ΔΙΗΜΕΡΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Θέμα: Τεχνικές Ολοκλήρωσης

Εισηγητής: Κων/νος Λ. Κωνσταντόπουλος

Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

Ηράκλειο 7-8 Μαρτίου 2014 – ΠΕΚ

Α. Ολοκλήρωση ρητής συνάρτησης

Έστω μία ρητή συνάρτηση $R(x)=\frac{A(x)}{B(x)}$. Επειδή τα $A(x), B(x)$ είναι πολυώνυμα, η $R(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση σε κάθε διάστημα εκτός της ρίζας του παρανομαστή. Άρα σε αυτό το διάστημα είναι ολοκληρώσιμη.

Η ρητή συνάρτηση $R(x)=\frac{A(x)}{B(x)}$, γράφεται σαν άθροισμα ενός πολυωνύμου $\Pi(x)$ και μιας ρητής συνάρτησης $\frac{\upsilon(x)}{B(x)}$, όπου $\beta\alpha\theta\mu.\upsilon<\beta\alpha\theta\mu.\mathrm{B}$, δηλαδή: $R(x)=\frac{A(x)}{B(x)}=\Pi(x)+\frac{\upsilon(x)}{B(x)}$.

Κάθε τώρα ρητή συνάρτηση $\frac{\upsilon(x)}{B(x)}$, όπου $\beta\alpha\theta\mu.\upsilon < \beta\alpha\theta\mu.\mathrm{B}$, γράφεται σαν άθροισμα ρητών συναρτήσεων της μορφής:

$$\frac{\mathrm{A}}{(x-\rho)^n},\quad \frac{Bx+\Gamma}{\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)^m},\quad \acute{o}\pi o\upsilon\ n,m\in \mathrm{N}^*\ \kappa\alpha\iota\ \beta^2-4\alpha\gamma<0,$$

που ονομάζονται απλά κλάσματα.

Το $B(x)$ αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβαθμίων και δευτεροβαθμίων πολυωνύμων με μιγαδικές ρίζες ως εξής:

$$B(x)=a(x-\rho_1)^{n_1}...(x-\rho_k)^{n_k}.(a_1x^2+\beta_1x+\gamma_1)^{m_1}...(a_\lambda x^2+\beta_\lambda x+\gamma_\lambda)^{m_\lambda}$$, όπου

$\alpha,\rho_i,a_j,\beta_j,\gamma_j\in R,\ n_i,m_j\in\mathbb{Z},\ \beta_j^2-4a_j\gamma_j<0,\ n_i,m_j\geq 0.$

Άρα το $\frac{\upsilon(x)}{B(x)}$ γράφεται ως εξής:

$$\frac{\upsilon(x)}{B(x)} = \frac{A_1}{x-\rho_1} + \frac{A_2}{x-\rho_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-\rho_n} + \ldots + \frac{T_1}{x-\rho_k} + \frac{T_2}{(x-\rho_k)^2} + \ldots + \frac{T_{n_k}}{(x-\rho_k)^{n_k}} +$$

$$+ \ldots + \frac{C_1 x + D_1}{a_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1} + \ldots + \frac{C_{m_1} x + D_{m_1}}{(a_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{m_1}} + \ldots + \frac{E_1 x + Z_1}{a_\lambda x^2 + \beta_\lambda x + \gamma_\lambda} + \ldots + \frac{E_{m_\lambda} x + Z_{m_\lambda}}{(a_\lambda x^2 + \beta_\lambda x + \gamma_\lambda)^{m_\lambda}}.$$

Οπότε κάθε συνάρτηση $R(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ γράφεται ως εξής:

$$R(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \Pi(x) + \sum \frac{A}{(x-\rho)^n} + \sum \frac{Bx + \Gamma}{(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^m}.$$

Τα ολοκληρώματα: $\int \Pi(x)dx,\ \int \frac{\mathrm{A}}{(x-\rho)^n}dx,\ \int \frac{\mathrm{B}x+\Gamma}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^m}dx$ είναι στοιχειώδεις συναρτήσεις, οπότε το $\int R(x)dx$ είναι στοιχειώδης συνάρτηση, που βρίσκεται αν γράψουμε αυτή τη ρητή συνάρτηση σαν άθροισμα απλών κλασμάτων και ολοκληρώσουμε αυτά.

ΜΕΘΟΔΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ

- **« Κλασική μέθοδος»**

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x^2+11}{(x-1)(x+2)(x+3)}dx.$$

Απάντηση Η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2+11}{(x-1)(x+2)(x+3)}$ γράφεται ως εξής:

$$\frac{x^2+11}{(x-1)(x+2)(x+3)}=\frac{\mathrm{A}}{x-1}+\frac{\mathrm{B}}{x+2}+\frac{\Gamma}{x+3} \qquad (1)$$

κάνοντας απαλοιφή παρανομαστών, έχουμε

$$x^2+11=\mathrm{A}(x^2+5x+6)+\mathrm{B}(x^2-x-3)+\Gamma(x^2+2x-3)\Leftrightarrow$$

$$x^2+11=x^2\left(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma\right)+x\left(5\mathrm{A}-\mathrm{B}+2\Gamma\right)+(6\mathrm{A}-3\mathrm{B}-3\Gamma)$$

Η τελευταία ισότητα μας δίνει: Α=1, Β=-5 και Γ=5.

Άρα

$$\int\frac{x^2+11}{(x-1)(x+2)(x+3)}dx=\int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{-5}{x+2}dx+\int\frac{5}{x+3}dx=\ln|x-1|-5\ln|x+2|+5\ln|x+3|+c$$

- **(Άλλη τεχνική).** Αν έχουμε $f(x)=\dfrac{h(x)}{g(x)}$ και

$g(x)=(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_k)\ \ \mu\varepsilon\ \rho_1\neq\rho_2\neq\ldots\neq\rho_k,\ \rho_i\in R$ τότε

$$f(x)=\frac{h(x)}{g(x)}=\frac{\mathrm{A}_1}{x-\rho_1}+\frac{\mathrm{A}_2}{x-\rho_2}+\ldots+\frac{\mathrm{A}_k}{x-\rho_k}$$

καθένας από τους συντελεστές $\mathrm{A}_m,\ m=1,2,\ldots,k$ υπολογίζονται ως εξής: $\mathrm{A}_m=\lim\limits_{x\to\rho_m}(x-\rho_m)\dfrac{h(x)}{g(x)},\ \ m=1,2,\ldots,k$

δηλαδή $\mathrm{A}_m=\dfrac{h(\rho_m)}{g'(\rho_m)},\ \ m=1,2,\ldots,k$

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x^2+11}{(x-1)(x+2)(x+3)}dx.$$

Απάντηση Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+11}{(x-1)(x+2)(x+3)}$ γράφεται ως

εξής: $$\frac{x^2+11}{(x-1)(x+2)(x+3)}=\frac{\mathrm{A}}{x-1}+\frac{\mathrm{B}}{x+2}+\frac{\Gamma}{x+3} \qquad (1)$$

$$\mathrm{A}=\lim_{x\to 1}\left[\left(x\cancel{-}1\right)\frac{x^2+11}{(x\cancel{-}1)(x+2)(x+3)}\right]=\frac{12}{12}=1$$

$$\mathrm{B}=\lim_{x\to -2}\left[\left(x\cancel{+}2\right)\frac{x^2+11}{(x-1)(x\cancel{+}2)(x+3)}\right]=\frac{15}{-3}=-5$$

$$\Gamma=\lim_{x\to -3}\left[\left(x\cancel{+}3\right)\frac{x^2+11}{(x-1)(x+2)(x\cancel{+}3)}\right]=\frac{20}{4}=5$$

ή αν $h(x) = x^2 + 11$ **και** $g'(x) = (x+2)(x+3) + (x-1)(x+3) + (x-1)(x+2)$

τότε έχουμε **(** $\mathrm{A}_m = \dfrac{h(\rho_m)}{g'(\rho_m)},\quad m = 1, 2, \ldots, k$ **):**

$$\mathrm{A} = \frac{h(1)}{g'(1)} = \frac{1^2 + 11}{3.4} = \frac{12}{12} = 1$$

$$\mathrm{B} = \frac{h(-2)}{g'(-2)} = \frac{(-2)^2 + 11}{-3 \cdot 1} = \frac{15}{-3} = -5$$

$$\Gamma = \frac{h(-3)}{g'(-3)} = \frac{(-3)^2 + 11}{-4 \cdot (-1)} = \frac{20}{4} = 5$$

Άρα

$$\int \frac{x^2 + 11}{(x-1)(x+2)(x+3)} dx = \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{-5}{x+2} dx + \int \frac{5}{x+3} dx = \ln|x-1| - 5\ln|x+2| + 5\ln|x+3| + c$$

- Αν έχουμε $f(x)=\dfrac{h(x)}{g(x)}$ και

$g(x)=(x-\rho_1)^{\rho}(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_k)\;\; \mu\varepsilon\;\; \rho_1\neq\rho_2\neq\ldots\neq\rho_k,\ \rho_i\in R$ τότε

$$f(x)=\frac{h(x)}{g(x)}=\frac{A_{11}}{(x-\rho_1)^p}+\frac{A_{12}}{(x-\rho_1)^{p-1}}+\ldots+\frac{A_{1p}}{x-\rho_1}+\frac{A_2}{x-\rho_2}+\ldots+\frac{A_k}{x-\rho_k}$$

Οι συντελεστές υπολογίζονται ως εξής:

$$A_{11}=\left[\left(x-\rho_1\right)^p\frac{h(x)}{\left(x-\rho_1\right)^p(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_k)}\right]_{x=\rho_1}$$

$$A_{12}=\frac{d}{dx}\left[\left(x-\rho_1\right)^p f(x)\right]_{x=\rho_1}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ A_{1p}=\frac{1}{(p-1)!}\left[\frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}[\left(x-\rho_1\right)^p f(x)]\right]_{x=\rho_1}$$

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{3x^4-2x^3-17x^2+x+109}{(x+3)^2(x-2)^3}dx.$$

Απάντηση Η συνάρτηση γράφεται:

$$\frac{3x^4-2x^3-17x^2+x+109}{(x+3)^2(x-2)^3}=\frac{\mathrm{A}}{x+3}+\frac{\mathrm{B}}{(x+3)^2}+\frac{\Gamma}{x-2}+\frac{\Delta}{(x-2)^2}+\frac{\mathrm{E}}{(x-2)^3}, \quad (1)$$

- ✓ Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $(x+3)^2$ και θέτοντας x=-3, έχουμε:

$$\left.\frac{3x^4-2x^3-17x^2+x+109}{(x-2)^3}\right|_{x=-3}=\mathrm{A}(x+3)\Big|_{x=-3}+\mathrm{B}+\left.\frac{\Gamma}{x-2}(x+3)^2\right|_{x=-3} \text{............}(2)$$

$$\Rightarrow \frac{243+54-153-3+109}{-125}=\mathrm{B}\Rightarrow \mathrm{B}=-2.$$

✓ Για να βρούμε το Α παραγωγίζουμε μία φορά την (2) και θέτουμε x=-3, δηλαδή:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3x^4-2x^3-17x^2+x+109}{(x-2)^3}\right)_{x=-3}=\mathrm{A}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{A}=\left.\frac{\left(12x^3-6x^2-34x+1\right)\left(x-2\right)-3\left(3x^4-2x^3-17x^2+x+109\right)}{\left(x-2\right)^4}\right|_{x=-3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{A}=\frac{-275\cdot(-5)-3\cdot 250}{625}\Rightarrow \mathrm{A}=1$$

✓ Το Ε βρίσκεται όπως το Β, δηλαδή:

$$\mathrm{E}=\left.\frac{3x^4-2x^3-17x^2+x+109}{\left(x+3\right)^2}\right|_{x=2}\Rightarrow \mathrm{E}=3.$$

✓ Όμοια: $\Delta=\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{3x^4-2x^3-17x^2+x+109}{(x+3)^2}\right]_{x=2}=\ldots\ldots\Rightarrow\Delta=-1.$

✓ $\Gamma=\dfrac{d^2}{dx}\left[\dfrac{3x^4-2x^3-17x^2+x+109}{(x+3)^2}\right]_{x=2}=\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{6x^4+34x^3-18x^2-103x-215}{(x+3)^3}\right]_{x=2}\Rightarrow\Gamma=4$

Άρα $\dfrac{3x^4-2x^3-17x^2+x+109}{(x+3)^2(x-2)^3}=\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{2}{(x+3)^2}+\dfrac{4}{x-2}-\dfrac{1}{(x-2)^2}+\dfrac{3}{(x-2)^3}$

Οπότε:

$$\int\frac{3x^4-2x^3-17x^2+x+109}{(x+3)^2(x-2)^3}dx=\int\frac{1}{x+3}dx-\int\frac{2}{(x+3)^2}dx+\int\frac{4}{x-2}dx-\int\frac{1}{(x-2)^2}dx+\int\frac{3}{(x-2)^3}dx=$$

$$=\ln|x+3|+2(x+3)^{-1}+4\ln|x-2|+(x-2)^{-1}-\frac{3}{2}(x-2)^{-2}+c$$

- **« Αντικατάσταση»**

Παράδειγμα 1: $f(x)=\dfrac{x^2-1}{(x+2)^4}$

Απάντηση: Έχουμε $\dfrac{x^2-1}{(x+2)^4}=\dfrac{\mathrm{A}_1}{x+2}+\dfrac{\mathrm{A}_2}{(x+2)^2}+\dfrac{\mathrm{A}_3}{(x+2)^3}+\dfrac{\mathrm{A}_4}{(x+2)^4}$ (1)

Θέτουμε $x+2=\omega \Rightarrow x=\omega-2$, οπότε η (1) γίνεται:

$$\frac{(\omega-2)^2-1}{\omega^4}=\frac{\mathrm{A}_1}{\omega}+\frac{\mathrm{A}_2}{\omega^2}+\frac{\mathrm{A}_3}{\omega^3}+\frac{\mathrm{A}_4}{\omega^4} \quad (2)$$

Αλλά $\dfrac{(\omega-2)^2-1}{\omega^4}=\dfrac{\omega^2-4\omega+4-1}{\omega^4}=\dfrac{\omega^2-4\omega+3}{\omega^4}=\dfrac{1}{\omega^2}+\dfrac{-4}{\omega^3}+\dfrac{3}{\omega^4}$ (3)

Από (2) και (3) έχουμε: $A_1 = 0,\ A_2 = 1,\ A_3 = -4,\ A_4 = 3$ Οπότε:

$$\frac{x^2-1}{(x+2)^4} = \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{-4}{(x+2)^3} + \frac{3}{(x+2)^4}$$

Παράδειγμα 2: $\displaystyle\int \frac{x+5}{(x-1)^3(1+x^2)}dx$

Απάντηση: $\displaystyle\frac{x+5}{(x-1)^3(1+x^2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{Bx+\Gamma}{1+x^2}$ (1)

Θέτουμε $x-1=\omega \Rightarrow x=\omega+1$, οπότε η (1) γίνεται:

$$\frac{6+\omega}{\omega^3\left(\omega^2+2\omega+2\right)}=\frac{\mathrm{A}_1}{\omega}+\frac{\mathrm{A}_2}{\omega^2}+\frac{\mathrm{A}_3}{\omega^3}+\frac{\mathrm{B}\omega+(\mathrm{B}+\Gamma)}{\omega^2+2\omega+2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{6+\omega}{2+2\omega+\omega^2}=\left(\mathrm{A}_1\omega^2+\mathrm{A}_2\omega+\mathrm{A}_3\right)+\frac{\mathrm{B}\omega+(\mathrm{B}+\Gamma)}{\omega^2+2\omega+2}\cdot\omega^3 \qquad (2)$$

Παρατηρούμε ότι το $\mathrm{A}_1\omega^2+\mathrm{A}_2\omega+\mathrm{A}_3$ είναι το δευτεροβάθμιο πηλίκο της διαίρεσης του $6+\omega$ δια του $2+2\omega+\omega^2$ διατεταγμένα κατά τις ανιούσες δυνάμεις του ω .

Η διαίρεση μας δίνει:

$$\frac{6+\omega}{2+2\omega+\omega^2}=\left(\omega^2-\frac{5}{2}\omega+3\right)+\frac{\frac{1}{2}-\omega}{\omega^2+2\omega+2}\cdot\omega^3 \quad (3)$$

Έχοντας υπ΄ όψιν και την (2):

$$\frac{6+\omega}{2+2\omega+\omega^2}=\left(\mathrm{A}_1\omega^2+\mathrm{A}_2\omega+\mathrm{A}_3\right)+\frac{\mathrm{B}\omega+(\mathrm{B}+\Gamma)}{\omega^2+2\omega+2}\cdot\omega^3$$, έχουμε:

$$\mathrm{A}_1=1,\ \ \mathrm{A}_2=-\frac{5}{2},\ \ \mathrm{A}_3=3,\ \ \mathrm{B}=-1,\ \ \mathrm{B}+\Gamma=\frac{1}{2}$$

Οπότε: $$\frac{x+5}{(x-1)^3(1+x^2)}=\frac{1}{x-1}+\frac{-5/2}{(x-1)^2}+\frac{3}{(x-1)^3}+\frac{-x+3/2}{1+x^2}$$

Άρα

$$\int\frac{x+5}{(x-1)^3(1+x^2)}dx=\int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{-5/2}{(x-1)^2}dx+\int\frac{3}{(x-1)^3}dx+\int\frac{-x+3/2}{1+x^2}dx=$$

$$=\ln|x-1|+\frac{5/2}{x-1}+\frac{-3/2}{(x-1)^2}-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{3}{2}\tau o\xi\varepsilon\varphi x+c$$

Β. ΜΟΡΦΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

I. $\int \Pi(x)\cdot e^{ax}dx$

II. $\int \eta\mu(\beta x+\gamma)\cdot e^{\alpha x}dx,\qquad \int \sigma\upsilon\nu(\beta x+\gamma)\cdot e^{\alpha x}dx$

III. $\int \Pi(x)\cdot \eta\mu(\beta x+\gamma)dx,\qquad \int \Pi(x)\cdot \sigma\upsilon\nu(\beta x+\gamma)dx$ **,** $\Pi(x)=\pi o\lambda\upsilon\acute{\omega}\nu\upsilon\mu o$

IV. $\int \Pi(x)\cdot \eta\mu(\beta x+\gamma)\cdot e^{ax}dx,\qquad \int \Pi(x)\cdot \sigma\upsilon\nu(\beta x+\gamma)\cdot e^{ax}dx$

V. $\int R(x)\cdot \ln\sigma(x)dx$**,** $R(x),\sigma(x)=\rho\eta\tau\acute{\eta}\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta$

VI. $\int R(x)\cdot \tau o\xi\eta\mu x dx$ και **VII.** $\int R(x)\cdot \tau o\xi\varepsilon\varphi\sigma(x)dx$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΑΝΩΤΕΡΩ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

Ι. 1η Περίπτωση. $\int \Pi(x)\cdot e^{ax}dx = \frac{1}{a}\int \Pi(x)\left(e^{ax}\right)' dx = \frac{1}{a}\Pi(x)e^{ax} - \frac{1}{a}\int \Pi'(x)e^{ax}dx \quad (1)$

Το $\Pi'(x)$ είναι πολυώνυμο με βαθμό κατά μία μονάδα μικρότερο του βαθμού του $\Pi(x)$.

Με διαδοχικές ολοκληρώσεις κατά παράγοντες θα έχουμε:

$$\int \Pi(x)\cdot e^{ax}dx = \frac{1}{a}\int \Pi(x)\left(e^{ax}\right)' dx = \frac{1}{a}\Pi(x)e^{ax} - \frac{1}{a}\int \Pi'(x)e^{ax}dx =$$

$$= \frac{1}{a}\Pi(x)e^{ax} - \frac{1}{a^2}\Pi'(x)e^{ax} + \frac{1}{a^2}\int \Pi''(x)e^{ax}dx =$$

$$= \ldots.. = \frac{1}{a}\Pi(x)e^{ax} - \frac{1}{a^2}\Pi'(x)e^{ax} + \ldots + \int e^{ax}dx = \frac{1}{a}\Pi(x)e^{ax} - \frac{1}{a^2}\Pi'(x)e^{ax} + \ldots + \frac{1}{a}e^{ax} =$$

$$= e^{ax}\left(\frac{1}{a}\Pi(x) - \frac{1}{a^2}\Pi'(x) + \ldots + \frac{1}{a}\right) = \Pi_1(x)\cdot e^{ax}$$

Άρα $\int \Pi(x)\cdot e^{ax}dx = \Pi_1(x)\cdot e^{ax}$, όπου $\Pi_1(x)$ πολυώνυμο ίσου βαθμού με το $\Pi(x)$. Οι συντελεστές του $\Pi_1(x)$ υπολογίζονται με παραγώγιση των 2 μελών, εξισώνοντας τους συντελεστές των ίσων δυνάμεων του x και λύνοντας το σχηματιζόμενο σύστημα.

Παράδειγμα 1: $\int (2x+1)\cdot e^{3x}dx = (ax+\beta)\cdot e^{3x}$ και παραγωγίζοντας

$$(2x+1)e^{3x} = (ax+\beta)'\cdot e^{3x} + (ax+\beta)\cdot (e^{3x})' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2x+1)\cancel{e}^{3x} = (3ax+3\beta+a)\cancel{e}^{3x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a=2 \\ 3\beta+a=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2/3 \\ \beta = 1/9 \end{cases}$$

Άρα $\int (2x+1)\cdot e^{3x}dx = \left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}\right)\cdot e^{3x} + c$

Παράδειγμα 2: $\int (5x^2-8x+13)e^{5x}dx = \left(ax^2+\beta x+\gamma\right)e^{5x}$

και παραγωγίζοντας:

$$(5x^2-8x+13)e^{5x} = \left(2ax+\beta\right)e^{5x} + 5\left(ax^2+\beta x+\gamma\right)e^{5x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow (5x^2-8x+13)e^{5x} = \left[5ax^2+\left(2a+5\beta\right)x+\left(\beta+\gamma\right)\right]e^{5x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5a=5 \\ 2a+5\beta=-8 \\ \beta+5\gamma=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ \beta=-2 \\ \gamma=3 \end{cases}$$

Άρα $\int (5x^2-8x+13)e^{5x}dx = \left(x^2-2x+3\right)e^{5x}+c$

➢ Σχηματική μέθοδος

Μία σχηματική μέθοδος για την ολοκλήρωση κατά παράγοντες του γινομένου 2 συναρτήσεων του x θα παρουσιάσουμε στα επόμενα παραδείγματα.

Παράδειγμα 1: Το γινόμενο δύναμης του x με μία τριγωνομετρική συνάρτηση του x μπορεί να υπολογιστεί ακριβώς.

$$\mathrm{I}_1 = \int x^5 \cdot \sigma\upsilon\nu x dx$$

Έστω $f(x) = x^5 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; g(x) = \sigma\upsilon\nu x$.

Γράφουμε τις παραγώγους της f ως προς x σε μία στήλη και τα ολοκληρώματα της g ως προς x σε δεύτερη στήλη, συνεχίζοντας μέχρι την γραμμή όπου η $f^{(n)}$ γίνεται 0.

x^5		συνx
	+	
$5x^4$		ημx
	-	
$20x^3$		-συνx
	+	
$60x^2$		-ημx
	-	
$120x$		συνx
	+	
120		ημx
	-	
0		-συνx

Οπότε:

$$I_1 = x^5\text{ημ}x + 5x^4\text{συν}x - 20x^3\text{ημ}x - 60x^2\text{συν}x + 120x\text{ημ}x + 120\text{συν}x + c$$

Παράδειγμα 2: Το γινόμενο μιας εκθετικής συνάρτησης με μία τριγωνομετρική

$$\mathrm{I}_2 = \int e^{ax} \eta\mu bx dx$$

Έστω $f(x) = e^{ax}$ και $g(x) = \eta\mu bx$. Δουλεύουμε όπως στο παράδειγμα 1, αλλά συνεχίζουμε ως τη γραμμή όπου το γινόμενο $f^{(n)} \cdot g_n$ είναι σταθερό πολλαπλάσιο του δοθέντος.

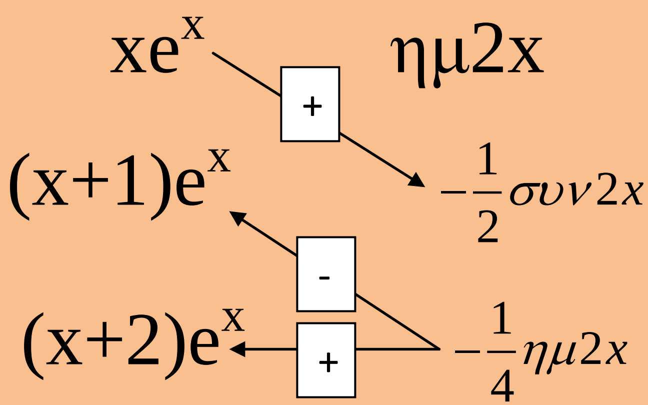
$$\begin{array}{ccc} e^{\alpha x} & & \eta\mu bx \\ & \boxed{+} & \\ \alpha e^{\alpha x} & & -\dfrac{1}{b}\sigma\upsilon\nu bx \\ & \boxed{-} & \\ \alpha^2 e^{\alpha x} & \xleftarrow{\boxed{+}} & -\dfrac{1}{b^2}\eta\mu bx \end{array}$$

$$\mathrm{I}_2 = \int e^{ax}\eta\mu bx dx = -\frac{1}{b}e^{ax}\sigma\upsilon\nu bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\eta\mu bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\eta\mu bx dx \Rightarrow$$

$$\mathrm{I}_2 = \int e^{ax}\eta\mu bx dx = -\frac{1}{b}e^{ax}\sigma\upsilon\nu bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\eta\mu bx - \frac{a^2}{b^2}\mathrm{I}_2 \Rightarrow$$

$$\mathrm{I}_2 + \frac{a^2}{b^2}\mathrm{I}_2 = e^{ax}\left(-\frac{1}{b}\sigma\upsilon\nu bx + \frac{a}{b^2}\eta\mu bx\right) \Rightarrow \mathrm{I}_2 = \frac{e^{ax}\left(-b\sigma\upsilon\nu bx + a\eta\mu bx\right)}{a^2+b^2} + c$$

Παράδειγμα 3: $\mathrm{I}_3 = \int xe^x\eta\mu 2x dx$



$$\mathrm{I}_3 = -\frac{1}{2} x e^x \sigma\upsilon\nu 2x + \frac{1}{4} e^x (x+1)\eta\mu 2x - \frac{1}{4}\int (x+2) e^x \eta\mu 2x dx \Rightarrow$$

$$\mathrm{I}_3 = -\frac{1}{2} x e^x \sigma\upsilon\nu 2x + \frac{1}{4} e^x (x+1)\eta\mu 2x - \frac{1}{4}\int x e^x \eta\mu 2x dx - \frac{1}{2}\int e^x \eta\mu 2x dx \Rightarrow$$

$$\mathrm{I}_3$$

$$\mathrm{I}_3 + \frac{1}{4}\mathrm{I}_3 = -\frac{1}{2} x e^x \sigma\upsilon\nu 2x + \frac{1}{4} e^x (x+1)\eta\mu 2x - \frac{1}{2}\int e^x \eta\mu 2x dx \Rightarrow$$

$$\mathrm{I}_3 = -\frac{2}{5} x e^x \sigma\upsilon\nu 2x + \frac{1}{5} e^x (x+1)\eta\mu 2x - \frac{2}{5}\int e^x \eta\mu 2x dx \quad (1)$$

$$\mathrm{I}$$

Έστω $\mathrm{I} = \int e^x \eta\mu 2x dx$

$$
\begin{array}{ccc}
e^{x} & & \eta\mu 2x \\
 & \boxed{+} & \\
e^{x} & & -\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x \\
 & \boxed{-} & \\
e^{x} & \boxed{+} & -\frac{1}{4}\eta\mu 2x
\end{array}
$$

$$\mathrm{I}=\int e^{x}\eta\mu 2x dx=-\frac{1}{2}e^{x}\sigma\upsilon\nu 2x+\frac{1}{4}e^{x}\eta\mu 2x-\frac{1}{4}\int e^{x}\eta\mu 2x dx \Rightarrow$$

$$\mathrm{I}=-\frac{1}{2}e^{x}\sigma\upsilon\nu 2x+\frac{1}{4}e^{x}\eta\mu 2x-\frac{1}{4}\mathrm{I} \Rightarrow \ \mathrm{I}=-\frac{2}{5}e^{x}\sigma\upsilon\nu 2x+\frac{1}{5}e^{x}\eta\mu 2x \qquad (2)$$

$$(1)\overset{(2)}{\Rightarrow}\ \mathrm{I}_3=-\frac{2}{5}xe^{x}\sigma\upsilon\nu 2x+\frac{1}{5}e^{x}(x+1)\eta\mu 2x+\frac{4}{25}e^{x}\sigma\upsilon\nu 2x-\frac{2}{25}e^{x}\eta\mu 2x \Rightarrow$$

$$\mathrm{I}_3=\frac{e^{x}}{25}\left[\left(3+5x\right)\eta\mu 2x+(4-10x)\sigma\upsilon\nu 2x\right]+c$$

Βιβλιογραφία:

[1] J.B.Reynolds, Undetermined coefficients in integration, *American Mathematical Monthly*, vol. 54 (1947), pp. 37-38.

[2] K.W.Folley, Integration by parts, *American Mathematical Monthly*, vol. 54 (1947), pp. 542-543.

[3] M.R.Spiegel, Partial fractions with repeated linear or quadratic factors, *American Mathematical Monthly*, vol. 57 (1950), pp. 180-181.

[4] Δ. Στρατηγόπουλος, Ανώτερα Μαθηματικά, Κλασσική Ανάλυση, *Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών*, Πάτρα 1989.

ΣΑΣ ΕΥΧΑΡΙΣΤΩ ΠΟΛΥ