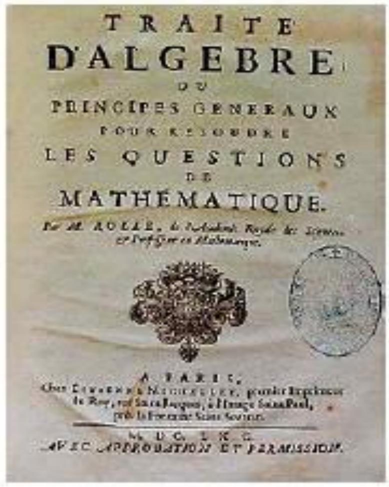
ΓΕΛ. …………………

<u>ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ</u> **2013-14**

Ονοματεπώνυμο………………………………… Τμήμα………………

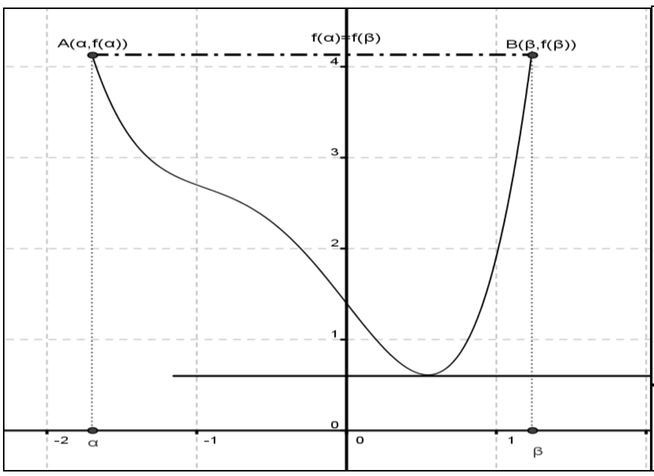
• Θεώρημα Rolle

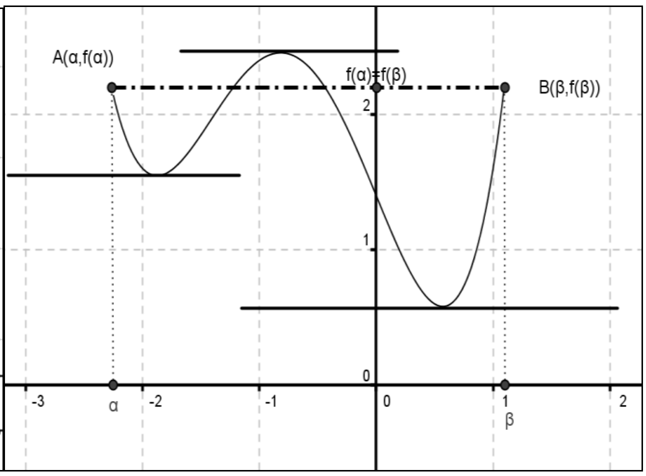


Michel Rolle (1652 – 1719) Γάλλος μαθηματικός, γεννήθηκε στο Ambert- Basse και πέθανε στο Παρίσι. Αυτοδίδακτος μαθηματικός, σε αυτόν οφείλεται ο συμβολισμός της νιοστής ρίζας $\sqrt[\nu]{x}$ (Α λυκείου) και η διατύπωση αλγόριθμου υπολογισμού του ΜΚΔ δύο πολυωνύμων (Β λυκείου).
Μία μορφή του θεωρήματος Rolle δόθηκε από τον Ινδό αστρονόμο Bhaskara II τον 12ο αιώνα.
Η απόδειξη όμως δόθηκε από τον Michel Rolle σε ένα κείμενο - **Démonstration d'une Méthode pour resoudre les Egalitez de tous les degrez** - που δημοσιεύτηκε στο Παρίσι το 1691.Το όνομα «Θεώρημα του Rolle» χρησιμοποιήθηκε αρχικά από το Γερμανό M.W.Drobisch το 1834 και από τον Ιταλό Giusto Bellavitis το 1846

Παρατηρήστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και την εφαπτομένη της , βλέποντας τις διαδοχικές της θέσεις κατά τη διάρκεια της κίνησής της και απαντήστε στο παρακάτω ερώτημα.

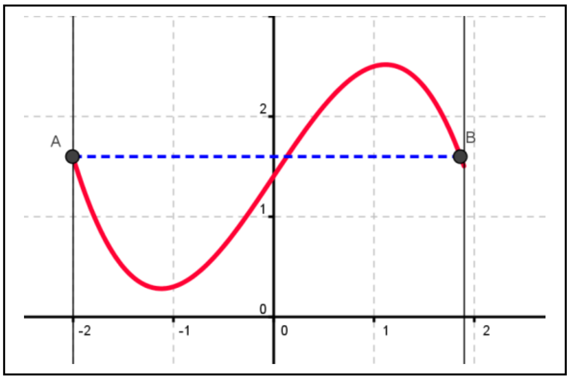
1. Βρείτε τι κοινό υπάρχει στα παρακάτω σχήματα:





Απάντηση:……………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

2. Την παραπάνω παρατήρηση, μπορείτε να τη διατυπώσετε με τη μορφή ενός θεωρήματος; (Προσπαθήστε, αφού πρώτα συμπληρώσετε το παρακάτω σχήμα, όπως τα προηγούμενα).

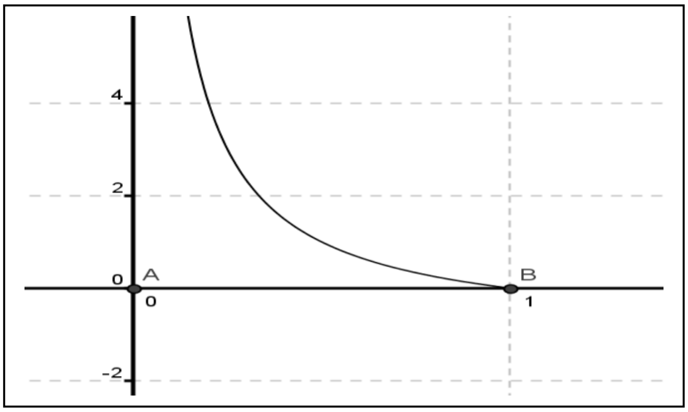


Απάντηση:……………………………………
………………………………………………………
………………………………………………………
………………………………………………………
………………………………………………………
………………………………………………………
………………………………………………………
………………………………………………………
………………………………………………………
………………………………………………………

3. Είναι δυνατόν να ισχύει αυτή η πρόταση για οποιαδήποτε καμπύλη;

Ας δούμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, με τύπο: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}-1 & ,x\in(0,1] \\ 0 & ,x=0\end{cases}$.

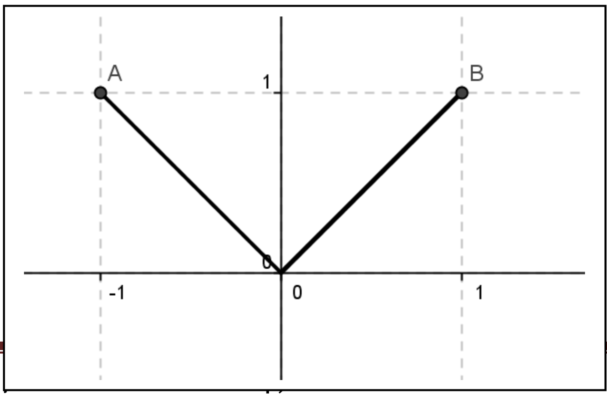
Τι λέτε για τη συνάρτηση αυτή; Ισχύει η προηγούμενη πρόταση;



Απάντηση:…………………………………
………………………………………………
………………………………………………
………………………………………………
………………………………………………
………………………………………………
………………………………………………
………………………………………………
………………………………………………
………………………………………………
………………………………………………

4. Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε καλύτερα το θεώρημα ως εξής:
………
………
………
………………………………………………………………………………………………………

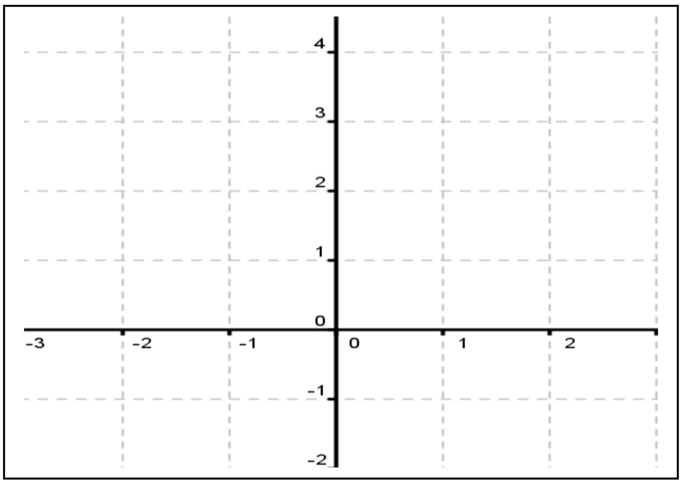
5. Είναι άραγε αρκετή η προϋπόθεση της συνέχειας για να εξασφαλίσουμε το συμπέρασμα του θεωρήματος; Προβληματιστείτε, κάνοντας τη γραφική παράσταση της $f(x)=|x|, x\in[-1,1]$. Τι λέτε για τη συνάρτηση αυτή;



Απάντηση:…………………………………
……………………………………………..
……………………………………………..
……………………………………………..
……………………………………………..
……………………………………………..
……………………………………………..
……………………………………………..
……………………………………………..
………………………………………………

6. Η συνθήκη λοιπόν της παραγωγισιμότητας είναι αναγκαία. Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε καλύτερα το θεώρημα ως εξής:
……
……
……………………………………………………………………………………………………

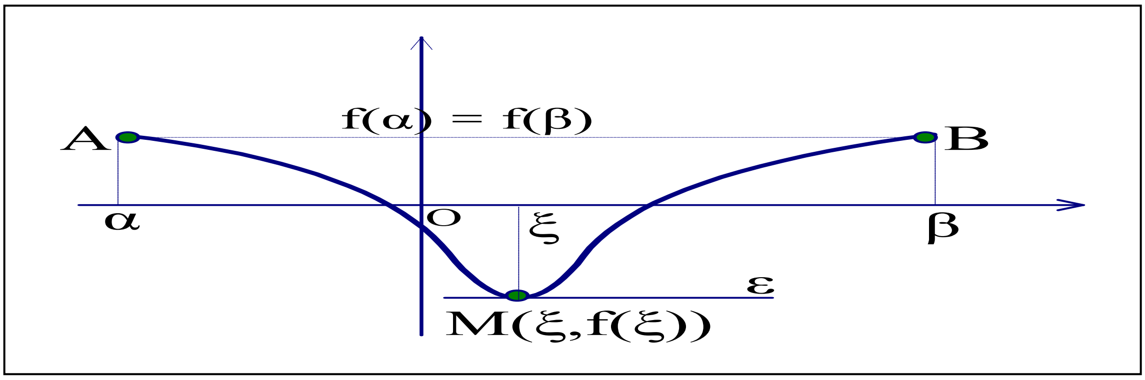
7. Κάν΄τε τώρα τη γραφική παράσταση της $f(x)=x^2, x\in[-2,0]$. Τι άλλο χρειάζεται για να ισχύει το συμπέρασμα; Ποια συνθήκη είναι ουσιαστική;



Απάντηση:…………………………………
…………………………………………
…………………………………………
…………………………………………
…………………………………………
…………………………………………
…………………………………………
…………………………………………
…………………………………………
…………………………………………
…………………………………………
…………………………………………

8. Ας θυμηθούμε, τώρα ποια σχέση έχει ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ευθείας (ε) μιας καμπύλης C_f με την παράγωγο της συνάρτησης στο σημείο επαφής της $\mathrm{A}(\xi, f(\xi))$, πότε δύο ευθείες είναι παράλληλες και πότε μία ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα των x.
Απάντηση:…………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………………..

9. Ας διατυπώσουμε τώρα το **Θεώρημα Rolle** σε τυπική γλώσσα:
- ➢ …………………………
- ➢ …………………………, τότε…………………………………………………………..
- ➢ …………………………



<u>Προσοχή:</u>

- **Αν για μία συνάρτηση f ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ τότε σε ότι αφορά στο συμπέρασμα του, οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:**
  - Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$.
  - Η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα στο ανοικτό διάστημα (α,β).
  - Η f' έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο ανοικτό διάστημα (α,β).

  (ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ του θεωρήματος Rolle)

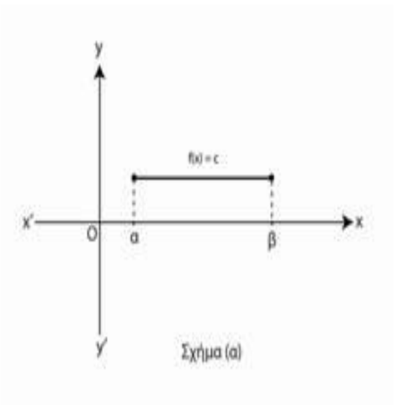
- **Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle (Σχήματα α,β,γ)**

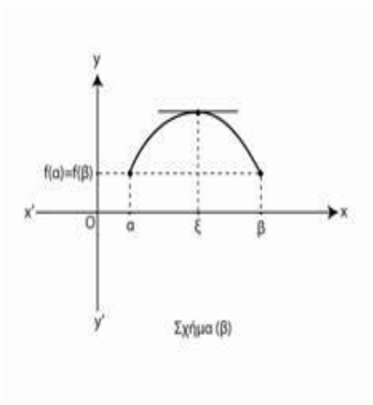
Α) Η γραφική παράσταση της f' ……………………………………………………………….

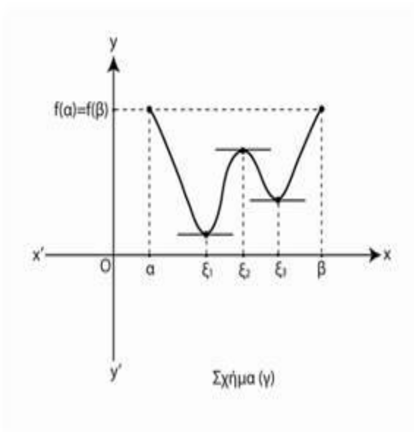
Β) Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha,\beta)$ ……………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

✓ Αν η συνάρτηση είναι **σταθερή** έχουμε $f'(x)=0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.(σχήμα (α))

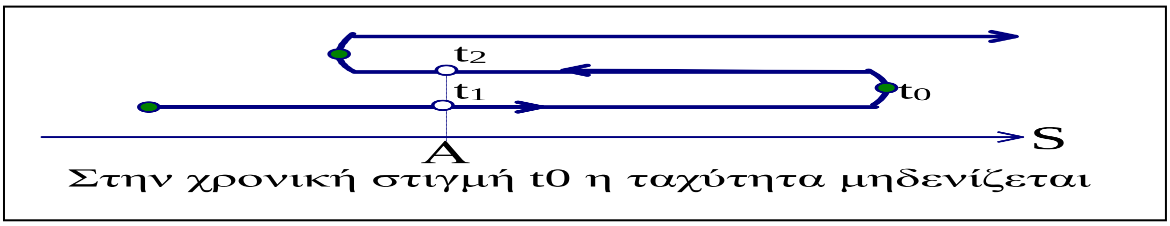






- **Φυσική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle:**

Αν ένα σώμα κινούμενο σε άξονα , διέρχεται από το σημείο Α την χρονική στιγμή t_1, και επιστρέφει πάλι στο Α την χρονική στιγμή t_2 , τότε υπάρχει χρονική t_0 στιγμή μεταξύ των t_1 , t_2 κατά την οποία η ταχύτητά του μηδενίζεται.



Απόδειξη

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ – Θ.Rolle

10. Οι υποθέσεις του Θ.Rolle πρέπει να ελέγχονται πολύ προσεκτικά γιατί αν κάποια από αυτές δεν ισχύει, τότε δεν ισχύει και το Θεώρημα. π.χ **Ελέγξτε ποια συνθήκη δεν ισχύει στα παρακάτω παραδείγματα:**

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & ,1<x\le 2 \\ 8 & ,x=1 \end{cases}$$ (δεν είναι συνεχής στο 1).

Δικαιολόγηση:……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………

$g(x)=\sqrt{x},\ \ x\in[0,1]$ ($f(0)\neq f(1)$).

Δικαιολόγηση:……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………

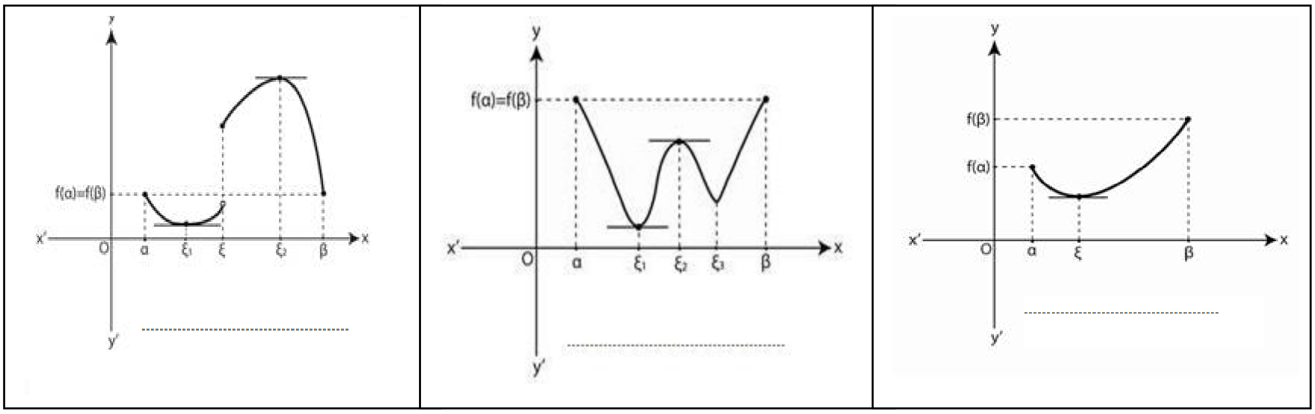
$$h(x)=\begin{cases} -x+1 & ,1\le x\le 2 \\ x-3 & ,2<x\le 3 \end{cases}$$ (δεν είναι παραγωγίσιμη στο 2)

Δικαιολόγηση:……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

11. Αν f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)=f(\beta)$ εφαρμόζεται το Θ.Rolle γιατί η f είναι ………………………στο…………αφού είναι ……………………………στο $[\alpha,\beta]$.

12. Το **αντίστροφο** του Θ.Rolle **δεν ισχύει** κατ΄ ανάγκη. Δηλαδή αν η παράγωγος μιας συνάρτησης f μηδενίζεται σε ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της f δεν σημαίνει ότι πληρούνται αναγκαία οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

Τι δεν ισχύει σε κάθε σχήμα;



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Ερώτηση 1

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β) και ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)$ με $\gamma\in(\alpha,\beta)$, τότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$, ώστε:

Επιλογή μίας απάντησης.
Α: $f^{(4)}(x_0)=0$ Β: $f''(x_0)=0$ Γ: $f'''(x_0)=0$ Δ:τίποτα από τα προηγούμενα
Γιατί:…………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

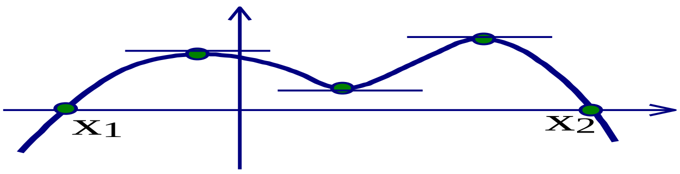
Ερώτηση 2
Δίνεται η f με πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$ έτσι ώστε $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$, τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το:
Επιλογή μίας απάντησης.
Α: πολύ δύο ρίζες Β: πολύ μία ρίζα Γ: καμία ρίζα Δ: το πολύ τρείς ρίζες
Γιατί.……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………

Ερωτήσεις σωστού-λάθους

Ερώτηση 1
Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε η συνάρτηση f είναι 1-1 στο $[\alpha,\beta]$.
Ερώτηση 2
Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\alpha,\beta)$ έτσι ώστε $f'(x_0)=0$ ή η f δεν παραγωγίζεται στο (α,β).
Ερώτηση 3
Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$,έτσι ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\mathrm{A}(x_0, f(x_0))$ να είναι παράλληλη στον άξονα xx'.
Ερώτηση 4
Έστω η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to[\alpha,\beta]$ που ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε και η συνάρτηση $g(x)=(f\circ f)(x)$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.
Ερώτηση 5
Δεν μπορεί ταυτόχρονα στο ίδιο διάστημα $\mathrm{A}=[\alpha,\beta]$ να ισχύουν το Θεώρημα του Rolle και το θεώρημα του Bolzano για μια συνάρτηση f.
Ερώτηση 6
Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)=f(\beta)$ και $f(\beta)=g(\beta)$, τότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε στα σημεία $\mathrm{A}(x_0, f(x_0))$ και $\mathrm{B}(x_0,g(x_0))$ οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες.
Ερώτηση 7
Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R με άπειρες ρίζες, τότε η f' έχει και αυτή άπειρες ρίζες.
Ερώτηση 8
Αν η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[\alpha,\beta]$ είναι παραγωγίσιμη και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $[\alpha,\beta]$.

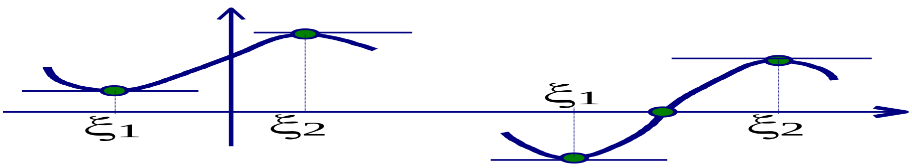
ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ- 2ο Μάθημα

13. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και έχει 2 ρίζες, τότε η f' έχει τουλάχιστον μία ρίζα.



Απάντηση:……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

14. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε ανάμεσα σε δύο διαδοχικές ρίζες της f' υπάρχει το πολύ μία ρίζα της συνάρτησης f.



Απάντηση:……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………

15. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και έχει 3 ρίζες, τότε η f' έχει 2 τουλάχιστον ρίζες και η f'' τουλάχιστον μία.

Απάντηση:……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

16. Αν $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f έχει το πολύ μία ρίζα.

Απάντηση:……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

………
…………………………………………………………………………

17. Αν $f''(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε η f έχει το πολύ δύο ρίζες.

Απάντηση:……………………………………………………………………………………………
………
………
………
………
………
………………………………………………………………………………………………

• Παρατηρήσεις - Μεθοδολογίες - Παραδείγματα

Αν θέλουμε:

1. η εξίσωση $f'(x)=0$ να έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α,β) τότε Θ. Rolle στο $[\alpha,\beta]$.
2. η εξίσωση $f(x)=0$ να έχει μία τουλάχιστον λύση στο (α,β) και δεν εφαρμόζετε το Θ. Bolzano τότε θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x)$ με $F'(x)=f(x)$ και εφαρμόζουμε το Θ. Rolle στην F.
3. η εξίσωση $f(x)=0$ να έχει το πολύ μία ρίζα στο (α,β) αποδεικνύουμε ότι $f'(x)\neq 0$ *, για κάθε* $x\in(\alpha,\beta)$ και αν δεχτούμε ότι η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες, καταλήγουμε σε άτοπο.
4. μοναδικότητα ρίζας σε ένα διάστημα την εξασφαλίζουμε με Θ. Bolzano, σύνολο τιμών ή ως προφανή και εργαζόμαστε όπως προηγούμενα.
5. η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει k διακεκριμένες ρίζες τότε η $f(x)=0$ θα έχει k+1 το πολύ διακεκριμένες ρίζες γιατί ανάμεσα από δύο διαδοχικές ρίζες της $f(x)=0$ θα υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της $f'(x)=0$.
6. η f να ικανοποιεί μία ισότητα που περιέχει τα $f(x_0), f'(x_0)$ και παράσταση του x_0 τότε θέτουμε $x_0=x$ και προσπαθούμε να εμφανίσουμε μία βοηθητική F (αρχική) μιας **κατάλληλης συνάρτησης.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) Άσκηση 1 σχολικό βιβλίο Α΄ ομάδας σελ.249

2) Άσκηση 1 σχολικό βιβλίο Β΄ ομάδας σελ. 249

3) Άσκηση 3 σχολικό βιβλίο Β΄ ομάδας σελ 250

4) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{x-2}=3-x$, έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0,3)$.

5) Η εξίσωση $10x^4-2x-5=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $[-1,1]$.

6) Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[-\pi,\pi]$ και άρτια. Να δειχτεί ότι υπάρχει $\xi\in(-\pi,\pi)$ ώστε να ισχύει : $f'(\xi)-4\xi^3=-3\eta\mu\xi$.

7) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $f(1)=5+f(0)$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=5$.

8) Έστω f,g παραγωγίσιμες στο $[\alpha,\beta]$ και $g(x)\neq 0$ με $f(\alpha)=f(\beta)=0$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)g(x_0)=f(x_0)g'(x_0)$.

9) Έστω f παραγωγίσιμη στο $[1,2]$ με $f(1)=e^{\lambda}f(2)$, $\lambda\in\Re$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=-\lambda f(x_0)$.

10) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $f(1)=1$ τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,1): f'(x_0)=2-\dfrac{1}{x_0}f(x_0)$.

Εύρεση κατάλληλης αρχικής συνάρτησης (Αφορά τις ασκήσεις 6-10)

- Η εύρεση της **κατάλληλης συνάρτησης** είναι πολλές φορές δύσκολη για αυτό χρησιμοποιούμε βοηθητική συνάρτηση .

Εύρεση βοηθητικής συνάρτησης

- **Αν έχουμε** $f'(x)=f(x)$ **η βοηθητική συνάρτηση είναι** $f(x)=ce^{x}$
- **Αν έχουμε α΄ μέλος** $f'(x)+\alpha=0$ **η βοηθητική συνάρτηση είναι** $h(x)=f(x)+\alpha x$
- **Αν έχουμε α΄ μέλος**

  $$f'(x)g(x)+g'(x)=0\Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x)g(x)+e^{f(x)}g'(x)=0\Leftrightarrow\left(e^{f(x)}\cdot g(x)\right)'=0$$

  η βοηθητική συνάρτηση είναι $h(x)=e^{f(x)}g(x)$
- **Αν έχουμε α΄ μέλος** $\dfrac{f'(x)}{f(x)}-\ln f(x)=0, \mu\varepsilon\, f(x)>0\Leftrightarrow\ (\ln f(x))'-\ln f(x)=0\Leftrightarrow$

  $\dfrac{e^{x}(\ln f(x))'-(e^{x})'\ln f(x)}{e^{2x}}=0$ **η βοηθητική συνάρτηση είναι** $h(x)=\dfrac{\ln f(x)}{e^{x}}$
- **Αν έχουμε α΄ μέλος** $\sigma\upsilon\nu x\cdot f(x)-\eta\mu x\cdot f'(x)=0$ **η βοηθητική συνάρτηση είναι** $h(x)=\dfrac{\eta\mu x}{f(x)}$
- **Αν έχουμε α΄ μέλος** $-\eta\mu x\cdot f(x)-\sigma\upsilon\nu x\cdot f'(x)=0$ **η βοηθητική συνάρτηση είναι** $h(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}$
- **Αν έχουμε α΄ μέλος** $-\lambda f(x)+(\alpha-x)f'(x)=0\Leftrightarrow-\lambda(\alpha-x)^{\lambda-1}f(x)+(\alpha-x)^{\lambda}f'(x)=0$ **η βοηθητική συνάρτηση είναι**

  $h(x)=(\alpha-x)^{\lambda}f(x)$
- **Αν έχουμε α΄ μέλος** $f'(x)-\dfrac{1}{\alpha-x}-\dfrac{1}{\beta-x}=0$ **η βοηθητική συνάρτηση είναι**

  $h(x)=(\alpha-x)(\beta-x)e^{f(x)}$
- **Αν έχουμε α΄ μέλος** $\dfrac{f'(x)}{f(x)}-\dfrac{1}{\alpha-x}-\dfrac{1}{\beta-x}=0$ **η βοηθητική συνάρτηση είναι**

  $h(x)=f(x)(\alpha-x)(\beta-x)$
- **Αν έχουμε α΄ μέλος** $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}+\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ **η βοηθητική συνάρτηση είναι** $h(x)=f(x)g(x)$