

$$V(I) = \pi\left(\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2\right)h = \sum_{i=1}^{n-1} \pi x_i h \quad \text{και} \quad V(J) = \pi\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)h = \sum_{i=1}^{n} \pi x_i h$$

Τα οποία είναι το ανώτερο και το κατώτερο άθροισμα Riemann για το ολοκλήρωμα $\int_0^\alpha \pi x dx = \frac{1}{2}V$, δηλαδή $\int_0^\alpha x dx = \frac{1}{2}\alpha^2$


Β
Δ
Ε
Α
Γ
Εμβαδόν τριγώνου ΑΒΔ = ¼Εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ
+ ΒΕΓ = ¼Εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ
ΑΒΔ+ ΒΕΓ = 1/4 ΑΒΓ
56


Be rational
Get real.