ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κωνσταντίνος Λ. Κωνσταντόπουλος
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

1) Η f είναι συνεχής στο $[2006,2007]$ με $f(2006)\neq 0$ και $\kappa.f(2006)+\lambda.f(2007)=0$ όπου κ,λ ομόσημοι. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(2006,2007)$.

*

2) Δίνονται οι συναρτήσεις f,g συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$, με $f(\alpha)<g(\alpha)$ και $f(\beta)>g(\beta)$. Να αποδειχθεί ότι τα διαγράμματα των C_f,C_g τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0\in(\alpha,\beta)$.

*

3) Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)+\kappa}{x^2-1}=l_1\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-\lambda}{x-2}=l_2\in\mathbb{R}$. Αν κ,λ ομόσημοι, να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,2)$.

*

4) Δίνονται οι συναρτήσεις f,g συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $f(\alpha)+f(\beta)=g(\alpha)+g(\beta)$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=g(x_0)$.

*

5) Έστω f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Αν $x_1,x_2,...x_\nu\in[\alpha,\beta]$ και $\kappa_1,\kappa_2,...\kappa_\nu>0$ να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi)=\frac{\kappa_1 f(x_1)+\kappa_2 f(x_2)+...+\kappa_\nu f(x_\nu)}{\kappa_1+\kappa_2+...+\kappa_\nu}.$$

*

6) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση : $4x^3-3x^2-8x+6=0$ έχει δύο ρίζες τουλάχιστον στο $(0,3)$.

*

7) Έστω f συνεχής στο $[0,1]$ και για την οποία ισχύουν $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}=2007$ και $\eta\mu 3x\leq xf(x)\leq 3x+x^2$ για κάθε $x\in(0,1)$. Να αποδειχθεί ότι η C_f τέμνει την ευθεία με εξίσωση $6x+y-5=0$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,1)$.

*

8) Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f:[2,4]\to\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in[2,4]$ τέτοιος ώστε να ισχύει $f(x_0)=\dfrac{f(2)+2f(3)+3f(4)}{6}$.

*

9) Έστω η συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}-\ln x$.

i) Να βρείτε τη μονοτονία της f.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

iii) Να δείξετε ότι υπάρχει ένας ακριβώς $x_0\in(0,1]$ τέτοιο ώστε $2x_0\ln x_0=2-3x_0$.

*

10) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x)-2f^2(x)+2f(x)=3x-2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,1)$.

*

11) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(0)=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0<0$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=e^{x_0}+x_0\eta\mu\frac{1}{x_0}$.

*

12) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(2)=-3$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(f(1)-2\right)x^3-3x+1\right]$.

*

13) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(1)=-2$ και $-1,2$ διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3f(0)+1}{x^2+2}$.

*

14) Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f:[0,\alpha]\to\mathbb{R}$ με $0<f(x)<\beta$ για κάθε $x\in[0,\alpha]$. Αν $\beta^2<3\alpha$ να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,\alpha)$ ώστε $f^2(x_0)-\beta f(x_0)+x_0=0$.

*

15) Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[0,3]$ και για την οποία ισχύουν $f(0)=f(3)$, $f(1)=f(2)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[0,2]: f(\xi)=f(\xi+1)$.

*

16) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3-\ln x-e^x$ ορισμένη στο $\Delta=(0,3]$

(i) Να μελετηθεί η μονοτονία της f στο Δ

(ii) Να βρεθεί το $f(\Delta)$

(iii) Να δειχθεί ότι η εξίσωση $\ln x+e^x=3$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα Δ.

*

17) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{6-x}-x$

(i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f

(ii) Να μελετηθεί η f ως προς τη συνέχεια

(iii) Να μελετηθεί η f ως προς το πρόσημο των τιμών της.

*

18) Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=x^3-\sigma\upsilon\nu(\pi x)-3$ και πεδίο ορισμού το διάστημα $\Delta=[-2,2]$. Να δείξετε ότι η f παίρνει την τιμή 2.

*

19) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^5=2-5x^2$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-1,1)$.

20) Αν η f είναι συνάρτηση συνεχής και γνησίως αύξουσα και ισχύει $f(3)=1, f(10)=4$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(1,4)$: $f\left(x_0^2\right)=x_0$.

*

21) Μία συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ και ισχύει $f(0)=f(1)$. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $f(x)=f\left(x+\frac{1}{3}\right)$ έχει μία τουλάχιστον (πραγματική) ρίζα.

*

22) Μία συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(10)=9$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει: $f(x).f\left(f(x)\right)=1$. Να βρείτε το $f(5)$.

*

23) Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x+3|-x^2-6x-9}{x^2-9} & , \ x<-3\\ \dfrac{\alpha x-\beta}{5x-15} & , \ x\geq -3\end{cases}$

(i) Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^*$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0=-3$.

(ii) Για τις τιμές των α,β που βρήκατε να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=x^4$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\left(-5,-\frac{1}{2}\right)$.

*

24) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+\beta x+\gamma$ και $g(x)=-x^2+\beta x+\gamma$ με $\gamma\neq 0$. Αν ρ_1 είναι ρίζα της f και ρ_2 ρίζα της g, με $\rho_1<\rho_2$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)+2g(x_0)=0$.

*

25) Έστω f συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση στο $[0,4]$ με $f(4)=1$ και $f(0)=7$.

i) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f

ii) Αν $\alpha\in[1,7]$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει μοναδική ρίζα στο $[0,4]$

iii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (0,4)$ τέτοιος ώστε $f(\xi)=\dfrac{f(1)+3f(2)+5f(3)}{9}$

*

26) Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, θέτουμε $z=f(\beta)-i\beta^2$ και $w=f(\alpha)+i\alpha^2$ με $\alpha,\beta\neq 0$. Αν $|w+\overline{z}|<|\overline{w}-z|$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$.

*

27) Έστω μία συνάρτηση f που είναι συνεχής στο $[0,1]$. Αν ισχύει $\left[f^2(0)+16\right]\left[f^2(1)+4\right]\leq\left[f(0)f(1)-8\right]^2$, να αποδείξετε ότι η f έχει μία τουλάχιστον, ρίζα στο $[0,1]$.

*

28) Έστω μία συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $\alpha\beta>0$. Αν για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ισχύει $\alpha<f(x)<\beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιος ώστε $x_0 f(x_0)=\alpha\beta$.

*

29) Έστω μία συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f^3(x)+f^2(x)+f(x)=xe^x-\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

*

30) Δίνεται η συνάρτηση f που είναι συνεχής στο $[0,2]$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=\dfrac{6f(0)+5f(1)+4f(2)}{15}$.

*