Γενική Φυσική

Κωνσταντίνος Χ. Παύλου
Φυσικός – Ραδιοηλεκτρολόγος (MSc)
$2^{ο}$ Γενικό Λύκειο Καστοριάς

Καστοριά, Ιούλιος 14

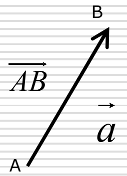
Γενική Φυσική

Α. Μαθηματική Εισαγωγή

- Πράξεις με αριθμούς σε εκθετική μορφή
- Επίλυση βασικών μορφών εξισώσεων
- Συναρτήσεις
- Στοιχεία τριγωνομετρίας
- **Διανύσματα**

Διανύσματα

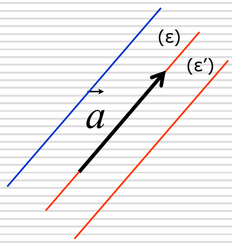
- Διάνυσμα ονομάζεται ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα που καθορίζεται από δύο σημεία Α και Β.
- Το σημείο Α αποτελεί την αρχή και το σημείο Β, το τέλος (ή πέρας) του διανύσματος.
- Αν το διάνυσμα είναι εφαρμοστό, τότε η αρχή του ονομάζεται και σημείο εφαρμογής του διανύσματος.
- Στο γραπτό λόγο, πολλές φορές αναφερόμαστε σ' ένα διάνυσμα γράφοντας το σύμβολό του έντονα: **a**



Συνήθως δε μας ενδιαφέρει η αρχή και το τέλος του διανύσματος κι έτσι χρησιμοποιούμε έναν πιο απλό συμβολισμό.

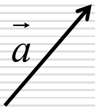
Διεύθυνση & φορέας

- Διεύθυνση ενός διανύσματος ονομάζουμε κάθε ευθεία που είναι παράλληλη στο διάνυσμα.
- Πόσες τέτοιες ευθείες υπάρχουν? Πόσες διευθύνσεις έχει ένα διάνυσμα?
- Φορέας ενός διανύσματος ονομάζεται η (μοναδική) ευθεία πάνω στην οποία ανήκει το διάνυσμα.
- Προφανώς και ο φορέας ορίζει τη διεύθυνση του διανύσματος.



Φορά & κατεύθυνση

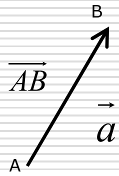
- Φορά ενός διανύσματος είναι η φορά 'κίνησης' από την αρχή προς το τέλος του διανύσματος.
- Συμβολίζεται με ένα βελάκι συνήθως στο πέρας του διανύσματος.
- Κατεύθυνση ενός διανύσματος είναι η φορά και η διεύθυνσή του μαζί.



Μέτρο

- Μέτρο ενός διανύσματος ονομάζουμε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που ορίζει το διάνυσμα, υπό κατάλληλη κλίμακα και μονάδα μέτρησης.
- Συμβολισμός:

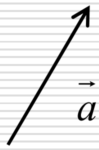
$$a \text{ ή } |\vec{a}| \text{ ή } |\overrightarrow{AB}|$$



Μέτρο

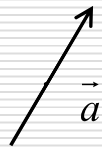
- Αφού το μέτρο ενός διανύσματος ορίστηκε ως μήκος ευθύγραμμου τμήματος, προφανώς θα είναι ένας μη-αρνητικός αριθμός.
- Δηλαδή για κάθε διάνυσμα θα ισχύει:

$$a = \left|\vec{a}\right| \geq 0$$



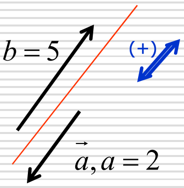
Το μηδενικό διάνυσμα

- Αν το μέτρο ενός διανύσματος είναι ίσο με μηδέν τότε το διάνυσμα ονομάζεται μηδενικό διάνυσμα.
- Ένα μηδενικό διάνυσμα δεν έχει καθορισμένη κατεύθυνση με αποτέλεσμα, ως διεύθυνσή του να μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε διεύθυνση, και ως φορά οποιαδήποτε φορά.
- Ουσιαστικά ένα τέτοιο διάνυσμα είναι (έχει εκφυλιστεί σ') ένα σημείο.



Αλγεβρική τιμή

- **Ορίζοντας μια θετική φορά** κατά τη διεύθυνση ενός διανύσματος, αποκτά έννοια η αλγεβρική τιμή του διανύσματος:
- Η αλγεβρική τιμή του διανύσματος είναι ίση με το μέτρο του διανύσματος, αν η φορά του διανύσματος συμπίπτει με τη θετική φορά, και αντίθετη του μέτρου του αν έχει τη αντίθετη φορά.

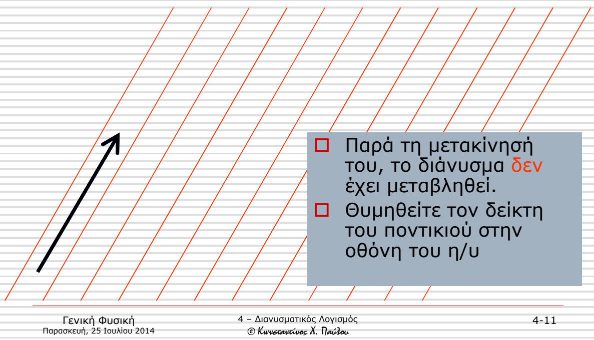


- Αλγεβρική τιμή του **a** : +2
- Αλγεβρική τιμή του **b** : +5

Είδη διανυσμάτων

- Σχετικά με το σημείο εφαρμογής τους, τα διανύσματα διακρίνονται σε τρεις κατηγορίες:
  1. Εφαρμοστά: είναι τα διανύσματα που έχουν καθορισμένο φορέα και σημείο εφαρμογής.
  2. Ολισθαίνοντα: είναι αυτά που έχουν καθορισμένο φορέα αλλά όχι σταθερό σημείο εφαρμογής.
  3. Ελεύθερα: είναι αυτά που έχουν καθορισμένη κατεύθυνση, αλλά όχι καθορισμένο φορέα και σημείο εφαρμογής.
- Σ' ό,τι ακολουθεί τα διανύσματα θα θεωρούνται ελεύθερα. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να μετακινήσουμε το διάνυσμα παράλληλα με τον εαυτό του (χωρίς όμως να αλλάξουμε τη φορά ή/και το μέτρο του) χωρίς να αλλάζει τίποτα.
- Η διαδικασία αυτή είναι γνωστή ως παράλληλη μεταφορά.

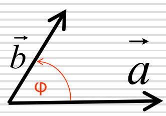
Παράλληλη μεταφορά



- Παρά τη μετακίνησή του, το διάνυσμα δεν έχει μεταβληθεί.
- Θυμηθείτε τον δείκτη του ποντικιού στην οθόνη του η/υ

Γωνία δυο διανυσμάτων

- Τη μικρότερη γωνία που σχηματίζουν οι φορείς δύο διανυσμάτων θα την ονομάζουμε γωνία αυτών των δύο διανυσμάτων.
- Για τις ανάγκες μας, τη γωνία αυτή **δε** θα τη θεωρούμε προσανατολισμένη.



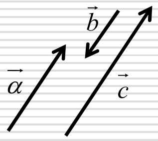
$$\phi = \widehat{\left(\vec{a}, \vec{b}\right)} = \angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$$

Συγγραμμικά (παράλληλα)

- Συγγραμμικά ή παράλληλα λέγονται δυο διανύσματα όταν έχουν την ίδια διεύθυνση.
- Για να δηλώσουμε ότι τα διανύσματα **a** και **b** είναι μεταξύ τους συγγραμμικά, γράφουμε:

$$\vec{a} \parallel \vec{b}$$

- Προσέξτε ότι τα παράλληλα διανύσματα σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 0 ή 180°.



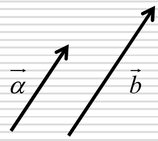
$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \angle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$$

Ομόρροπα

- Ομόρροπα λέγονται δυο διανύσματα όταν έχουν την ίδια διεύθυνση και την ίδια φορά, δηλαδή όταν έχουν την ίδια κατεύθυνση. Γράφουμε:

$$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$$

- Τα ομόρροπα διανύσματα σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 0.
- Προσέξτε ότι τα ομόρροπα διανύσματα είναι μεταξύ τους και συγγραμμικά, όμως τα συγγραμμικά δεν είναι και κατ' ανάγκη και ομόρροπα.



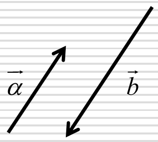
$$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \Leftrightarrow \angle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 0$$

Αντίρροπα

- Αντίρροπα λέγονται δυο διανύσματα όταν έχουν την ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά, δηλαδή όταν έχουν αντίθετη κατεύθυνση. Γράφουμε:

$$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$$

- Τα αντίρροπα διανύσματα σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία π.
- Προσέξτε ότι τα αντίρροπα διανύσματα είναι μεταξύ τους και συγγραμμικά, όμως τα συγγραμμικά δεν είναι και κατ' ανάγκη και αντίρροπα.



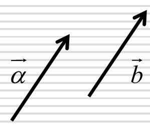
$$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b} \Leftrightarrow \angle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \pi$$

Ίσα

- Ίσα ονομάζονται δύο διανύσματα όταν έχουν το ίδιο μέτρο και την ίδια κατεύθυνση (ομόρροπα).
- Γράφουμε

$$\vec{a} = \vec{b}$$

- Προσέξτε ότι η παραπάνω εξίσωση είναι μια ισότητα διανυσμάτων και όχι μια ισότητα αριθμών. Αυτό σημαίνει ότι η παραπάνω εξίσωση περιλαμβάνει περισσότερες πληροφορίες σε σχέση με μια απλή αριθμητική εξίσωση.



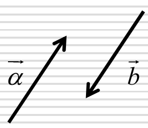
$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \end{cases}$$

Αντίθετα

- Αντίθετα ονομάζονται δύο διανύσματα όταν έχουν το ίδιο μέτρο και αντίθετη κατεύθυνση (αντίρροπα).
- Γράφουμε

$$\vec{a} = -\vec{b}$$

- Προσέξτε ότι η παραπάνω εξίσωση είναι μια ισότητα διανυσμάτων και όχι μια ισότητα αριθμών. Αυτό σημαίνει ότι η παραπάνω εξίσωση περιλαμβάνει περισσότερες πληροφορίες σε σχέση με μια απλή αριθμητική εξίσωση.

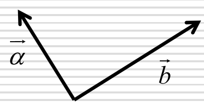


$$\vec{a} = -\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b} \end{cases}$$

Κάθετα

- Κάθετα λέγονται δύο διανύσματα όταν σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 90°, και για να το δηλώσουμε αυτό γράφουμε

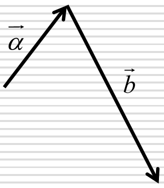
$$\vec{a} \perp \vec{b}$$



$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \angle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Διαδοχικά

- Διαδοχικά ονομάζονται δυο διανύσματα αν το τέλος του ενός αποτελεί την αρχή του άλλου.



Παρατηρήσεις

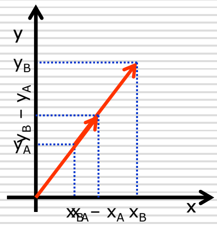
1. **Ένα διάνυσμα είναι ένα αντικείμενο με αριθμητικές και γεωμετρικές ιδιότητες.**
   - Άρα ο πλήρης καθορισμός ενός διανύσματος απαιτεί καθορισμό του μέτρου του όπως επίσης και της κατεύθυνσής του (διεύθυνση και φορά).
2. Η ισότητα των μέτρων δύο διανυσμάτων **δεν** συνεπάγεται την ισότητα των διανυσμάτων.

Παρατηρήσεις

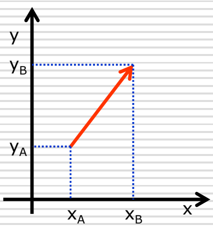
3. Η ισότητα των διανυσμάτων **δεν** απαιτεί τα διανύσματα να βρίσκονται στην ίδια θέση του χώρου.
   - Άρα όλα τα διανύσματα που έχουν το ίδιο μέτρο και την ίδια κατεύθυνση είναι μεταξύ τους ίσα, ανεξάρτητα από το που βρίσκεται η αρχή τους. Αυτή η ιδιότητα μας επιτρέπει να μεταφέρουμε ένα διάνυσμα παράλληλα προς την αρχική του κατεύθυνση, χωρίς να επηρεάζεται το διάνυσμα. Κάθε διάνυσμα μπορεί να μεταφερθεί παράλληλα προς τον εαυτό του. (Υπενθυμίζεται ότι όλα τα διανύσματα θεωρούνται ελεύθερα).

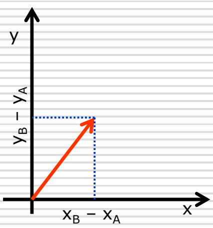
Παρατηρήσεις

4. Με βάση την προηγούμενη παρατήρηση μπορούμε ένα οποιοδήποτε διάνυσμα να το μεταφέρουμε παράλληλα μέχρις ότου η αρχή του να συμπέσει με την αρχή του εκάστοτε συστήματος συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε. Έτσι για τον πλήρη καθορισμό του διανύσματος χρειαζόμαστε μόνο τις συντεταγμένες του πέρατός του αφού πάντα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η αρχή του βρίσκεται στην αρχή των αξόνων.

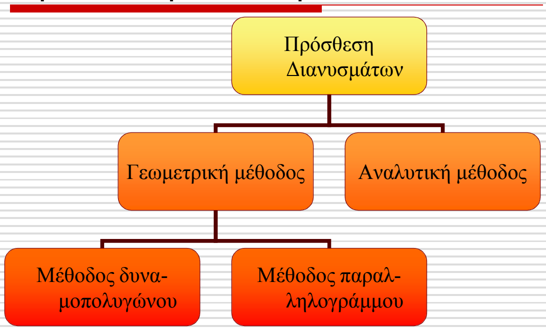


Παρατηρήσεις



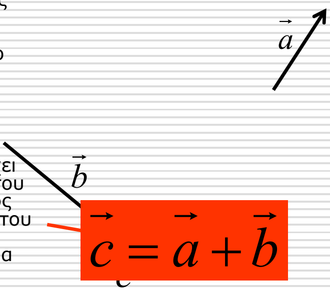


Πρόσθεση διανυσμάτων



Μέθοδος δυναμοπολυγώνου

- Κάνοντας χρήση της παράλληλης μεταφοράς τοποθετούμε τα δύο διανύσματα που θέλουμε να προσθέσουμε έτσι ώστε να γίνουν διαδοχικά.
- Το διάνυσμα που έχει ως αρχή την αρχή του πρώτου διανύσματος και τέλος, το τέλος του δευτέρου είναι εξ ορισμού το άθροισμα που ψάχνουμε.



$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

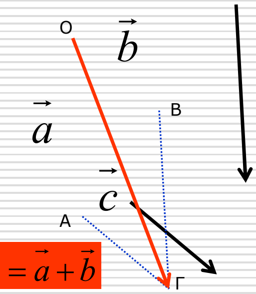
Μέθοδος δυναμοπολυγώνου

Μέθοδος δυναμοπολυγώνου

- Παρατήρηση
  - Η μέθοδος του δυναμοπολυγώνου είναι δύσχρηστη και δεν χρησιμοποιείται στις εφαρμογές.
  - Παρουσιάζει μόνο θεωρητικό ενδιαφέρον για τον ορισμό και τις ιδιότητες της πρόσθεσης των διανυσμάτων καθώς και για την άμεση εποπτεία που μας προσφέρει.

Μέθοδος παραλληλογράμμου

- Για να προσθέσουμε δυο διανύσματα με τη μέθοδο του παραλληλογράμμου, τα τοποθετούμε ώστε να έχουν κοινή αρχή, έστω το σημείο Ο που βλέπουμε.
- Φέροντας παράλληλα προς τα αρχικά διανύσματα, ευθύγραμμα τμήματα, σχηματίζεται ένα παραλληλόγραμμο (το ΟΑΒΓ).
- Το άθροισμα των δυο διανυσμάτων παριστάνεται από τη διαγώνιο ΟΓ.

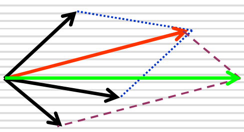


$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

Μέθοδος παραλληλογράμμου

- Η μέθοδος του παραλληλογράμμου μπορεί να γενικευτεί για περισσότερα των δυο διανυσμάτων ως εξής:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4 + \ldots = \left(\vec{v}_1 + \vec{v}_2\right) + \vec{v}_3 + \vec{v}_4 + \ldots =$$
$$= \vec{v}_{12} + \vec{v}_3 + \vec{v}_4 + \ldots = \left(\vec{v}_{12} + \vec{v}_3\right) + \vec{v}_4 + \ldots =$$
$$= \vec{v}_{123} + \vec{v}_4 + \ldots = \ldots$$



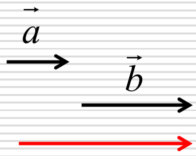
- όπου $\mathbf{v}_{12}$ είναι το διανυσματικό άθροισμα των $\mathbf{v}_1$ και $\mathbf{v}_2$, κλπ.
- Λόγω όμως της πολυπλοκότητάς της η μέθοδος χρησιμοποιείται μόνο για την περίπτωση πρόσθεσης δύο ή τριών διανυσμάτων και πολύ σπάνια για περισσότερα.

Ειδικές περιπτώσεις πρόσθεσης

- Κατά την πρόσθεση δύο διανυσμάτων παρουσιάζονται συχνά ορισμένες **ειδικές περιπτώσεις** τις οποίες αξίζει να τις μελετήσουμε αναλυτικά.
- **Όπως έχουμε πει, το διάνυσμα είναι ένα αντικείμενο με αριθμητικές (μέτρο) και γεωμετρικές (κατεύθυνση) ιδιότητες.**
- Συνεπώς, ο πλήρης καθορισμός του αθροίσματος θα πρέπει να περιλαμβάνει τον καθορισμό του μέτρου αλλά και της κατεύθυνσης του νέου διανύσματος. Αυτή η παρατήρηση δεν ισχύει μόνο στην πρόσθεση αλλά σε κάθε περίπτωση προσδιορισμού ενός διανύσματος.
- Τη γωνία που σχηματίζουν μεταξύ τους αυτά τα δύο διανύσματα θα τη συμβολίσουμε με φ.

Ομόρροπα

- Στην περίπτωση αυτή, το άθροισμα έχει:
  1. **Μέτρο**: το άθροισμα των μέτρων των διανυσμάτων που προσθέτουμε.
  2. **Κατεύθυνση**: την κατεύθυνση των διανυσμάτων που προσθέτουμε.

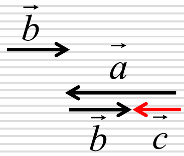


$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$

$$\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}\Rightarrow\begin{cases}c=a+b\\ \vec{c}\uparrow\uparrow\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}\end{cases}$$

Αντίρροπα

- Στην περίπτωση αυτή, το άθροισμα έχει:
  1. **Μέτρο**: την απόλυτη τιμή της διαφοράς των μέτρων των διανυσμάτων που προσθέτουμε.
  2. **Κατεύθυνση**: την κατεύθυνση του διανύσματος με το μεγαλύτερο μέτρο.

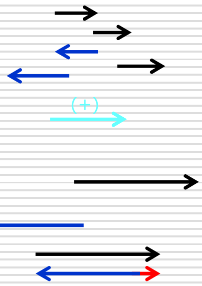


$$\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}\Rightarrow\begin{cases}c=|a-b|\\ \vec{c}\uparrow\uparrow\vec{a},\ \alpha\nu\ a>b\\ \vec{c}\uparrow\uparrow\vec{b},\ \alpha\nu\ a<b\end{cases}$$

$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$

Συγγραμμικά

- Για να προσθέσουμε πολλά συγγραμμικά διανύσματα ακολουθούμε την εξής διαδικασία:
  1. Ορίζουμε μια θετική φορά στη διεύθυνση των διανυσμάτων.
  2. Προσθέτουμε τα διανύσματα που έχουν τη θετική φορά (ομόρροπα).
  3. Προσθέτουμε τα διανύσματα που έχουν την αρνητική φορά (ομόρροπα).
  4. Προσθέτουμε τα δύο αυτά διανύσματα (αντίρροπα).



Κάθετα διανύσματα

- Εργαζόμαστε με τη μέθοδο του παραλληλογράμμου.
- Το μέτρο και η κατεύθυνση του αθροίσματος προκύπτουν εύκολα από τα ορθογώνια τρίγωνα που σχηματίζονται.
- Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΓ έχουμε:

$$(\mathrm{O\Gamma})=\sqrt{(\mathrm{\Gamma B})^2+(\mathrm{OB})^2}$$

- Άρα το μέτρο του αθροίσματος είναι:

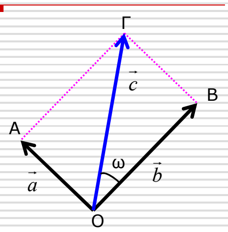
$$c=\sqrt{a^2+b^2}$$

- Ενώ για τη γωνία ω έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\omega=\frac{(\mathrm{B\Gamma})}{(\mathrm{OB})}$$

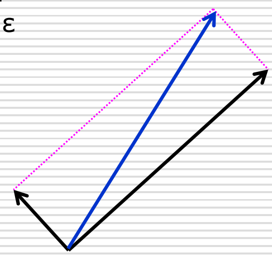
- Και συνεπώς:

$$\varepsilon\varphi\omega=\frac{a}{b}$$

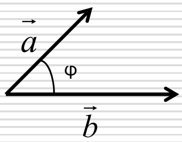


Κάθετα διανύσματα

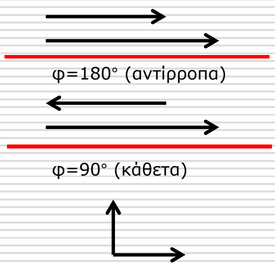
- Το άθροισμα “κλίνει” προς το διάνυσμα με το μεγαλύτερο μέτρο.
- Αντί για τη γωνία ω θα μπορούσαμε να βρούμε τη συμπληρωματική της.



Γενική περίπτωση

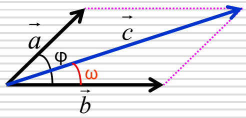


Η γωνία που σχηματίζουν τα δύο διανύσματα είναι φ.



Γενική περίπτωση

- Το μέτρο του αθροίσματος προκύπτει από το γενικευμένο πυθαγόρειο θεώρημα:

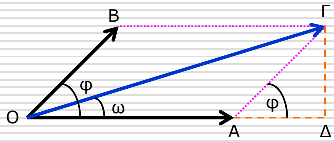


$$c=\sqrt{a^2+b^2+2ab\sigma\upsilon\nu\phi}$$

- Ενώ η γωνία που σχηματίζει το νέο διάνυσμα με το διάνυσμα **b** είναι:

$$\varepsilon\phi\omega=\frac{\alpha\eta\mu\phi}{b+\alpha\sigma\upsilon\nu\phi}$$

Γενική περίπτωση



$$\varepsilon\phi\omega=\frac{(\Gamma\Delta)}{(\mathrm{O}\Delta)}=\frac{(\mathrm{A}\Gamma)\eta\mu\phi}{(\mathrm{OA}+\mathrm{A}\Delta)}=$$
$$=\frac{(\mathrm{OB})\eta\mu\phi}{(\mathrm{OA})+(\mathrm{OB})\sigma\upsilon\nu\phi}$$

$$(\mathrm{O}\Gamma)^2=(\mathrm{O}\Delta)^2+(\Delta\Gamma)^2=(\mathrm{OA}+\mathrm{A}\Delta)^2+(\Delta\Gamma)^2=$$
$$=(\mathrm{OA}+\mathrm{A}\Gamma\sigma\upsilon\nu\phi)^2+(\mathrm{A}\Gamma\eta\mu\phi)^2=(\mathrm{OA}+\mathrm{OB}\sigma\upsilon\nu\phi)^2+(\mathrm{OB}\eta\mu\phi)^2=$$
$$=(\mathrm{OA})^2+(\mathrm{OB})^2\sigma\upsilon\nu^2\phi+2(\mathrm{OA})(\mathrm{OB})\sigma\upsilon\nu\phi+(\mathrm{OB})^2\eta\mu^2\phi=$$
$$=(\mathrm{OA})^2+(\mathrm{OB})^2\left(\sigma\upsilon\nu^2\phi+\eta\mu^2\phi\right)+2(\mathrm{OA})(\mathrm{OB})\sigma\upsilon\nu\phi=$$
$$=(\mathrm{OA})^2+(\mathrm{OB})^2+2(\mathrm{OA})(\mathrm{OB})\sigma\upsilon\nu\phi$$

Βαθμωτός πολλαπλασιασμός

- Ορίζεται ως το γινόμενο ενός αριθμού (λ) και ενός διανύσματος (**a**).
- Το αποτέλεσμα είναι διάνυσμα (**b**):

$$\vec{b}=\lambda\vec{a}$$

- Για την κατεύθυνση του νέου διανύσματος θα ισχύει:

$$\lambda>0\Rightarrow\vec{b}\uparrow\uparrow\vec{a}$$
$$\lambda<0\Rightarrow\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{a}$$

- Ενώ το μέτρο του θα είναι:

$$b=|\lambda|a$$

Βαθμωτός πολλαπλασιασμός

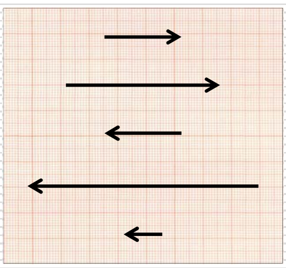
- Αφού b=|λ|a, θα ισχύει:

$$|\lambda|>1\Rightarrow b>a$$
$$|\lambda|=1\Rightarrow b=a$$
$$|\lambda|<1\Rightarrow b<a$$

- Προφανώς, αν λ=0 ή/και **a**=**0**, θα είναι και **b**=**0**.
- Με βάση τα προηγούμενα, η διαίρεση ενός διανύσματος μ' έναν αριθμό ανάγεται στον πολλαπλασιασμό του διανύσματος με τον αντίστροφο του αριθμού:

$$\frac{\vec{a}}{\mu}=\left(\frac{1}{\mu}\right)\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}$$

Βαθμωτός πολλαπλασιασμός



$\vec{a}$

$2\vec{a}$

$-\vec{a}$

$-3\vec{a}$

$-\frac{1}{2}\vec{a}$

Μοναδιαία διανύσματα

- Πολλές φορές, διανυσματικές ποσότητες εκφράζονται συναρτήσει μοναδιαίων διανυσμάτων.
- Ένα μοναδιαίο διάνυσμα δεν έχει διαστάσεις και το μήκος του είναι η μονάδα.
- Χρησιμεύει για να ορίσει μια κατεύθυνση στο χώρο.
- Τα μοναδιαία διανύσματα λοιπόν δεν έχουν άλλη χρησιμότητα από το να μας διευκολύνουν στη περιγραφή μιας κατεύθυνσης στο χώρο.
- Ένα διάνυσμα **a** γράφεται:

$$\vec{a}=a\hat{u}_a$$

- Όπου $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{a}}$, είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του **a**.

Μοναδιαία διανύσματα

- Δεδομένου ότι

$$\hat{u}_a = \frac{\vec{a}}{a} = \left(\frac{1}{a}\right)\vec{a}$$

- Καταλαβαίνουμε ότι

$$\hat{u}_a \uparrow\uparrow \vec{a},\ \alpha\varphi o\acute{\upsilon}, \alpha > 0$$

- Τονίζεται ότι το μοναδιαίο διάνυσμα έχει μέτρο ίσο με τη μονάδα:

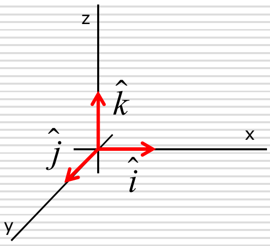
$$|\hat{u}| = u = 1$$

- Έχοντας ορίσει ένα μοναδιαίο διάνυσμα μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για να εκφράσουμε οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα παράλληλο προς το **a**.
- Έτσι, αν **b** και **c** είναι δυο διανύσματα, ομόρροπο και αντίρροπο του **a** αντίστοιχα, αυτά μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a} \Rightarrow \vec{b} = b\hat{u}_a$$

$$\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{a} \Rightarrow \vec{c} = -c\hat{u}_a$$

Μοναδιαία διανύσματα



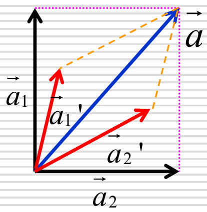
- Για τα τρία μοναδιαία διανύσματα που ορίζουν τις κατευθύνσεις x, y και z, θα ισχύει:

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$

$$\hat{i} \perp \hat{j} \perp \hat{k}$$

Συνιστώσες ενός διανύσματος

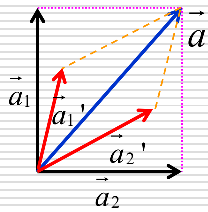
- Ανάλυση ενός διανύσματος ονομάζουμε την εύρεση δύο (τριών για τρισδιάστατη περίπτωση) άλλων διανυσμάτων που έχουν ως άθροισμα το αρχικό διάνυσμα.
- Προφανώς το πρόβλημα, όπως βλέπουμε και στο σχήμα δεν έχει μονοσήμαντη λύση.



$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{a}_1{}' + \vec{a}_2{}'$$

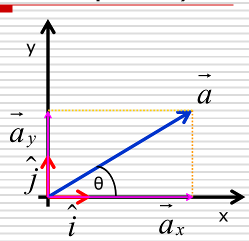
Συνιστώσες ενός διανύσματος

- Γενικά μιλώντας υπάρχει μια απειρία συνδυασμών.
- Η απειρία αυτή αίρεται αν απαιτήσουμε η ανάλυση να γίνει ως προς κάποιο <u>συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων</u>.
- Έτσι για παράδειγμα η ανάλυση του **a** σε δύο κάθετες συνιστώσες είναι τα διανύσματα $\mathbf{a_1}$ και $\mathbf{a_2}$.
- Συνηθέστερα, τα διανύσματα αυτά τα συμβολίζουμε με $\mathbf{a_x}$ και $\mathbf{a_y}$ αντίστοιχα.



Συνιστώσες ενός διανύσματος

- Τα διανύσματα $\mathbf{a_x}$ και $\mathbf{a_y}$ ονομάζονται (διανυσματικές) συνιστώσες του **a** (ως προς το συγκεκριμένο σύστημα αξόνων).
- Το διάνυσμα **a** αποτελεί τη συνισταμένη των $\mathbf{a_x}$ και $\mathbf{a_y}$.



- Εξ' ορισμού: $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y,\ \vec{a}_x \perp \vec{a}_y$

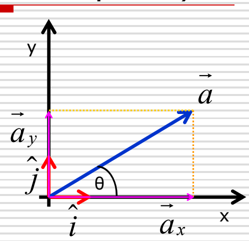
Συνιστώσες ενός διανύσματος

- Από τα ορθογώνια τρίγωνα που σχηματίζονται έχουμε:

$$a_x = a\sigma\upsilon\nu\theta$$

$$a_y = a\eta\mu\theta$$

- όπου οι αριθμητικές ποσότητες a_x και a_y ονομάζονται (βαθμωτές) συνιστώσες του **a** και μπορούν να πάρουν και θετικές τιμές και αρνητικές (φυσικά και μηδέν).

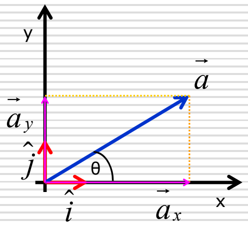


Συνιστώσες ενός διανύσματος

- Οι αντίστροφες των προηγούμενων σχέσεων γράφονται:

$$a=\sqrt{(a_x)^2+(a_y)^2}$$

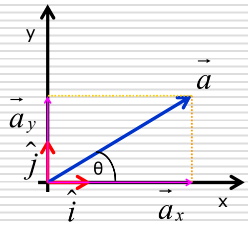
$$\varepsilon\phi\theta=\frac{a_y}{a_x}$$



Συνιστώσες ενός διανύσματος

$$a_x=a\sigma\upsilon\nu\theta \qquad a=\sqrt{(a_x)^2+(a_y)^2}$$

$$a_y=a\eta\mu\theta \qquad \varepsilon\phi\theta=\frac{a_y}{a_x}$$



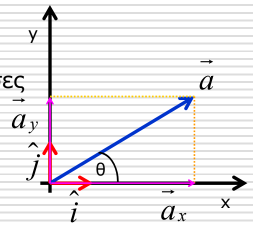
- Οι παραπάνω σχέσεις αποτελούν τις δύο όψεις του ίδιου νομίσματος. Μετά την ανάλυση ενός διανύσματος στις συνιστώσες του, οι ίδιες οι συνιστώσες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να ορίσουν το διάνυσμα.
- Αντί των δύο αριθμών α (μέτρο του διανύσματος) και θ (κατεύθυνση), έχουμε τώρα τους αριθμούς $α_x$ και $α_y$.

Συνιστώσες ενός διανύσματος

- Με βάση τα μοναδιαία διανύσματα, οι διανυσματικές συνιστώσες του **α** γράφονται:

$$\vec{a}_x=a_x\hat{i}$$

$$\vec{a}_y=a_y\hat{j}$$



- Με αποτέλεσμα να έχουμε:

$$\vec{a}=\vec{a}_x+\vec{a}_y=a_x\hat{i}+a_y\hat{j}$$

Πρόσθεση – αναλυτική μέθοδος

- Έστω **c** το άθροισμα των **a** και **b**:

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$$

- Σ' ένα δοσμένο σύστημα συντεταγμένων, δυο διανύσματα όπως τα **c** και **a**+**b** μπορούν να είναι ίσα μόνο αν οι αντίστοιχες συνιστώσες τους είναι ίσες:

$$c_x=a_x+b_x$$

$$c_y=a_y+b_y$$

- Υπολογίζοντας τις συνιστώσες c_x και c_y μπορούμε να υπολογίσουμε το μέτρο και την κατεύθυνση του **c**:

$$c=\sqrt{(c_x)^2+(c_y)^2}$$

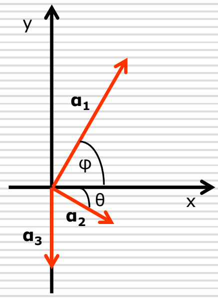
$$\varepsilon\phi\theta=\frac{c_y}{c_x}$$

Πρόσθεση – αναλυτική μέθοδος

- Έχουμε λοιπόν τον ακόλουθο αναλυτικό κανόνα για την πρόσθεση διανυσμάτων:
  1. Διαλέγουμε ένα (βολικό) σύστημα συντεταγμένων
  2. Αναλύουμε όλα τα διανύσματα στις x και y συνιστώσες τους
  3. Βρίσκουμε τις συνιστώσες του αθροίσματος (δηλ. το άθροισμα των συνιστωσών) ξεχωριστά για την κατεύθυνση x και y.
  4. Υπολογίζουμε το μέτρο και την κατεύθυνση του αθροίσματος.

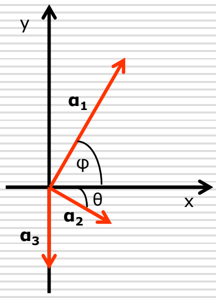
Παράδειγμα

- Έστω τρία διανύσματα $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$ τα μέτρα των οποίων είναι αντίστοιχα:
  - $α_1 = 300$,
  - $α_2 = 100$ και
  - $α_3 = 150\sqrt{3}$
- Οι κατευθύνσεις τους είναι αυτές που φαίνονται στο σχήμα.
- Επίσης δίνονται οι γωνίες
  - φ = 60° και
  - θ = 30°.
- Ζητείται να βρεθεί το άθροισμα $\mathbf{a} = \mathbf{a_1} + \mathbf{a_2} + \mathbf{a_3}$.



Παράδειγμα

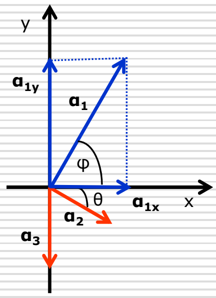
- Το σύστημα αξόνων δεν χρειάζεται να το αλλάξουμε αφού προφανώς είναι η πιο βολική επιλογή.
- Αναλύουμε όσα διανύσματα δεν βρίσκονται πάνω στους άξονες.



Παράδειγμα

- Πρώτα το $\mathbf{a_1}$:

$$a_{1x} = a_1 συνφ = 300 \cdot συν60° = 150$$
$$a_{1y} = a_2 ημφ = 300 \cdot ημ60° = 150\sqrt{3} \approx 259,8$$



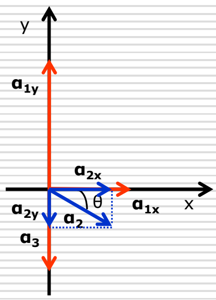
Παράδειγμα

- Πρώτα το $\mathbf{a_1}$:

$$a_{1x} = a_1 συνφ = 300 \cdot συν60° = 150$$
$$a_{1y} = a_2 ημφ = 300 \cdot ημ60° = 150\sqrt{3} \approx 259,8$$

- ...μετά το $\mathbf{a_2}$:

$$a_{2x} = a_2 συνθ = 100συν30° = 50\sqrt{3} \approx 86,6$$
$$a_{2y} = a_2 ημθ = 100ημ30° = 50$$



Παράδειγμα

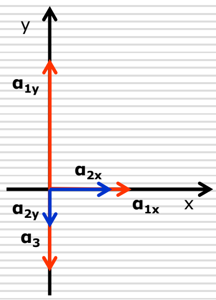
- Πρώτα το $\mathbf{a_1}$:

$$a_{1x} = a_1 συνφ = 300 \cdot συν60° = 150$$
$$a_{1y} = a_2 ημφ = 300 \cdot ημ60° = 150\sqrt{3} \approx 259,8$$

- ...μετά το $\mathbf{a_2}$:

$$a_{2x} = a_2 συνθ = 100συν30° = 50\sqrt{3} \approx 86,6$$
$$a_{2y} = a_2 ημθ = 100ημ30° = 50$$

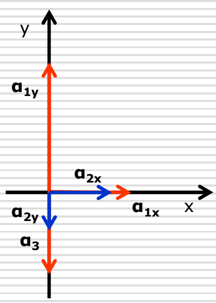
- Το $\mathbf{a_3}$ βρίσκεται πάνω στον άξονα y και συνεπώς δε χρειάζεται ανάλυση



Παράδειγμα

- Βρίσκουμε τις συνιστώσες του αθροίσματος (θεωρώντας θετικές φορές, τις φορές των αξόνων):
- στον άξονα x:

$$a_x = a_{1x} + a_{2x} + a_{3x} = 150 + 50\sqrt{3} + 0 \approx 236,6$$



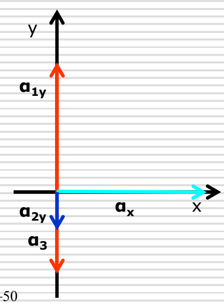
Παράδειγμα

- Βρίσκουμε τις συνιστώσες του αθροίσματος (θεωρώντας θετικές φορές, τις φορές των αξόνων):
- στον άξονα x:

$$a_x = a_{1x} + a_{2x} + a_{3x} = 150 + 50\sqrt{3} + 0 \approx 236,6$$

- ...στον άξονα y:

$$a_y = a_{1y} + a_{2y} + a_{3y} = 150\sqrt{3} + (-50) + \left(-150\sqrt{3}\right) = -50$$



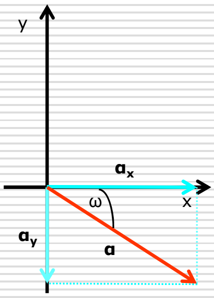
Παράδειγμα

- Το μέτρο του αθροίσματος είναι:

$$a=\sqrt{(a_x)^2+(a_y)^2}=$$
$$=\sqrt{(236{,}6)^2+(-50)^2}\approx 241{,}8$$

- Ενώ το διάνυσμα σχηματίζει γωνία ω με τον άξονα x τέτοια ώστε

$$\tan\omega=\frac{|a_y|}{a_x}=\frac{50}{236.6}\approx 0{,}211\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\omega\approx 11{,}93°$$



Αφαίρεση διανυσμάτων

- Η διαφορά **c** δύο διανυσμάτων **a** και **b** ορίζεται ως το διάνυσμα για το οποίο ισχύει:

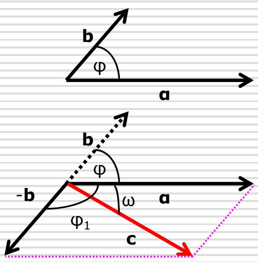
$$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$$

- Για τον υπολογισμό του διανύσματος μπορούμε να ακολουθήσουμε είτε την <u>αναλυτική</u> είτε τη <u>γεωμετρική μέθοδο</u>.
- Κατά την αναλυτική μέθοδο, ακολουθούμε τη διαδικασία που περιγράφηκε, μόνο που τώρα οι αντίστοιχες σχέσεις περιέχουν τη διαφορά των συνιστωσών και όχι το άθροισμα:

$$c_x=a_x-b_x$$
$$c_y=a_y-b_y$$

Αφαίρεση διανυσμάτων

- Κατά τη γεωμετρική μέθοδο, η αφαίρεση **c**= **a**-**b** ανάγεται σε δύο βήματα
  1. Υπολογίζουμε το αντίθετο του **b**, δηλαδή βρίσκουμε το -**b**, το οποίο υπενθυμίζεται ότι έχει το ίδιο μέτρο αλλά την αντίθετη κατεύθυνση, και
  2. προσθέτουμε στο **a** το -**b**, δηλαδή:
- **c** = **a** – **b** = **a** + (-**b**)



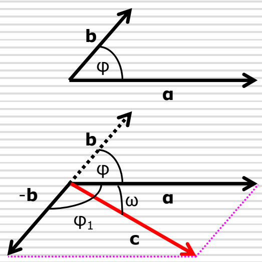
Αφαίρεση διανυσμάτων

- Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι τα διανύσματα **b** και –**b** έχουν το ίδιο μέτρο: |**b**|=|-**b**|=b, θα έχουμε:

$$c=\sqrt{a^2+b^2+2ab\sigma\upsilon\nu\phi_1}$$

- ενώ

$$\varepsilon\varphi\omega=\frac{b\eta\mu\phi_1}{a+b\sigma\upsilon\nu\phi_1}$$



Αφαίρεση διανυσμάτων

- Δεδομένου ότι

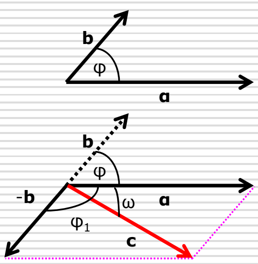
$$\phi_1=180°-\phi$$

- Και επειδή ισχύουν οι σχέσεις

$$\sigma\upsilon\nu\phi_1=\sigma\upsilon\nu(180°-\phi)=-\sigma\upsilon\nu\phi$$
$$\eta\mu\phi_1=\eta\mu(180°-\phi)=\eta\mu\phi$$

- Θα έχουμε τελικά:

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\sigma\upsilon\nu\phi}$$
$$\varepsilon\varphi\omega=\frac{b\eta\mu\phi}{a-b\sigma\upsilon\nu\phi}$$



Πολλαπλασιασμός με διανύσματα

- Επειδή τα διανύσματα έχουν μέτρο και κατεύθυνση, ο διανυσματικός πολλαπλασιασμός (όπως άλλωστε και η πρόσθεση) δεν μπορεί να ακολουθεί ακριβώς τους ίδιους κανόνες με τον πολλαπλασιασμό βαθμωτών μεγεθών.
- Για τον πολλαπλασιασμό διανυσμάτων πρέπει να καθιερωθούν νέοι κανόνες.

Πολλαπλασιασμός με διανύσματα

- Είναι χρήσιμο να ορίσουμε για τα διανύσματα τρία είδη πολλαπλασιασμού:
  1. Πολλαπλασιασμός διανύσματος με αριθμό (**βαθμωτός πολλαπλασιασμός**).
  2. Πολλαπλασιασμός δύο διανυσμάτων άλλα με τρόπο ώστε το αποτέλεσμα να είναι αριθμός (**εσωτερικό γινόμενο**).
  3. Πολλαπλασιασμός δύο διανυσμάτων άλλα με τρόπο ώστε το αποτέλεσμα να είναι διάνυσμα (**εξωτερικό γινόμενο**).
- Υπάρχουν και άλλες περιπτώσεις αλλά εμάς δε θα μας απασχολήσουν. Επίσης, για το πρώτο είδος πολλαπλασιασμού έχουμε ήδη αναφερθεί.
- Για καθαρά πρακτικούς λόγους θα χρησιμοποιήσουμε τρεις διαστάσεις και όχι δύο.

Εσωτερικό γινόμενο

- Έστω δύο διανύσματα **α**, **b** και φ η μεταξύ τους γωνία.
- Το εσωτερικό (ή αριθμητικό) γινόμενό τους, που συμβολίζεται με **α·b**, είναι ένας **αριθμός** που ορίζεται ως εξής:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\sigma\upsilon\nu\phi$$

- Χρησιμοποιώντας τις συνιστώσες των διανυσμάτων μπορούμε να γράψουμε το εσωτερικό γινόμενο και ως

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

Εσωτερικό γινόμενο

- Σημειώστε ότι το εσωτερικό γινόμενο κάθετων μεταξύ τους διανυσμάτων είναι ίσο με μηδέν:

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

- το εσωτερικό ενός διανύσματος με τον εαυτό του μας δίνει το τετράγωνο του μέτρου του:

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=a^2$$

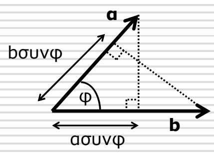
- ή γραμμένο διαφορετικά:

$$a=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{(a_x)^2+(a_y)^2+(a_z)^2}$$

Εσωτερικό γινόμενο

- Όπως μπορούμε να δούμε το εσωτερικό γινόμενο μπορεί να θεωρείται σαν το γινόμενο του μέτρου του ενός διανύσματος και της συνιστώσας του άλλου διανύσματος στη διεύθυνση του πρώτου.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\sigma\upsilon\nu\phi=$$
$$=a(b\sigma\upsilon\nu\phi)=ab_{\parallel}$$
$$=b(a\sigma\upsilon\nu\phi)=ba_{\parallel}$$

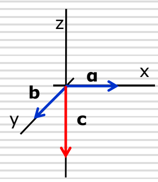


Εξωτερικό γινόμενο

- Έστω δύο διανύσματα **α**, **b** και φ η μεταξύ τους γωνία.
- Το εξωτερικό γινόμενό τους, είναι ένα **διάνυσμα** που συμβολίζεται ως εξής:

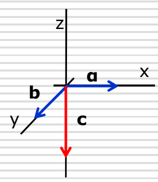
$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$$

- Το νέο διάνυσμα έχει διεύθυνση κάθετη προς το επίπεδο που ορίζουν τα **α** και **b**.



Εξωτερικό γινόμενο

- Ένας τρόπος για να βρούμε τη φορά του **c** είναι ο εξής: Θεωρούμε έναν άξονα κάθετο στο επίπεδο των **α** και **b** που να περνάει από την κοινή αρχή τους.
- Στρίβουμε τα δάχτυλα του δεξιού χεριού γύρω απ' αυτόν τον άξονα και 'σπρώχνουμε' με τα δάχτυλα από το **α** προς το **b** μέσω της μικρότερης μεταξύ τους γωνίας φ, κρατώντας τον αντίχειρα όρθιο.
- Η φορά του όρθιου αντίχειρα δίνει τη φορά του **c**.



Εξωτερικό γινόμενο

- Το μέτρο του εξωτερικού γινομένου είναι

$$c = |\vec{c}| = |\vec{a}\times\vec{b}| = ab\eta\mu\phi$$

- Για το εξωτερικό γινόμενο δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα, κι έτσι η σειρά των παραγόντων είναι σημαντική:

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$$

- Επίσης, αν τα δύο διανύσματα είναι παράλληλα (ομόρροπα ή αντίρροπα, φ = 0 ή φ = 180° αντίστοιχα), τότε επειδή ημφ = 0, θα είναι και c = 0 άρα και **c** = **0**.

$$\vec{a}\parallel\vec{b} \Rightarrow \vec{a}\times\vec{b} = 0$$

Εξωτερικό γινόμενο

- Ο αλγεβρικός ορισμός του εξωτερικού γινομένου με τη βοήθεια των συνιστωσών των διανυσμάτων δίνεται από τις διπλανές σχέσεις:

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y$$
$$c_y = a_z b_x - a_x b_z$$
$$c_z = a_x b_y - a_y b_x$$

- ή μέσω της διπλανής **συμβολικής** ορίζουσας:

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Ιδιότητες διανυσματικών πράξεων

- Θα αναφέρουμε τις σημαντικότερες από τις ιδιότητες που παρουσιάζουν οι διανυσματικές πράξεις.
- Σ' όλα τα παρακάτω, τα σύμβολα **a**, **b**, **c** θα παριστάνουν τυχαία διανύσματα. Με (a_x, a_y, a_z) παριστάνεται το διάνυσμα **a** με τη βοήθεια των συνιστωσών του, ομοίως και τα **b**, **c**.
- Επίσης, τα λ και μ παριστάνουν πραγματικούς αριθμούς.

Ιδιότητες βαθμωτού πολ/σμού

$$0\vec{a} = \vec{0} \qquad (-\lambda)\vec{a} = \lambda(-\vec{a}) = -\lambda\vec{a}$$
$$\lambda\vec{0} = \vec{0} \qquad \lambda\vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$
$$1\vec{a} = \vec{a} \qquad (\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$$
$$(-\lambda)(-\vec{a}) = \lambda\vec{a} \qquad (-1)\vec{a} = 1(-\vec{a}) = -\vec{a}$$

Ιδιότητες πρόσθεσης - αφαίρεσης

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$
$$\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$$
$$\vec{a}+(-\vec{a}) = 0$$
$$\vec{a}\pm\vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$
$$(-\vec{a})+(-\vec{b}) = -(\vec{a}+\vec{b})$$

Ιδιότητες εσωτερικού γινομένου

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$
$$\vec{a}\cdot\vec{a} \ge 0 \qquad (\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} \qquad (\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$$

$$\cos\phi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

Ιδιότητες εξωτερικού γινομένου

$$\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$$

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$$

$$\vec{a}\times\left(\lambda\vec{b}\right)=\left(\lambda\vec{a}\right)\times\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$$

Γενική Φυσική
Παρασκευή, 25 Ιουλίου 2014
4 – Διανυσματικός Λογισμός
© Κωνσταντίνος Χ. Παύλου
4-79

Βοηθητικοί ορισμοί

- Δισεξωτερικό γινόμενο:

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}$$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a}$$

- Μικτό γινόμενο:

$$[abc]=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)=\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=$$

$$=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Γενική Φυσική
Παρασκευή, 25 Ιουλίου 2014
4 – Διανυσματικός Λογισμός
© Κωνσταντίνος Χ. Παύλου
4-80