ΗΜΕΡΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Θέμα: Τεχνικές Ολοκλήρωσης

Εισηγητής: Κων/νος Λ. Κωνσταντόπουλος

Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

Ρέθυμνο 20 Φεβρουαρίου 2015

Πρότυπο Πειραματικό Λύκειο Ρεθύμνου

Α. Ολοκλήρωση ρητής συνάρτησης

Έστω μία ρητή συνάρτηση $R(x)=\frac{A(x)}{B(x)}$. Επειδή τα $A(x), B(x)$ είναι πολυώνυμα, η $R(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση σε κάθε διάστημα εκτός της ρίζας του παρανομαστή. Άρα σε αυτό το διάστημα είναι ολοκληρώσιμη.

Η ρητή συνάρτηση $R(x)=\frac{A(x)}{B(x)}$, γράφεται σαν άθροισμα ενός πολυωνύμου $\Pi(x)$ και μιας ρητής συνάρτησης $\frac{\upsilon(x)}{B(x)}$, όπου $\beta\alpha\theta\mu.\upsilon < \beta\alpha\theta\mu.\mathrm{B}$, δηλαδή: $R(x)=\frac{A(x)}{B(x)}=\Pi(x)+\frac{\upsilon(x)}{B(x)}$.

Κάθε τώρα ρητή συνάρτηση $\frac{\upsilon(x)}{B(x)}$, όπου $\beta\alpha\theta\mu.\upsilon < \beta\alpha\theta\mu.\mathrm{B}$, γράφεται σαν άθροισμα ρητών συναρτήσεων της μορφής:

$$\frac{\mathrm{A}}{(x-\rho)^n},\ \frac{Bx+\Gamma}{\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)^m},\ \text{όπου } n,m \in \mathrm{N}^* \text{ και } \beta^2-4\alpha\gamma<0,$$

που ονομάζονται απλά κλάσματα.

Το $B(x)$ αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβαθμίων και δευτεροβαθμίων πολυωνύμων με μιγαδικές ρίζες ως εξής:

$$B(x)=a(x-\rho_1)^{n_1}\ldots(x-\rho_k)^{n_k}.(a_1x^2+\beta_1x+\gamma_1)^{m_1}\ldots(a_\lambda x^2+\beta_\lambda x+\gamma_\lambda)^{m_\lambda}$$, όπου

$$\alpha,\rho_i,a_j,\beta_j,\gamma_j \in R,\ n_i,m_j \in \mathbb{Z},\ \beta_j^2-4a_j\gamma_j<0,\ n_i,m_j \geq 0.$$

Άρα το $\frac{\upsilon(x)}{B(x)}$ γράφεται ως εξής:

$$\frac{\upsilon(x)}{B(x)}=\frac{A_1}{x-\rho_1}+\frac{A_2}{x-\rho_2}+\ldots+\frac{A_n}{x-\rho_n}+\ldots+\frac{T_1}{x-\rho_k}+\frac{T_2}{(x-\rho_k)^2}+\ldots+\frac{T_{n_k}}{(x-\rho_k)^{n_k}}+$$

$$+\ldots+\frac{C_1x+D_1}{a_1x^2+\beta_1x+\gamma_1}+\ldots+\frac{C_{m_1}x+D_{m_1}}{(a_1x^2+\beta_1x+\gamma_1)^{m_1}}+\ldots+\frac{E_1x+Z_1}{a_\lambda x^2+\beta_\lambda x+\gamma_\lambda}+\ldots+\frac{E_{m_\lambda}x+Z_{m_\lambda}}{(a_\lambda x^2+\beta_\lambda x+\gamma_\lambda)^{m_\lambda}}.$$

Οπότε κάθε συνάρτηση $R(x)=\frac{A(x)}{B(x)}$ γράφεται ως εξής:

$$R(x)=\frac{A(x)}{B(x)}=\Pi(x)+\sum\frac{A}{(x-\rho)^n}+\sum\frac{Bx+\Gamma}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^m}.$$

Τα ολοκληρώματα: $\int \Pi(x)dx,\ \int \frac{\mathrm{A}}{(x-\rho)^n}dx,\ \int \frac{\mathrm{B}x+\Gamma}{\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)^m}dx$ είναι στοιχειώδεις συναρτήσεις, οπότε το $\int R(x)dx$ είναι στοιχειώδης συνάρτηση, που βρίσκεται αν γράψουμε αυτή τη ρητή συνάρτηση σαν άθροισμα απλών κλασμάτων και ολοκληρώσουμε αυτά.

ΜΕΘΟΔΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ

- **« Κλασική μέθοδος»**

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x^2+11}{(x-1)(x+2)(x+3)}dx.$$

Απάντηση Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+11}{(x-1)(x+2)(x+3)}$ γράφεται ως εξής:

$$\frac{x^2+11}{(x-1)(x+2)(x+3)}=\frac{\text{A}}{x-1}+\frac{\text{B}}{x+2}+\frac{\Gamma}{x+3} \qquad (1)$$

κάνοντας απαλοιφή παρανομαστών, έχουμε

$$x^2+11=\mathrm{A}(x^2+5x+6)+\mathrm{B}(x^2-x-3)+\Gamma(x^2+2x-3)\Leftrightarrow$$
$$x^2+11=x^2\left(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma\right)+x\left(5\mathrm{A}-\mathrm{B}+2\Gamma\right)+(6\mathrm{A}-3\mathrm{B}-3\Gamma)$$

Η τελευταία ισότητα μας δίνει: A=1, B=-5 και Γ=5.

Άρα

$$\int\frac{x^2+11}{(x-1)(x+2)(x+3)}dx=\int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{-5}{x+2}dx+\int\frac{5}{x+3}dx=\ln|x-1|-5\ln|x+2|+5\ln|x+3|+c$$

- **(Άλλη τεχνική).** Αν έχουμε $f(x)=\dfrac{h(x)}{g(x)}$ και

$g(x)=(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_k)$ $\mu\varepsilon$ $\rho_1\neq\rho_2\neq\ldots\neq\rho_k,\ \rho_i\in R$ τότε

$$f(x)=\frac{h(x)}{g(x)}=\frac{\mathrm{A}_1}{x-\rho_1}+\frac{\mathrm{A}_2}{x-\rho_2}+\ldots+\frac{\mathrm{A}_k}{x-\rho_k}$$

καθένας από τους συντελεστές $\mathrm{A}_m,\ m=1,2,\ldots,k$ υπολογίζονται ως εξής: $\mathrm{A}_m=\lim\limits_{x\to\rho_m}(x-\rho_m)\dfrac{h(x)}{g(x)},\ \ m=1,2,\ldots,k$

δηλαδή $\mathrm{A}_m=\dfrac{h(\rho_m)}{g'(\rho_m)},\ \ m=1,2,\ldots,k$

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x^2+11}{(x-1)(x+2)(x+3)}dx.$$

Απάντηση Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+11}{(x-1)(x+2)(x+3)}$ γράφεται ως εξής:

$$\frac{x^2+11}{(x-1)(x+2)(x+3)}=\frac{\mathrm{A}}{x-1}+\frac{\mathrm{B}}{x+2}+\frac{\Gamma}{x+3} \qquad (1)$$

$$\mathrm{A}=\lim_{x\to 1}\left[\cancel{(x-1)}\frac{x^2+11}{\cancel{(x-1)}(x+2)(x+3)}\right]=\frac{12}{12}=1$$

$$\mathrm{B}=\lim_{x\to -2}\left[\cancel{(x+2)}\frac{x^2+11}{(x-1)\cancel{(x+2)}(x+3)}\right]=\frac{15}{-3}=-5$$

$$\Gamma=\lim_{x\to -3}\left[\cancel{(x+3)}\frac{x^2+11}{(x-1)(x+2)\cancel{(x+3)}}\right]=\frac{20}{4}=5$$

ή αν $h(x)=x^2+11$ **και** $g'(x)=(x+2)(x+3)+(x-1)(x+3)+(x-1)(x+2)$

τότε έχουμε ($\mathrm{A}_m=\dfrac{h(\rho_m)}{g'(\rho_m)},\ m=1,2,\ldots,k$ **):**

$$\mathrm{A}=\frac{h(1)}{g'(1)}=\frac{1^2+11}{3.4}=\frac{12}{12}=1$$

$$\mathrm{B}=\frac{h(-2)}{g'(-2)}=\frac{(-2)^2+11}{-3\cdot 1}=\frac{15}{-3}=-5$$

$$\Gamma=\frac{h(-3)}{g'(-3)}=\frac{(-3)^2+11}{-4\cdot(-1)}=\frac{20}{4}=5$$

Άρα

$$\int\frac{x^2+11}{(x-1)(x+2)(x+3)}dx=\int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{-5}{x+2}dx+\int\frac{5}{x+3}dx=\ln|x-1|-5\ln|x+2|+5\ln|x+3|+c$$

- Αν έχουμε $f(x)=\dfrac{h(x)}{g(x)}$ και

$g(x)=(x-\rho_1)^p(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_k)$ $\mu\varepsilon$ $\rho_1\neq\rho_2\neq\ldots\neq\rho_k,\ \rho_i\in R$ τότε

$$f(x)=\frac{h(x)}{g(x)}=\frac{\mathrm{A}_{11}}{(x-\rho_1)^p}+\frac{\mathrm{A}_{12}}{(x-\rho_1)^{p-1}}+\ldots+\frac{\mathrm{A}_{1p}}{x-\rho_1}+\frac{\mathrm{A}_2}{x-\rho_2}+\ldots+\frac{\mathrm{A}_k}{x-\rho_k}$$

Οι συντελεστές υπολογίζονται ως εξής:

$$\mathrm{A}_{11}=\left[\left(x-\rho_1\right)^p\frac{h(x)}{\left(x-\rho_1\right)^p(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_k)}\right]_{x=\rho_1}$$

$$\mathrm{A}_{12}=\frac{d}{dx}\left[\left(x-\rho_1\right)^p f(x)\right]_{x=\rho_1}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\mathrm{A}_{1p}=\frac{1}{(p-1)!}\left[\frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}[\left(x-\rho_1\right)^p f(x)]\right]_{x=\rho_1}$$

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{3x^4-2x^3-17x^2+x+109}{(x+3)^2(x-2)^3}dx.$$

Απάντηση Η συνάρτηση γράφεται:

$$\frac{3x^4-2x^3-17x^2+x+109}{(x+3)^2(x-2)^3}=\frac{\text{A}}{x+3}+\frac{\text{B}}{(x+3)^2}+\frac{\Gamma}{x-2}+\frac{\Delta}{(x-2)^2}+\frac{\text{E}}{(x-2)^3}, \quad (1)$$

- ✓ Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $(x+3)^2$ και θέτοντας x=-3, έχουμε:

$$\left.\frac{3x^4-2x^3-17x^2+x+109}{(x-2)^3}\right|_{x=-3}=\text{A}(x+3)\Big|_{x=-3}+\text{B}+\left.\frac{\Gamma}{x-2}(x+3)^2\right|_{x=-3} \quad .....(2)$$

$$\Rightarrow \frac{243+54-153-3+109}{-125}=\text{B}\Rightarrow \text{B}=-2.$$

- ✓ Για να βρούμε το Α παραγωγίζουμε μία φορά την (2) και θέτουμε x=-3, δηλαδή:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3x^4-2x^3-17x^2+x+109}{(x-2)^3}\right)_{x=-3}=\mathrm{A}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{A}=\left.\frac{\left(12x^3-6x^2-34x+1\right)\left(x-2\right)-3\left(3x^4-2x^3-17x^2+x+109\right)}{\left(x-2\right)^4}\right|_{x=-3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{A}=\frac{-275\cdot(-5)-3\cdot 250}{625}\Rightarrow \mathrm{A}=1$$

- ✓ Το Ε βρίσκεται όπως το Β, δηλαδή:

$$\mathrm{E}=\left.\frac{3x^4-2x^3-17x^2+x+109}{\left(x+3\right)^2}\right|_{x=2}\Rightarrow \mathrm{E}=3.$$

✓ Όμοια: $\Delta = \frac{d}{dx}\left[\frac{3x^4 - 2x^3 - 17x^2 + x + 109}{(x+3)^2}\right]_{x=2} = \ldots\ldots. \Rightarrow \Delta = -1.$

✓ $\Gamma = \frac{d^2}{dx}\left[\frac{3x^4 - 2x^3 - 17x^2 + x + 109}{(x+3)^2}\right]_{x=2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{6x^4 + 34x^3 - 18x^2 - 103x - 215}{(x+3)^3}\right]_{x=2} \Rightarrow \Gamma = 4$

Άρα $\frac{3x^4 - 2x^3 - 17x^2 + x + 109}{(x+3)^2(x-2)^3} = \frac{1}{x+3} - \frac{2}{(x+3)^2} + \frac{4}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{3}{(x-2)^3}$

Οπότε:

$$\int \frac{3x^4 - 2x^3 - 17x^2 + x + 109}{(x+3)^2(x-2)^3}dx = \int \frac{1}{x+3}dx - \int \frac{2}{(x+3)^2}dx + \int \frac{4}{x-2}dx - \int \frac{1}{(x-2)^2}dx + \int \frac{3}{(x-2)^3}dx =$$

$$= \ln|x+3| + 2(x+3)^{-1} + 4\ln|x-2| + (x-2)^{-1} - \frac{3}{2}(x-2)^{-2} + c$$

- **« Αντικατάσταση»**

Παράδειγμα 1: $f(x)=\dfrac{x^2-1}{(x+2)^4}$

Απάντηση: Έχουμε $\dfrac{x^2-1}{(x+2)^4}=\dfrac{A_1}{x+2}+\dfrac{A_2}{(x+2)^2}+\dfrac{A_3}{(x+2)^3}+\dfrac{A_4}{(x+2)^4}$ (1)

Θέτουμε $x+2=\omega \Rightarrow x=\omega-2$, οπότε η (1) γίνεται:

$$\frac{(\omega-2)^2-1}{\omega^4}=\frac{A_1}{\omega}+\frac{A_2}{\omega^2}+\frac{A_3}{\omega^3}+\frac{A_4}{\omega^4} \quad (2)$$

Αλλά $\dfrac{(\omega-2)^2-1}{\omega^4}=\dfrac{\omega^2-4\omega+4-1}{\omega^4}=\dfrac{\omega^2-4\omega+3}{\omega^4}=\dfrac{1}{\omega^2}+\dfrac{-4}{\omega^3}+\dfrac{3}{\omega^4}$ (3)

Από (2) και (3) έχουμε: $A_1=0,\ A_2=1,\ A_3=-4,\ A_4=3$ Οπότε:

$$\frac{x^2-1}{(x+2)^4}=\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{-4}{(x+2)^3}+\frac{3}{(x+2)^4}$$

Παράδειγμα 2: $\int \frac{x+5}{(x-1)^3(1+x^2)}dx$

Απάντηση: $\frac{x+5}{(x-1)^3(1+x^2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{Bx+\Gamma}{1+x^2}$ (1)

Θέτουμε $x-1=\omega \Rightarrow x=\omega+1$, οπότε η (1) γίνεται:

$$\frac{6+\omega}{\omega^3(\omega^2+2\omega+2)} = \frac{A_1}{\omega} + \frac{A_2}{\omega^2} + \frac{A_3}{\omega^3} + \frac{B\omega+(B+\Gamma)}{\omega^2+2\omega+2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{6+\omega}{2+2\omega+\omega^2} = \left(A_1\omega^2 + A_2\omega + A_3\right) + \frac{B\omega+(B+\Gamma)}{\omega^2+2\omega+2}\cdot\omega^3 \qquad (2)$$

Παρατηρούμε ότι το $A_1\omega^2 + A_2\omega + A_3$ είναι το δευτεροβάθμιο πηλίκο της διαίρεσης του $6+\omega$ δια του $2+2\omega+\omega^2$ διατεταγμένα κατά τις ανιούσες δυνάμεις του ω .

Η διαίρεση μας δίνει:

$$\frac{6+\omega}{2+2\omega+\omega^2} = \left(\omega^2 - \frac{5}{2}\omega + 3\right) + \frac{\frac{1}{2}-\omega}{\omega^2+2\omega+2}\cdot\omega^3 \quad (3)$$

Έχοντας υπ΄ όψιν και την (2):

$$\frac{6+\omega}{2+2\omega+\omega^2} = \left(A_1\omega^2 + A_2\omega + A_3\right) + \frac{B\omega + (B+\Gamma)}{\omega^2+2\omega+2}\cdot\omega^3$$, έχουμε:

$$A_1 = 1,\ \ A_2 = -\frac{5}{2},\ \ A_3 = 3,\ \ B = -1,\ \ B + \Gamma = \frac{1}{2}$$

Οπότε: $$\frac{x+5}{(x-1)^3(1+x^2)} = \frac{1}{x-1} + \frac{-5/2}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x-1)^3} + \frac{-x+3/2}{1+x^2}$$

Άρα

$$\int \frac{x+5}{(x-1)^3(1+x^2)}dx = \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{-5/2}{(x-1)^2}dx + \int \frac{3}{(x-1)^3}dx + \int \frac{-x+3/2}{1+x^2}dx =$$

$$= \ln|x-1| + \frac{5/2}{x-1} + \frac{-3/2}{(x-1)^2} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{3}{2}\tau o\xi\varepsilon\varphi x + c$$

Β. ΜΟΡΦΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

I. $\int \Pi(x)\cdot e^{\alpha x}dx$

II. $\int \eta\mu(\beta x+\gamma)\cdot e^{\alpha x}dx,$ $\int \sigma\upsilon\nu(\beta x+\gamma)\cdot e^{\alpha x}dx$

III. $\int \Pi(x)\cdot \eta\mu(\beta x+\gamma)dx,$ $\int \Pi(x)\cdot \sigma\upsilon\nu(\beta x+\gamma)dx$ **,** $\Pi(x)$ ό= $\pi o\lambda\upsilon$ $\nu\upsilon\mu o$

IV. $\int \Pi(x)\cdot \eta\mu(\beta x+\gamma)\cdot e^{\alpha x}dx,$ $\int \Pi(x)\cdot \sigma\upsilon\nu(\beta x+\gamma)\cdot e^{\alpha x}dx$

V. $\int R(x)\cdot \ln\sigma(x)dx$**,** $R(x)$ ή, $\sigma(x)$ ό= $\rho\eta\tau$ $\sigma\upsilon\nu$ $\rho\tau\eta\sigma\eta$

VI. $\int R(x)\cdot \tau o\xi\eta\mu x dx$ και **VII.** $\int R(x)\cdot \tau o\xi\varepsilon\varphi\sigma(x)dx$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΑΝΩΤΕΡΩ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

Ι. 1η Περίπτωση. $\int \Pi(x)\cdot e^{ax}dx = \frac{1}{a}\int \Pi(x)\left(e^{ax}\right)' dx = \frac{1}{a}\Pi(x)e^{ax} - \frac{1}{a}\int \Pi'(x)e^{ax}dx \quad (1)$

Το $\Pi'(x)$ είναι πολυώνυμο με βαθμό κατά μία μονάδα μικρότερο του βαθμού του $\Pi(x)$.

Με διαδοχικές ολοκληρώσεις κατά παράγοντες θα έχουμε:

$$\int \Pi(x)\cdot e^{ax}dx = \frac{1}{a}\int \Pi(x)\left(e^{ax}\right)' dx = \frac{1}{a}\Pi(x)e^{ax} - \frac{1}{a}\int \Pi'(x)e^{ax}dx =$$

$$= \frac{1}{a}\Pi(x)e^{ax} - \frac{1}{a^2}\Pi'(x)e^{ax} + \frac{1}{a^2}\int \Pi''(x)e^{ax}dx =$$

$$= \ldots\ldots = \frac{1}{a}\Pi(x)e^{ax} - \frac{1}{a^2}\Pi'(x)e^{ax} + \ldots + \int e^{ax}dx = \frac{1}{a}\Pi(x)e^{ax} - \frac{1}{a^2}\Pi'(x)e^{ax} + \ldots + \frac{1}{a}e^{ax} =$$

$$= e^{ax}\left(\frac{1}{a}\Pi(x) - \frac{1}{a^2}\Pi'(x) + \ldots + \frac{1}{a}\right) = \Pi_1(x)\cdot e^{ax}$$

Άρα $\int \Pi(x)\cdot e^{ax}dx = \Pi_1(x)\cdot e^{ax}$, όπου $\Pi_1(x)$ πολυώνυμο ίσου βαθμού με το $\Pi(x)$. Οι συντελεστές του $\Pi_1(x)$ υπολογίζονται με παραγώγιση των 2 μελών, εξισώνοντας τους συντελεστές των ίσων δυνάμεων του x και λύνοντας το σχηματιζόμενο σύστημα.

Παράδειγμα 1: $\int (2x+1)\cdot e^{3x}dx = (ax+\beta)\cdot e^{3x}$ και παραγωγίζοντας

$$(2x+1)e^{3x} = (ax+\beta)'\cdot e^{3x} + (ax+\beta)\cdot (e^{3x})' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2x+1)\cancel{e^{3x}} = (3ax+3\beta+a)\cancel{e^{3x}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a = 2 \\ 3\beta + a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2/3 \\ \beta = 1/9 \end{cases}$$

Άρα $\int (2x+1)\cdot e^{3x}dx = \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right)\cdot e^{3x} + c$

Παράδειγμα 2: $\int (5x^2 - 8x + 13)e^{5x}dx = \left(ax^2 + \beta x + \gamma\right)e^{5x}$

και παραγωγίζοντας:

$$(5x^2 - 8x + 13)e^{5x} = \left(2ax + \beta\right)e^{5x} + 5\left(ax^2 + \beta x + \gamma\right)e^{5x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow (5x^2 - 8x + 13)e^{5x} = \left[5ax^2 + \left(2a + 5\beta\right)x + \left(\beta + \gamma\right)\right]e^{5x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5a = 5 \\ 2a + 5\beta = -8 \\ \beta + 5\gamma = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ \beta = -2 \\ \gamma = 3 \end{cases}$$

Άρα $\int (5x^2 - 8x + 13)e^{5x}dx = \left(x^2 - 2x + 3\right)e^{5x} + c$

➢ Σχηματική μέθοδος

Μία σχηματική μέθοδος για την ολοκλήρωση κατά παράγοντες του γινομένου 2 συναρτήσεων του x θα παρουσιάσουμε στα επόμενα παραδείγματα.

Παράδειγμα 1: Το γινόμενο δύναμης του x με μία τριγωνομετρική συνάρτηση του x μπορεί να υπολογιστεί ακριβώς.

$$\mathrm{I}_1 = \int x^5 \cdot \sigma\upsilon\nu x dx$$

Έστω $f(x) = x^5$ $\kappa\alpha\iota$ $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$.

Γράφουμε τις παραγώγους της f ως προς x σε μία στήλη και τα ολοκληρώματα της g ως προς x σε

δεύτερη στήλη, συνεχίζοντας μέχρι την γραμμή όπου η $f^{(n)}$ γίνεται 0.

x^5		συνx
	+	
$5x^4$		ημx
	-	
$20x^3$		-συνx
	+	
$60x^2$		-ημx
	-	
$120x$		συνx
	+	
120		ημx
	-	
0		-συνx

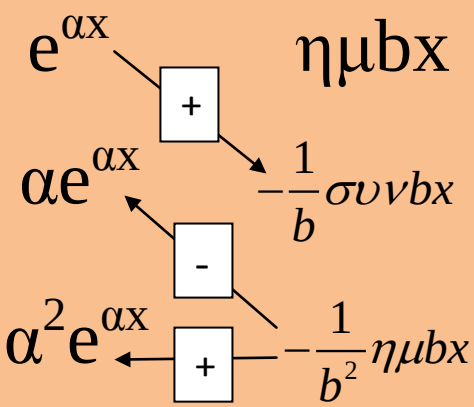
Οπότε:

$$I_1=x^5\eta\mu x+5x^4\sigma\upsilon\nu x-20x^3\eta\mu x-60x^2\sigma\upsilon\nu x+120x\eta\mu x+120\sigma\upsilon\nu x+c$$

Παράδειγμα 2: Το γινόμενο μιας εκθετικής συνάρτησης με μία τριγωνομετρική

$$\mathrm{I}_2 = \int e^{\alpha x} \eta\mu bx dx$$

Έστω $f(x) = e^{\alpha x}$ και $g(x) = \eta\mu bx$. Δουλεύουμε όπως στο παράδειγμα 1, αλλά συνεχίζουμε ως τη γραμμή όπου το γινόμενο $f^{(n)} \cdot g_n$ είναι σταθερό πολλαπλάσιο του δοθέντος.

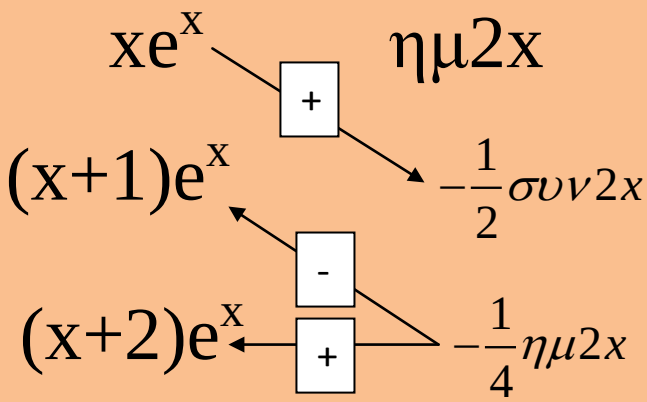


$$\mathrm{I}_2=\int e^{ax}\eta\mu bxdx=-\frac{1}{b}e^{ax}\sigma\upsilon\nu bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\eta\mu bx-\frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\eta\mu bxdx\Rightarrow$$

$$\mathrm{I}_2=\int e^{ax}\eta\mu bxdx=-\frac{1}{b}e^{ax}\sigma\upsilon\nu bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\eta\mu bx-\frac{a^2}{b^2}\mathrm{I}_2\Rightarrow$$

$$\mathrm{I}_2+\frac{a^2}{b^2}\mathrm{I}_2=e^{ax}\left(-\frac{1}{b}\sigma\upsilon\nu bx+\frac{a}{b^2}\eta\mu bx\right)\Rightarrow \mathrm{I}_2=\frac{e^{ax}\left(-b\sigma\upsilon\nu bx+a\eta\mu bx\right)}{a^2+b^2}+c$$

Παράδειγμα 3: $\mathrm{I}_3=\int xe^x\eta\mu 2xdx$



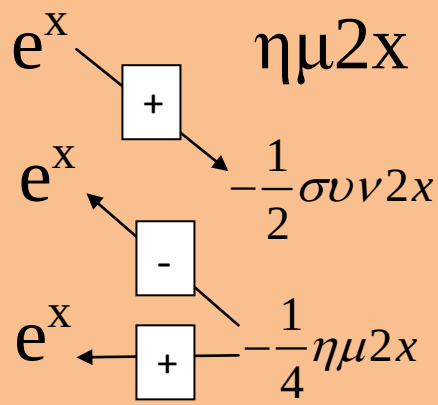
$$\mathrm{I}_3 = -\frac{1}{2}xe^x\sigma\upsilon\nu 2x + \frac{1}{4}e^x(x+1)\eta\mu 2x - \frac{1}{4}\int (x+2)e^x\eta\mu 2xdx \Rightarrow$$

$$\mathrm{I}_3 = -\frac{1}{2}xe^x\sigma\upsilon\nu 2x + \frac{1}{4}e^x(x+1)\eta\mu 2x - \frac{1}{4}\underbrace{\int xe^x\eta\mu 2xdx}_{\mathrm{I}_3} - \frac{1}{2}\int e^x\eta\mu 2xdx \Rightarrow$$

$$\mathrm{I}_3 + \frac{1}{4}\mathrm{I}_3 = -\frac{1}{2}xe^x\sigma\upsilon\nu 2x + \frac{1}{4}e^x(x+1)\eta\mu 2x - \frac{1}{2}\int e^x\eta\mu 2xdx \Rightarrow$$

$$\mathrm{I}_3 = -\frac{2}{5}xe^x\sigma\upsilon\nu 2x + \frac{1}{5}e^x(x+1)\eta\mu 2x - \frac{2}{5}\underbrace{\int e^x\eta\mu 2xdx}_{\mathrm{I}} \quad (1)$$

Έστω $\mathrm{I} = \int e^x\eta\mu 2xdx$



$$\mathrm{I}=\int e^{x}\eta\mu 2xd\ =-\frac{1}{2}e^{x}\sigma\upsilon\nu 2x+\frac{1}{4}e^{x}\eta\mu 2x-\frac{1}{4}\int e^{x}\eta\mu 2xd\ \Rightarrow$$

$$\mathrm{I}=-\frac{1}{2}e^{x}\sigma\upsilon\nu 2x+\frac{1}{4}e^{x}\eta\mu 2x-\frac{1}{4}\mathrm{I}\Rightarrow\ \mathrm{I}=-\frac{2}{5}e^{x}\sigma\upsilon\nu 2x+\frac{1}{5}e^{x}\eta\mu 2x\quad(2)$$

$$(1)\overset{(2)}{\Rightarrow}\ \mathrm{I}_3=-\frac{2}{5}xe^{x}\sigma\upsilon\nu 2x+\frac{1}{5}e^{x}(x+1)\eta\mu 2x+\frac{4}{25}e^{x}\sigma\upsilon\nu 2x-\frac{2}{25}e^{x}\eta\mu 2x\Rightarrow$$

$$\mathrm{I}_3=\frac{e^{x}}{25}\left[(3+5x)\eta\mu 2x+(4-10x)\sigma\upsilon\nu 2x\right]+c$$

Βιβλιογραφία:

[1] J.B.Reynolds, Undetermined coefficients in integration, *American Mathematical Monthly*, vol. 54 (1947), pp. 37-38.

[2] K.W.Folley, Integration by parts, *American Mathematical Monthly*, vol. 54 (1947), pp. 542-543.

[3] M.R.Spiegel, Partial fractions with repeated linear or quadratic factors, *American Mathematical Monthly*, vol. 57 (1950), pp. 180-181.

[4] Δ. Στρατηγόπουλος, Ανώτερα Μαθηματικά, Κλασσική Ανάλυση, *Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών*, Πάτρα 1989.