Α. **ΣΧΕΔΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ**

Μάθημα: **Μαθηματικά κατεύθυνσης** , Τάξη: Γ΄ Λυκείου

Ενότητα: Θεώρημα Bolzano (3 διδακτικές ώρες)

1. Σκοποί – Στόχοι

α. Σκοποί: Οι μαθητές να συνειδητοποιήσουν ότι τα Μαθηματικά μπορεί να είναι αντικείμενο διερεύνησης, κατά την οποία τίθενται ερωτήματα και διατυπώνονται υποθέσεις, οι οποίες ελέγχονται και, όταν είναι εφικτό, αποδεικνύονται.

β. Στόχοι: Οι μαθητές μετά το τέλος της διδασκαλίας να είναι σε θέση:

- Να αναφέρουν το Θεώρημα του Bolzano
- Να αναφέρουν το πόρισμα με την διατήρηση προσήμου συνάρτησης.
- Να κατανοήσουν την γεωμετρική του απόδειξη.
- Να κατανοήσουν ότι δεν ισχύει το αντίστροφό του.
- Να αποκτήσουν την ικανότητα να το χρησιμοποιούν στις εξισώσεις για την ύπαρξη ριζών,
- Να αποκτήσουν την ικανότητα να εφαρμόζουν το πόρισμα διατήρησης πρόσημου μιας συνεχούς συνάρτησης.

2. Διδακτικά μέσα και υλικά

- Φύλλο εργασίας.
- Προβολέας ή διαδραστικός πίνακας, πίνακας και χρωματιστές κιμωλίες.
- Ερωτηματικός διάλογος – καθοδηγούμενος, παραγωγική διδακτική μέθοδος.

3. Πορεία διδασκαλίας – Διδακτικές ενέργειες

- **Άνοιγμα – Εισαγωγή** (8-10 min)
- **Έλεγχος** «κατ΄ οίκον» εργασιών.
- **Ανάκληση** των γνωστικών προαπαιτούμενων: Συνέχεια συνάρτησης, γεωμετρική ερμηνεία συνέχειας, συνέχεια σε κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$.

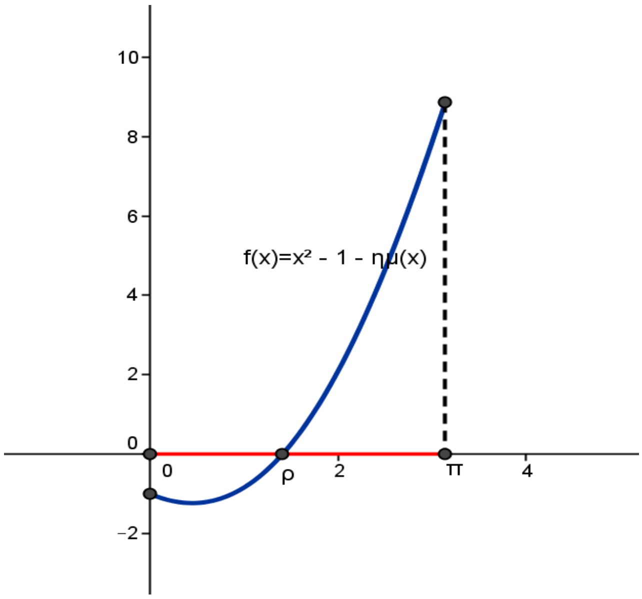
➢ **Διέγερση** *του* **ενδιαφέροντος** και προσέλκυση της προσοχής των μαθητών. Δίνουμε στους μαθητές να λύσουν τις εξισώσεις:

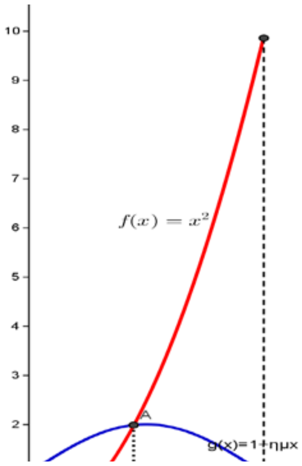
1. $x^2 = 6 - x$ 2. 2συνx=1 3. $x^2 = 1 + \eta\mu x$ στο $[0,\pi]$ 4. $x^3 = 1 - x$

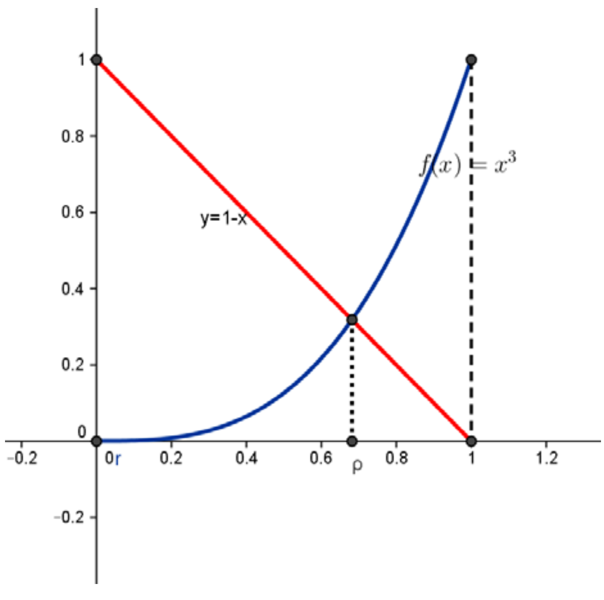
Σύντομα διαπιστώνουν ότι στην τρίτη και τέταρτη εξίσωση βρίσκονται σε ένα αδιέξοδο.

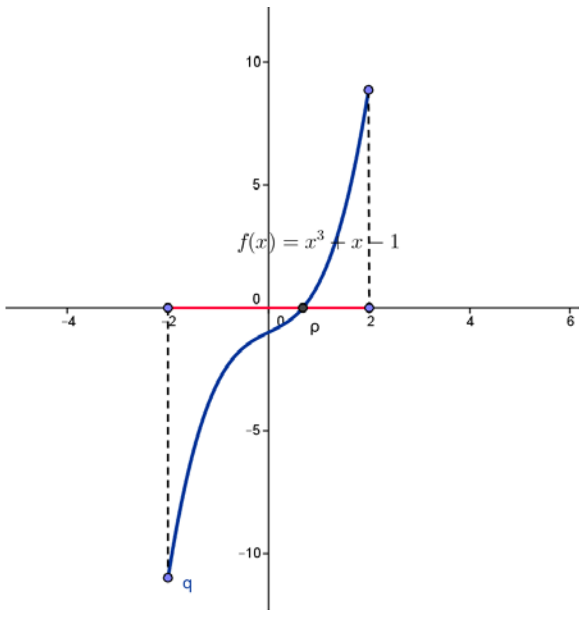
Το ερώτημα που τίθεται είναι: Τι κάνουμε σε τέτοιες εξισώσεις και πως μπορούμε να προσδιορίσουμε τις ρίζες των, αφού υπάρχουν, και γραφικά μπορούμε να τις δούμε;

Κατασκευάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των 2 τελευταίων εξισώσεων όπου οι μαθητές διαπιστώνουν ότι υπάρχουν λύσεις. (2 τρόποι)









- **Πληροφόρηση για τους στόχους του μαθήματος**. Θα μάθουμε ένα πολύ σημαντικό θεώρημα για τις συνεχείς συναρτήσεις που θα μας δώσει και απάντηση στο προηγούμενο αδιέξοδο.

♦ <u>**Διδακτική επεξεργασία της ενότητας** (25 min)</u>

- **Δραστηριότητα 1η** : Ζητάμε από τους μαθητές να σχεδιάσουν μία ευθεία (ε) και να πάρουν σημεία Α και Β που να βρίσκονται σε διαφορετικά ημιεπίπεδα. Τους καλούμε να ενώσουν τα Α και Β με μία συνεχόμενη καμπύλη γραμμή χωρίς να σηκώσουν το μολύβι και να διαπιστώσουν ότι πάντα θα τμήσουν την ευθεία (ε).

  Τους καλούμε να κάνουν το ίδιο μόνο που τώρα τα σημεία Α και Β βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο και να μας πουν αν **πάντα** η συνεχόμενη αυτή καμπύλη θα τέμνει την ευθεία (ε).

  Ότι έχουν κάνει, τους το δείχνουμε και με ένα αρχείο Geogebra.

- **Δραστηριότητα 2η** : Δίνεται η διατύπωση του Θεωρήματος Bolzano.

  Επισημαίνουμε: <u>Το θεώρημα μας δίνει απλά την πληροφορία ότι υπάρχει ρίζα, στο εσωτερικό ενός διαστήματος, δεν μας λέει αν είναι μοναδική, ούτε την υπολογίζει.</u>

- **Δραστηριότητα 3η**: Γίνεται γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος και τονίζουμε Το θεώρημα Bolzano εξασφαλίζει την ύπαρξη τουλάχιστον μίας πραγματικής ρίζας της εξίσωσης $f(x)=0$ στο (α,β). Ωστόσο δεν αποκλείεται η ύπαρξη περισσοτέρων ριζών στο (α,β). Αυτό που κυρίως όμως μας εξασφαλίζει **είναι «το ΑΔΥΝΑΤΟΝ ΤΗΣ ΜΗ ΥΠΑΡΞΗΣ ΡΙΖΑΣ στο (α,β)»**

- **Δραστηριότητα** 5η : Δίνουμε 2 παραδείγματα που δεν ισχύει μία από τις 2 προϋποθέσεις του Θ.Β και ζητάμε από τους μαθητές να μας πουν αν **πάντα** ισχύει το συμπέρασμα.

- **Δραστηριότητα** 6η : Καλούμε τους μαθητές να ανακαλύψουν μέσα από παραδείγματα αν ισχύει το αντίστροφο του Θ.Β. Τονίζουμε ότι η συνθήκη $f(a)f(\beta)<0$ είναι **μόνο ικανή** για να υπάρχει ρίζα και **όχι αναγκαία.**

- **Δραστηριότητα 7η** : Για την εμπέδωση της νέας γνώσης αποδεικνύουμε ότι η τρίτη εξίσωση έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[0,\pi]$ και καλούμε τους μαθητές να μας διαπιστώσουν αν η τέταρτη εξίσωση έχει ρίζα στο $[-2,2]$.

- **Δραστηριότητα 8η** : Για την εμπέδωση της νέας γνώσης τους καλούμε να απαντήσουν σε 3 ερωτήσεις Σ Λ.

- **<u>Κλείσιμο</u>** <u>(5 min).</u>

- Γίνεται ανακεφαλαίωση – επισήμανση των κυριότερων σημείων του μαθήματος.
    - ✓ Επισημαίνετε το Θ.Β **προσεγγίζει** την ζητούμενη ρίζα και **όχι την εύρεσή της.**

- Ζητείται από τους μαθητές : Α) να επεξεργαστούν, στο σπίτι τους, από το σχολικό βιβλίο(σελ. 197-199), τα εξής: Εφαρμογή σελ . 197 και Ασκήσεις 6,7,8 α΄ ομάδας.

  Β) 1 άσκηση στο φύλλο εργασίας.

4. <u>**Τέστ αξιολόγησης** (5 min)</u>

- Δίνουμε τεστ αξιολόγησης ανώνυμο.

5. <u>**Πηγές – Βιβλιογραφία:**</u>

- Σχολικό βιβλίο – Διαδίκτυο – Ψηφιακό Σχολείο – ΨΕΒ - Οδηγίες διαχείρισης ύλης του ΙΕΠ – Σημειώσεις Διδάσκοντα.

<u>Συνέχεια 2η και 3η διδακτική ώρα</u>

- **Δραστηριότητα 9η** : Διατυπώνουμε το πόρισμα για τη διατήρηση του πρόσημου μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα διάστημα Δ με $f(\acute{x}) \neq 0, \gamma\iota\alpha \quad \lambda\alpha \;\; \tau\alpha \quad \in \Delta$ και το δικαιολογούμε.

    - <u>Επισημαίνουμε</u> ότι αν αρνηθούμε μία από τις προϋποθέσεις, τότε δεν ισχύει **πάντα** το συμπέρασμα. Παραδείγματα:

1. <u>Άρνηση συνέχειας:</u> $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2-1, & x\in[1,2)\cup(2,3]\\ 4 \quad , & x=2\end{cases}$ ασυνεχής στο $[1,3]$ και **δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο** στο $[1,3]$, ενώ $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[1,3]$.

2. <u>Άρνηση της $f(x)\neq 0$</u> για κάθε $x\in\Delta$: $f(x)=x^2,\ x\in[-1,1]$ είναι συνεχής στο $[-1,1]$, όμως $f(0)=0$ και η f **διατηρεί σταθερό πρόσημο** στο $[-1,1]$.

3. <u>**Το αντίστροφο της πρότασης δεν ισχύει:**</u>

$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in[-1,0)\cup(0,2]\\ 5 \ , & x=0\end{cases}$ Διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[-1,2]$, αφού $f(x)>0$ για κάθε $x\in[-1,2]$ αλλά η f είναι ασυνεχής στο $x_0=0$.

- **Δραστηριότητα 10^{η}** : Διατυπώνουμε το πόρισμα για τη διατήρηση του πρόσημου μιας συνεχούς συνάρτησης σε καθένα από τα διαστήματα που ορίζουν οι πραγματικές της ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

- **Δραστηριότητα 11^{η}** : Διατύπωση της πρότασης : Αν f συνεχής και γνησίως μονότονη στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)f(\beta)<0$, τότε η f **έχει ακριβώς** μία ρίζα στο (α,β). (Μονοτονία = μοναδικότητα της ρίζας)

- **Δραστηριότητα 12^{η}** : Διατυπώνουμε 2 σημαντικές παρατηρήσεις για το πρόσημο μιας συνεχούς συνάρτησης f με $f(\acute{x})\neq 0, \gamma\iota\alpha \quad \lambda\alpha \ \tau\alpha \quad \in\Delta$ και $f(\xi)<0$ ή $f(\xi)>0$ με $\xi\in\Delta$.

- **Δραστηριότητα 13^{η}** : Διατύπωση και απόδειξη μιας σπουδαίας πρότασης που βοηθάει σ:την επίλυση πολλών ασκήσεων: **Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.**

- **Δραστηριότητα 14^{η}** : Λύνονται ασκήσεις και παραδείγματα τα οποία χωρίζουμε στις εξής κατηγορίες:

  1. Προϋποθέσεις ισχύος Θεωρήματος Bolzano.
  2. Ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας δοθείσης εξίσωσης ή συνάρτησης στο (α,β).
  3. Ύπαρξη ρίζας της $f(x)=0$ σε διάστημα της μορφής $(\alpha,\beta]$.

4. Ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας χωρίς να αναφέρεται το διάστημα.

5. Ύπαρξη ακριβώς μιας ή ακριβώς δύο ριζών στο διάστημα (α, β).

6. Ύπαρξη ρίζας στο διάστημα (α, β) σε εξίσωση με παρανομαστές.

7. Πρόσημο συνάρτησης.

8. Τομή των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων σε ένα τουλάχιστον σημείο.

9. Ύπαρξη ρίζας της εξίσωσης $f(x) = f(x+c)$

10. Σταθερό πρόσημο συνάρτησης.

- **Δραστηριότητα 15η** : Δίνονται ασκήσεις εμπέδωσης με την αντίστοιχη μεθοδολογία.

Β. **ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ** …….**Λύκειο**……………………

Ενότητα: Θεώρημα Bolzano (3 διδακτικές ώρες)

Ονοματεπώνυμο…………………………………………………………………………
…………..

1. Λύστε τις παρακάτω εξισώσεις : a) $x^2 = 6 - x$ b) 2συνx=1 g) $x^2 = 1 + \eta\mu x$ στο $[0, \pi]$ d) $x^3 + x - 1 = 0$

<u>**Απάντηση**</u>………
………
………
……

2. Σχεδιάστε μία ευθεία (ε) στο επίπεδο και πάρτε σημείο Α στο ένα ημιεπίπεδο και σημείο Β στο άλλο. Γράψτε μία συνεχόμενη καμπύλη γραμμή (χωρίς να σηκώσετε το στυλό) από το Α στο Β. Υπάρχει περίπτωση αυτή η καμπύλη να μην συναντήσει την ευθεία (ε);

   Επαναλάβετε το ίδιο παίρνοντας τώρα τα Α και Β στο ίδιο ημιεπίπεδο. Συμβαίνει **πάντα** το ίδιο;

3. Θεωρώντας τώρα ότι η ευθεία (ε) είναι ο άξονας x΄x, για να τον τέμνει **πάντα** μία καμπύλη γραμμή θα πρέπει αυτή να είναι ………………………… και τα άκρα της να βρίσκονται ……………………………………………του άξονα των x΄x.

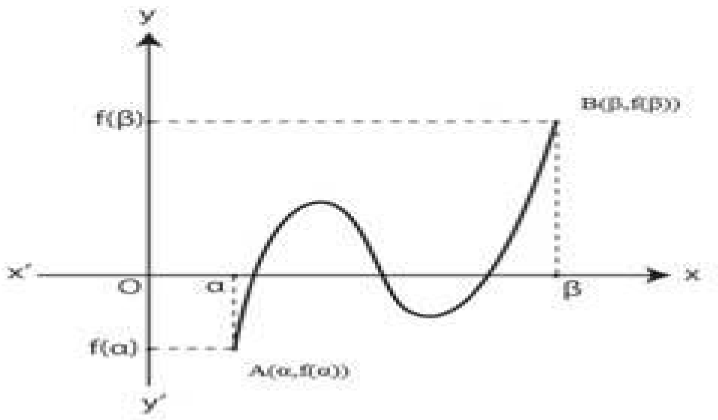
4. Διατύπωση του **Θεωρήματος του** Bolzano:

   Αν μία συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$και επιπλέον

   - η f είναι ………………………….. στο $[\alpha, \beta]$

- ....(δηλ. οι τιμές $f(\alpha)$, $f(\beta)$ είναι ετερόσημες)
  τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ έτσι ώστε $f(\xi) = 0$.

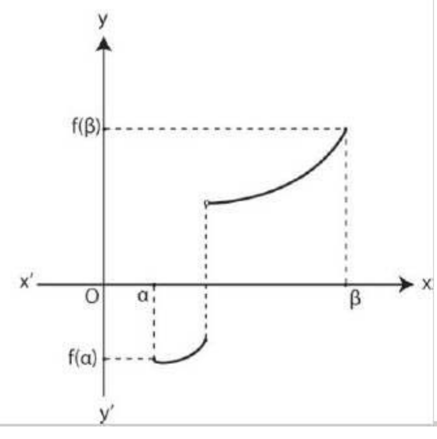
  Με άλλα λόγια η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα στο ανοικτό διάστημα (α, β).
  (Δηλαδή η C_f τέμνει τον άξονα xx΄ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (\alpha, \beta)$).

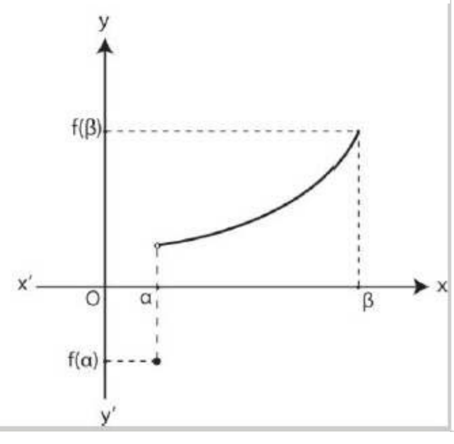


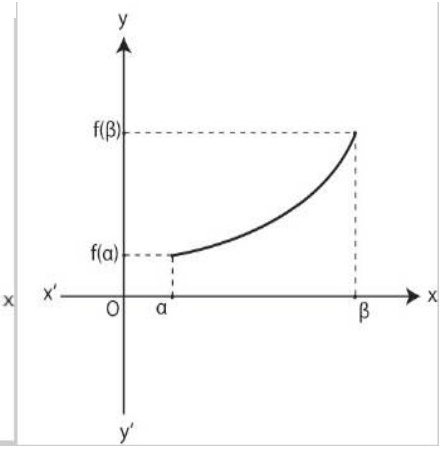
5. **Γεωμετρική ερμηνεία**

Γεωμετρικά μπορούμε να ερμηνεύσουμε το παραπάνω θεώρημα ως εξής:
Το τμήμα της γραφικής παράστασης της f που περιέχεται μεταξύ των ευθειών $x = \alpha$ και $x = \beta$ τέμνει τον xx΄ τουλάχιστον μία φορά.

6. Ας αρνηθούμε μία από τις 2 προϋποθέσεις του Θ.Β. Τότε το συμπέρασμα ισχύει **πάντα;**







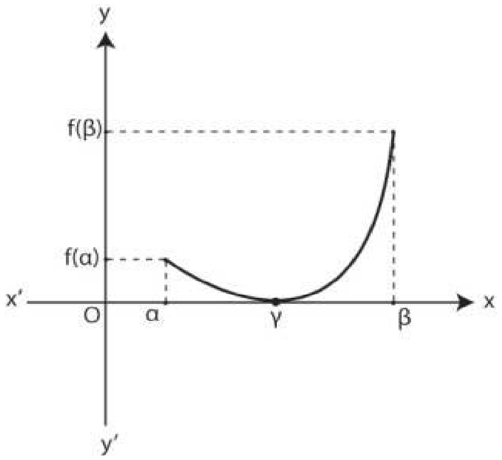
Ελέγξτε και αλγεβρικά τα παραπάνω στις συναρτήσεις:

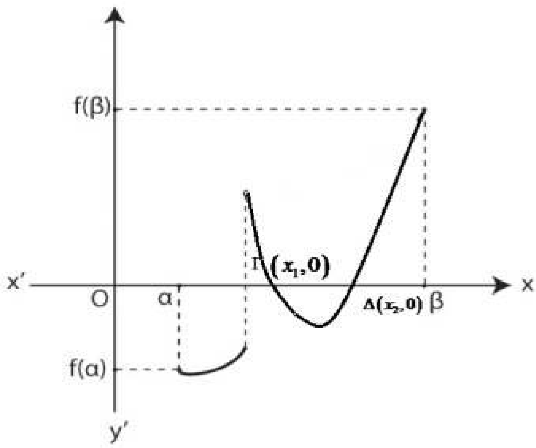
$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x\in[1,2)\\ 5, & x=2\end{cases}$$ και $g(x)=x^2,\ x\in[2,6]$.

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
…………

7. Το αντίστροφο του Θ.Β. ισχύει; Ας δούμε πρώτα τα παρακάτω παραδείγματα.





Ελέγξτε και αλγεβρικά τα παραπάνω στις συναρτήσεις:

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\in[-1,2)\\ x^2, & x\in[2,3]\end{cases}$$ και $g(x)=x^2,\ x\in[2,6]$

……
……
……

<u>‘Αρα το αντίστροφο του θεωρήματος Bolzano **δεν ισχύει**</u>. Αυτό σημαίνει ότι αν για μία πραγματική συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ έτσι ώστε $f(\xi)=0$ <u>**δεν συνεπάγεται αναγκαία**</u> ότι η f είναι ………………………. ή ότι οι τιμές …………………………. είναι ετερόσημες δηλαδή ……………………………………..

8. **Εφαρμογή του Θ.** Bolzano: Έστω η εξίσωση $x^2=1+\eta\mu x$.

a) Αποδείξτε ότι έχει μία ρίζα στο $(0,\pi)$. Μήπως ανήκει στο $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$;

b) Αποδείξτε ότι η ρίζα ανήκει στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

....
....
....
....
....
....
....

9. **<u>Ερώτηση 1</u>** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\Re$ και $\lim_{x\to-\infty} f(x)\cdot \lim_{x\to+\infty} f(x)<0$, τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική λύση.

Απάντηση: **ΣΩΣΤΟ**

☐ Σωστό ☐ Λάθος

<u>Ερώτηση 2</u> Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)\le 0$, τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[\alpha,\beta]$.

Απάντηση: **ΣΩΣΤΟ**

☐ Σωστό ☐ Λάθος

<u>Ερώτηση 3</u> Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και αντιστρέψιμη στο $\Re$ με $f^{-1}(3)=0$ και $f^{-1}(-1)=2$, τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία ακριβώς πραγματική ρίζα.

Απάντηση: **ΣΩΣΤΟ**

☐ Σωστό ☐ Λάθος

10. **Ασκήσεις για το σπίτι:**

- 1) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^3 + x - 1 = 0$ έχει μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$. Είναι μοναδική; Μήπως η ρίζα ανήκει στο διάστημα $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$;Μπορεί να έχει ρίζα στο διάστημα $\left(0,\frac{1}{2}\right)$;

- 2) Σχολικό βιβλίο: Εφαρμογή σελ. 197 και ασκήσεις 6 & 7 σελ. 198 και άσκηση 8 σελ.199.

- Έστω $f(x) = \varepsilon\varphi x$. Αν είναι $f(\frac{\pi}{4}) = 1,\ f(\frac{3\pi}{4}) = -1$, δεν υπάρχει $x_0 \in \left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. Γιατί συμβαίνει αυτό;

- 4) Αν f συνεχής στο R , f(-1) = -1 και f(x) $\neq$ 0, τότε αποκλείεται να είναι f(2015) = 2015.

C. ΤΕΣΤ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Ερώτηση 1

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχή ς στο $[\alpha,\beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f(x_0)=0$ τότε ισχύει ότι $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$.

Απάντηση: **ΛΑΘΟΣ**

☐ Σωστό ☐ Λάθος

Ερώτηση 2

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ τότε ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)\geq 0$.

Απάντηση: **ΣΩΣΤΟ**

☐ Σωστό ☐ Λάθος

Ερώτηση 3

Αν $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ τότε η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

Απάντηση: **ΣΩΣΤΟ**

☐ Σωστό ☐ Λάθος

Ερώτηση 4

Πότε εφαρμόζουμε το Θεώρημα Bolzano;

Το Θεώρημα Bolzano (όταν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του) είναι ένας τρόπος για να αποδεικνύουμε την ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας της εξίσωσης $f(x)=0$ σε κάποιο ανοικτό διάστημα του πεδίου ορισμού της f.

Ερώτηση 5

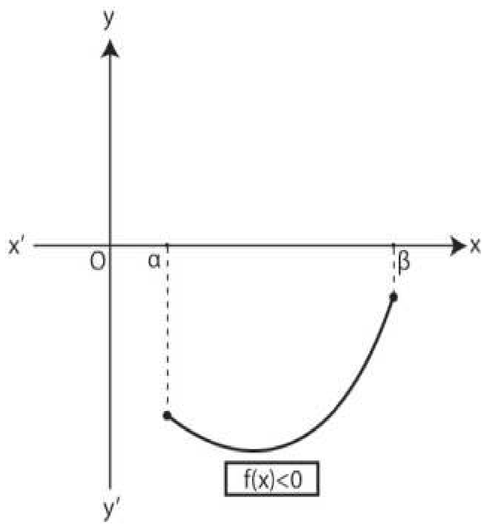
Με το Θεώρημα Bolzano βρίσκουμε την ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$;

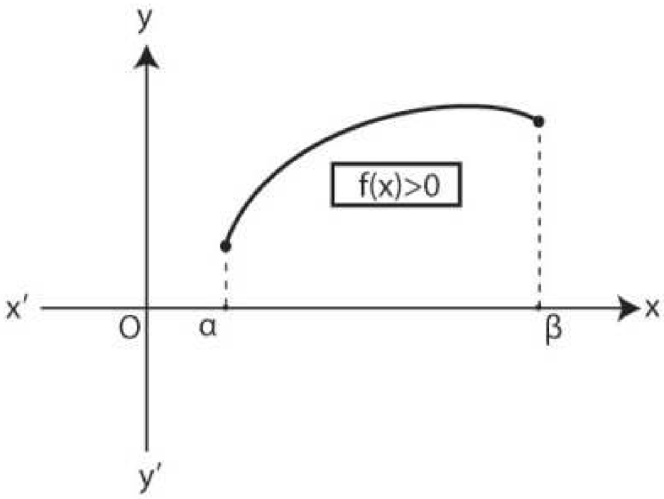
Όχι. Το Θεώρημα Bolzano μας εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας της εξίσωσης $f(x)=0$, χωρίς όμως να την προσδιορίζει. Για να βρούμε τη ρίζα ή τις ρίζες πρέπει να λύσουμε την εξίσωση με τους γνωστούς τρόπους που μάθαμε στην Α΄ και Β΄ Λυκείου. Όταν η εξίσωση δε λύνεται μπορούμε να βρούμε τη ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ με όποια προσέγγιση θέλουμε με τη βοήθεια του Θεωρήματος Bolzano με διαδοχικές διχοτομήσεις των διαστημάτων.

D. **ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ** …….**Λύκειο**……………………

Ενότητα: Θεώρημα Bolzano ($2^η$ & $3^η$ διδακτική ώρα)

11. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f(x)\neq 0$ για όλα τα $x\in\Delta$ τότε συνάγουμε ότι $f(x)<0$ ή $f(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$. Αυτό σημαίνει ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ.



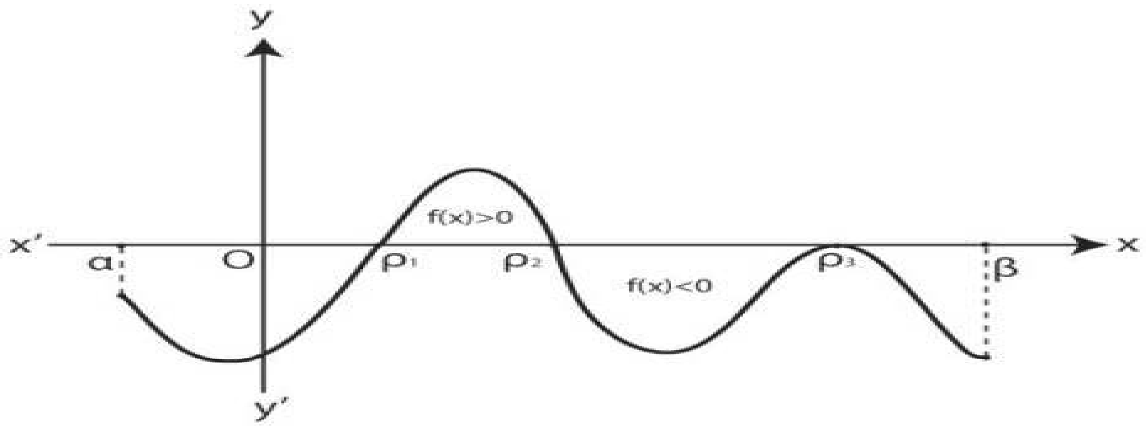


Απόδειξη

……
……
……
……
……
……
…………………………

12. Μία συνεχής συνάρτηση f διατηρεί το πρόσημο της σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

(Από την έκφραση «διαδοχικές ρίζες» συμπεραίνουμε ότι $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\rho_1,\rho_2)$ όπου ρ_1,ρ_2 είναι δύο διαδοχικές ρίζες της f).



13. **Α)** Αν η f είναι συνεχής και **γνησίως μονότονη** στο $[\alpha,\beta]$ και επί πλέον ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, τότε η f **<u>έχει ακριβώς μία ρίζα</u>** στο (α,β).

Β) Αν η f είναι συνεχής στο Δ και ισχύει:

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha.\ f(x)\neq 0 \ \text{για κάθε}\ x\in\Delta \\ \beta.\ f(\xi)>0 \ \ \mu\varepsilon\ \ \xi\in\Delta \end{array}\right\} \text{τότε } f(x)>0 \ \text{για κάθε}\ x\in\Delta$$

Γ) Αν η f είναι συνεχής στο Δ και ισχύει:

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha.\ f(x)\neq 0 \ \text{για κάθε}\ x\in\Delta \\ \beta.\ f(\xi)<0 \ \ \mu\varepsilon\ \ \xi\in\Delta \end{array}\right\} \text{τότε } f(x)<0 \ \text{για κάθε}\ x\in\Delta$$

14. Κάθε πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0)$ με $\alpha_\nu\neq 0,\nu\in\mathbb{N}^*,x\in\mathbb{R}$ περιττού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα. (Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις: $\alpha_\nu>0$ και $\alpha_\nu<0$)

Απόδειξη

……
……
……
……
……

15. ***<u>Παραδείγματα:</u>***

- **1η κατηγορία:** <u>Προϋποθέσεις ισχύος Θεωρήματος Bolzano</u>

- **Δίνεται η συνάρτηση** $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1, & -1\le x\le 0 \\ x^3-4x+1, & 0<x\le 1 \end{cases}$.

Να εξετάσετε αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[-1,1]$.

Μεθοδολογία

- Εξετάζουμε αν η συνάρτηση είναι συνεχής στο δοθέν διάστημα.
- Αν έχει πολλούς κλάδους η συνάρτηση f εξετάζουμε επιπλέον τη συνέχεια της f στα σημεία που αλλάζει μορφή.
- Διαπιστώνουμε αν οι τιμές $f(\alpha)$, $f(\beta)$ είναι ετερόσημες.
- Συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ρίζα στο διάστημα που μας δίνεται.

2η κατηγορία: Ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας δοθείσης εξίσωσης ή συνάρτησης στο (α,β).

- **Να αποδείξετε ότι η εξίσωση** $\ln x^6=-x+6$ **έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα** $(1,e)$ **.**

Μεθοδολογία

- Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών εφόσον απαιτείται.
- Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος της εξίσωσης.
- Θεωρούμε το πρώτο μέλος της εξίσωσης ως συνάρτηση f .
- Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano στο $[\alpha,\beta]$.

3η κατηγορία: Ύπαρξη ρίζας της $f(x)=0$ σε διάστημα της μορφής $(\alpha,\beta]$.

- **Αν** $\alpha\in R_+^*$ **να δείξετε ότι η εξίσωση** $\alpha\eta\mu x+\pi=x$ **έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο** $(0,\alpha+\pi]$.

Μεθοδολογία

Ως γνωστόν το θεώρημα του Bolzano εφαρμόζεται σε κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ ενώ το συμπέρασμα του στο αντίστοιχο ανοικτό διάστημα. Έτσι λοιπόν όταν η ρίζα, μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha,\beta]$, μας ζητηθεί στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ ή στα ημιανοικτά διαστήματα $[\alpha,\beta)$ ή $(\alpha,\beta]$, θα έχουμε και μηδενισμό του γινομένου στη δεύτερη συνθήκη του θεωρήματος, δηλαδή $f(\alpha)f(\beta)\le 0$, συνεπώς θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in[\alpha,\beta]$ ή ένα τουλάχιστον $x_0\in[\alpha,\beta)$ ή ένα τουλάχιστον $x_0\in[\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$, διότι:

- Αν $f(\alpha)f(\beta)<0$, τότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.
- Αν $f(\alpha)f(\beta)=0$, τότε $x_0=\alpha$ ή $x_0=\beta$.

• $4^η$ κατηγορία: Ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας χωρίς να αναφέρεται το διάστημα.

➢ **Να δείξετε ότι η εξίσωση** $x^3+x=x^2+5$ **έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο** R**.**

Μεθοδολογία

Ελέγχουμε με δοκιμές ποιο μπορεί να είναι το κατάλληλο διάστημα $[\alpha,\beta]$ στο οποίο να ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano.

• $5^η$ κατηγορία: Ύπαρξη ακριβώς μιας ή ακριβώς δύο ριζών σε διάστημα (α,β)

➢ **Να αποδείξετε ότι η εξίσωση** $3x^3-9x+1=0$ **έχει ακριβώς δύο ρίζες στο** $(0,2)$**.**

Μεθοδολογία

- Δημιουργούμε την f κατά τα γνωστά.
- Αποδεικνύουμε την ύπαρξη τουλάχιστον μίας ρίζας με το θεώρημα Bolzano.
- Αποδεικνύουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη, άρα και 1-1. Συνεπώς η ρίζα θα είναι μοναδική.
- Στην περίπτωση που πρέπει να αποδείξουμε την ύπαρξη ακριβώς δύο ριζών στο (α,β) διαχωρίζουμε το δοθέν διάστημα σε δύο υποδιαστήματα και αποδεικνύουμε την ύπαρξη ακριβώς μίας ρίζας σε καθένα από αυτά.

- **6η κατηγορία:** Ύπαρξη ρίζας σε διάστημα (α,β) σε εξίσωση με παρανομαστές.

  - **Να αποδείξετε ότι η εξίσωση** $\dfrac{x^2+2}{x-2}=\dfrac{x^4+4}{3-x}$ **έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα** $(2,3)$**.**

Μεθοδολογία

- Στην περίπτωση που η εξίσωση που μας δίνεται περιέχει παρονομαστές και η συνάρτηση που θεωρούμε δεν ορίζεται σε κάποιο από τα άκρα του διαστήματος, τότε πρώτα κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και κατόπιν θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)$.
- Τελικά αποδεικνύουμε το ζητούμενο κάνοντας χρήση του θεωρήματος Bolzano με την $f(x)$.

- **7η κατηγορία:** Πρόσημο συνάρτησης

  - **Βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης** $f(x)=\eta\mu x-\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu x$ **στο διάστημα** $[0,2\pi]$**.**

Μεθοδολογία

Για να βρούμε το πρόσημο μιας συνεχούς συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ, εργαζόμαστε ως εξής:

- Διαπιστώνουμε τη συνέχεια της f στο διάστημα Δ.
- Λύνουμε την εξίσωση $f(x)=0, x\in\Delta$.
- Σε καθένα από τα υποδιαστήματα του Δ που ορίζουν οι διαδοχικές ρίζες της f, επιλέγουμε έναν αριθμό x_0 και βρίσκουμε την τιμή $f(x_0)$.

Το πρόσημο της τιμής $f(x_0)$ είναι το πρόσημο της f στο αντίστοιχο διάστημα.

- **8η κατηγορία:** Τομή των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων σε ένα τουλάχιστον σημείο.

  - **Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων** $f(x)=x^4+3x^2+2$ **και** $g(x)=-9x^3-3x+1$ **τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο του διαστήματος** $(-1,1)$**.**

Μεθοδολογία

- Τα σημεία τομής των δύο γραφικών παραστάσεων τα βρίσκουμε από τη λύση της εξίσωσης $f(x)=g(x)$.
- Αν μας ζητούν να αποδείξουμε την ύπαρξη ενός τουλάχιστον σημείου τομής των δύο γραφικών παραστάσεων
  τότε θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$ και εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano στο δοθέν διάστημα.

• 9η κατηγορία: <u>Ύπαρξη ρίζας της εξίσωσης $f(x)=f(x+c)$.</u>

➢ **Έστω συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο R με την ιδιότητα $f(x)+f(x+3)=0$ για κάθε $x\in R$.**

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in[0,3]$ ώστε να ισχύει $f(x_0)=f(x_0+2)$.

• 10η κατηγορία: <u>Σταθερό πρόσημο συνάρτησης</u>

➢ **Έστω συνάρτηση f συνεχής στο R και τέτοια ώστε:**
$f^2(x)+(x+1)\cdot f(x)+e^{2x}=3e^{3x}\cdot f(x)$ **για κάθε $x\in R$. (1)**

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(x+1)=f(0)-x^2$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

β. Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$.

<u>Μεθοδολογία</u>

Για να αποδείξουμε ότι μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε ένα διάστημα Δ, δηλαδή ότι είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$ ή $f(x)<0$ για κάθε $x\in\Delta$, εργαζόμαστε με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο.
Συγκεκριμένα υποθέτουμε ότι η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ, οπότε θα υπάρχουν $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$,ώστε $f(x_1)\cdot f(x_2)<0$. Τότε εφαρμόζοντας το Θ. Bolzano στο $[x_1,x_2]$ καταλήγουμε σε άτοπο.

• ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{1}{2^x}=\ln x$, έχει μοναδική ρίζα.

2) Έστω συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο $[0,5]$ με $f(1)+f(2)+f(3)=0$ (1). Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[0,5]$.

3) Δίνεται ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_1=1+i$ είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2+(\lambda-\kappa)\cdot z-5\kappa+\lambda=0,\ \kappa,\lambda\in R$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε: $\xi^3+(\kappa-\lambda)\xi+\kappa e^{\xi}=0$.

4) Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z,w τέτοιοι ώστε: $|z|=1$ και $|w|=2$.

Έστω επίσης συνάρτηση f συνεχής στο R τέτοια ώστε:

$f^3(x)+|z+w|\cdot f^2(x)+5f(x)=x^2+2x-1$ για κάθε $x\in R$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ ώστε $f(x_0)=0$.

5) Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$,τέτοια ώστε $0\le f(x)\le 1$ για κάθε $x\in[0,1]$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in[0,1)$,ώστε $f^2(x_0)+x_0e^{x_0}=f(x_0)$.

6) Έστω συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο R τέτοια ώστε:

$f(x)\left(x^3-\eta\mu x+e^x\right)\ge e^x-\sigma\upsilon\nu x+1$ για κάθε $x\in R$.

Να βρείτε το πρόσημο της $f(x)$.

7) Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z,w και η συνάρτηση

$f(x)=|w|\cdot x^3-|z|\cdot x^2+|w-z|$.

Να αποδείξετε υπάρχει $x_0\in[-1,1]$ ώστε $f(x_0)=0$.

8) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(2)=-3$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(f(1)-2\right)x^3-3x+1\right]$.

9) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(1)=-2$ και $-1,2$ διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3f(0)+1}{x^2+2}$.

10) Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f:[0,\alpha]\to\mathbb{R}$ με $0<f(x)<\beta$ για κάθε $x\in[0,\alpha]$. Αν $\beta^2<3\alpha$ να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,\alpha)$ ώστε $f^2(x_0)-\beta f(x_0)+x_0=0$.

11) **ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ <u>2002.</u>** Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\Re$. Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης $f \circ g$ είναι 1-1.

Α. Να δείξετε ότι η g είναι 1-1.

Β. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $g\left(f(x)+x^3-x\right)=g\left(f(x)+2x-1\right)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

(**Υπόδειξη:** <u>*Αν ζητείται η ύπαρξη περισσότερων σημείων $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$ τότε εφαρμόζουμε ν φορές το Θ. Bolzano σε ν διαστήματα τα οποία δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία. Τα διαστήματα μπορεί να δίνονται ή τα προσδιορίζουμε εμείς.)*</u>

12) Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$ με $f(2014)=2015$ και ισχύει $f(x) \neq x$, για κάθε $x \in R$. Να βρείτε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

13) Έστω f συνεχής στο R και οι μιγαδικοί z =α+ f(α)i και w = β- f(β)i με α·β·f(α)·f(β)$\neq$ 0. Έστω επίσης |$\overline{w}$ + z| < |w - $\overline{z}$ |. Δείξτε ότι υπάρχει γ $\in$(α, β) : f(γ) = 0.

14) Έστω f συνεχής, γνησίως αύξουσα και δεν μηδενίζεται στο [1, 3] και ο μιγαδικός $z=\dfrac{f(2)}{2i}+\dfrac{4}{f(1)f(3)}$ του οποίου η εικόνα βρίσκεται στην ευθεία y = x. Δείξτε ότι :

i) f(1) f(2) f(3) = -8

ii) f(x) < 0, για κάθε x $\in$[1, 3]

iii) Υπάρχει $x_0 \in$(1, 3) : f(x_0) = -2. (Θ. Μεγίστης-Ελαχίστης τιμής)

<u>**Υποδείξεις**</u>

1. **Έστω** $f(x)=\dfrac{1}{2^x}-\ln x,\ x \in \left(0,+\infty\right)$, $f \downarrow$ (με τον ορισμό), $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)=+\infty$, οπότε υπάρχει $\alpha\ \kappa o\nu\tau\acute{\alpha}\ \sigma\tau o\ 0^+\ \tau\acute{\varepsilon}\tau o\iota o\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ f\left(\alpha\right)>0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=-\infty$ οπότε υπάρχει $\beta\ \kappa o\nu\tau\acute{\alpha}\ \sigma\tau o\ +\infty\ \tau\acute{\varepsilon}\tau o\iota o\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ f\left(\beta\right)<0$ και εφαρμ. Θ.Β στο $\left[\alpha,\beta\right] \subseteq \left(0,+\infty\right)$.
2. **1^{ος} τρόπος :** Θα ισχύει $f(1)=f(2)=f(3)=0$ ή 2 από τους προσθετέους είναι ετερόσημοι, οπότε εφαρμόζω Θ.Β (3 περιπτώσεις)

2^{ος} τρόπος: Έστω ότι η f δεν έχει καμία ρίζα, δηλ.
$f(x) \neq 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [0,5]$, άρα
$f(1)+f(2)+f(3) > 0$ ή $f(1)+f(2)+f(3) < 0$ άτοπο.

3. $z_1 = 1+i \Rightarrow z_2 = \overline{z_1} = 1-i$, υπολογίζω κ=-1, λ=-3 και θεωρώ συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x - e^x$ και εφαρμόζω Θ.Β στο $[0,1]$.

4. $f(x)(f^2(x) + |z+w| \cdot f(x) + 5) = x^2 + 2x - 1$, Είναι $f^2(x) + |z+w| \cdot f(x) + 5 > 0$ αφού $\Delta = |z+w|^2 - 20 < 0$, οπότε $f(x) = \dfrac{x^2+2x-1}{f^2(x) + |z+w| \cdot f(x) + 5}$ και εφαρμόζω Θ.Β στο $[0,1]$.

5. $g(x) = f^2(x) + xe^x - f(x)$, $g(0) \leq 0, g(1) > 0$ ....

6. Έστω ότι η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R, οπότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in R$ $\mu\varepsilon$ $x_1 < x_2$ και $f(x_1)f(x_2) \leq 0$ και εφαρμόζοντας Θ.Β υπάρχει $\xi \in R: f(\xi) = 0$, τότε $e^{\xi} - \sigma\upsilon\nu\xi + 1 \leq 0$, άτοπο. Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R. Για x=0 $f(0) \geq 1 > 0 \Rightarrow f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$.

7. $f(-1) \leq 0$ $\kappa\alpha\iota$ $f(1) \geq 0$**......................**

8. Η f διατηρεί πρόσημο, $f(2) = -3 < 0 \Rightarrow f(x) < 0$, οπότε $f(1) - 2 < 0$ ....

9. Όμοια $f(0) < 0$...............

10. $g(x) = f^2(x) - \beta f(x) + x$ και εφαρμόζω Θ.Β

11. **Β.**

$$g\left(f(x) + x^3 - x\right) = g\left(f(x) + 2x - 1\right) \overset{g:1-1}{\Rightarrow} f(x) + x^3 - x = f(x) + 2x - 1 \Rightarrow x^3 - 3x + 1 = 0$$

Έστω $h(x) = x^3 - 3x + 1$, $h(0) = 1 > 0$, $h(1) = -1 < 0$, $h(2) = 3 > 0$ και $h(-2) = -1 < 0$, οπότε Θ.Β στα $[-2,0]$, $[0,1]$, $[1,2]$.....

12. Έστω $g(x) = f(x) - x \neq 0$, $\gamma\iota\alpha$ $\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon$ $x \in R$, ...η g διατηρεί πρόσημο,....

$g(x) > 0$, $\gamma\iota\alpha$ $\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon$ $x \in R$, $g(x) > 0 \Rightarrow f(x) - x > 0 \overset{x>0}{\Rightarrow} f(x) > x \Rightarrow o < \dfrac{1}{f(x)} < \dfrac{1}{x}$, όμως

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, οπότε.........................άρα $f(x) > 0$.

13. | $\overline{w}$ + z| < |w - $\overline{z}$ | και εφαρμόζω Θ.Β στο $[\alpha, \beta]$.

14. i) $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) \Rightarrow$ ......

ii) Η f διατηρεί πρόσημο και από i) προκύπτει $f(x) < 0$.

iii) Ισχύει $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε x $\in [1, 3]$ **.** Θέτουμε x=1 ,2,3, πολλαπλασιάζουμε τις ανισώσεις με -1 και χρησιμοποιώντας το i) προκύπτει $m \leq -2 \leq M$