Γενική Φυσική

Κωνσταντίνος Χ. Παύλου
Φυσικός – Ραδιοηλεκτρολόγος (MSc)
2ο Γενικό Λύκειο Καστοριάς

Καστοριά, Ιούλιος 14

Γενική Φυσική

Α. Μαθηματική Εισαγωγή

- Πράξεις με αριθμούς σε εκθετική μορφή
- **Επίλυση βασικών μορφών εξισώσεων**
- Συναρτήσεις
- Στοιχεία τριγωνομετρίας
- Διανύσματα

Επίλυση βασικών μορφών εξισώσεων

1. Εξισώσεις 1ου βαθμού
2. Εξισώσεις 2ου βαθμού
3. Εξισώσεις 3ου βαθμού
4. Εξισώσεις 4ου βαθμού
5. Τριγωνομετρικές εξισώσεις
6. Εκθετικές εξισώσεις

Γενικά (1)

- Οι νόμοι της Φυσικής πολλές φορές (σχεδόν πάντα) εκφράζονται με εξισώσεις.
- Στο επίπεδο του Λυκείου οι εξισώσεις που μας απασχολούν **κυρίως** είναι οι εξισώσεις 1ου και 2ου βαθμού, με τις οποίες και θα ασχοληθούμε αναλυτικά παρακάτω.
- Θα αναφέρουμε επίσης τις τριγωνομετρικές καθώς και τις εκθετικές εξισώσεις.

Γενικά (2)

- Κατά την ανάπτυξη της θεωρίας θα χρησιμοποιήσουμε τον συνηθισμένο μαθηματικό συμβολισμό σύμφωνα με τον οποίο τα σύμβολα α, β, γ,… θα παριστάνουν γνωστές αριθμητικές ποσότητες (τους λεγόμενους συντελεστές), και το σύμβολο χ θα αντιστοιχεί στον άγνωστο της εξίσωσης, δηλ. στον αριθμό ή στο μέγεθος που ψάχνουμε να βρούμε.

Εξισώσεις 1ου βαθμού

- Μια εξίσωση της παρακάτω μορφής λέγεται **εξίσωση 1ου βαθμού** με **άγνωστο** τον χ και **συντελεστές** τα α και β:

$$a\chi + \beta = 0 \quad \mu\varepsilon \;\; \alpha \neq 0$$

- Πιο συγκεκριμένα, το α ονομάζεται **συντελεστής του αγνώστου** και το β **σταθερός όρος**.

Επίλυση εξίσωσης 1ου βαθμού (1)

Για την επίλυση μιας εξίσωσης 1ου βαθμού ενεργούμε ως εξής (προσέξτε ότι τα α και β θεωρούνται γνωστές ποσότητες):	
Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους.	$\alpha \cdot \chi = -\beta$
Διαιρούμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με τον συντελεστή του αγνώστου.	$\frac{\alpha \cdot \chi}{\alpha} = \frac{-\beta}{\alpha}$
Κάνουμε τις πράξεις και βρίσκουμε το αποτέλεσμα.	$\chi = -\frac{\beta}{\alpha}$

Επίλυση εξίσωσης 1ου βαθμού (2)

- Παρατηρήσεις
  - Γενικά, μαγικές συνταγές για τη επίλυση εξισώσεων δεν υπάρχουν.
  - Ούτε και ο τρόπος που είδαμε παραπάνω είναι μοναδικός.
  - Κάθε φορά ακολουθούμε όποιο δρόμο μας βολεύει.

Επίλυση εξίσωσης 1ου βαθμού (3)

- Ένα άλλο πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε κατά την επίλυση εξισώσεων στη Φυσική, είναι τα **σύμβολα**.
- Μαθαίνουμε στα Μαθηματικά, ότι τον άγνωστο τον συμβολίζουμε με χ ενώ τους συντελεστές με α, β, κλπ ενώ στη Φυσική τα σύμβολα είναι τελείως διαφορετικά.
- Για να αντεπεξέλθουμε σε τέτοιες καταστάσεις πρέπει να **αντιστοιχίσουμε** αυτά που ξέρουμε από τα Μαθηματικά με τα στοιχεία της Φυσικής.

Παράδειγμα από τη μηχανική (1)

- *Σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα μέτρου υ_0 = 10 m/s και επιτάχυνση μέτρου a = 5 m/s². Σε ποια χρονική στιγμή (t) το μέτρο της ταχύτητας θα είναι υ = 40 m/s ;*
- *Δίνεται η σχέση που συνδέει τα μεγέθη:*

$$\upsilon = \upsilon_0 + at$$

Παράδειγμα από τη μηχανική (2)

1. Προσπαθούμε να φέρουμε την εξίσωση στη βασική μορφή (με άγνωστο το t):

$$\mathrm{a}t + \upsilon_0 - \upsilon = 0$$

2. Ξεκαθαρίζουμε ποιος είναι ο συντελεστής του αγνώστου και ποιος ο σταθερός όρος:

$$\underbrace{\mathrm{a}}_{\alpha} \cdot \underbrace{t}_{x} + \underbrace{(\upsilon_0 - \upsilon)}_{\beta} = 0$$

Παράδειγμα από τη μηχανική (3)

Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους.	$\mathrm{a}t = -(\upsilon_0 - \upsilon)$
Διαιρούμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με τον συντελεστή του αγνώστου.	$\frac{\cancel{\mathrm{a}}t}{\cancel{\mathrm{a}}} = \frac{-(\upsilon_0 - \upsilon)}{\mathrm{a}}$
Κάνουμε τις πράξεις και βρίσκουμε το αποτέλεσμα.	$t = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{\mathrm{a}}$
Αντικαθιστούμε τις αριθμητικές τιμές και κάνουμε πράξεις **(τονίζεται το γεγονός ότι κατά την αντικατάσταση θα πρέπει να προσέξουμε και τις μονάδες μέτρησης των μεγεθών)**	$t = \frac{(40m/s)-(10m/s)}{(5m/s^2)} = \frac{(40-10)m/s}{5m/s^2} = \frac{30}{5} \cdot \frac{m/s}{m/s^2} = 6\frac{m \cdot s^2}{m \cdot s} = 6s$

Εξισώσεις 2ου βαθμού

- Οι εξισώσεις 2ου βαθμού έχουν τη μορφή:

$$ax^2+bx+c=0$$

- Για την επίλυσή τους σημαντικό ρόλο παίζει η διακρίνουσα

$$\Delta=b^2-4ac$$

Γενική Φυσική Σάββατο, 26 Ιουλίου 2014 | A - 13 | A . Μαθηματική εισαγωγή Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

Εξισώσεις 2ου βαθμού

1	Αν $\Delta>0$ τότε έχουμε δύο πραγματικές λύσεις διαφορετικές μεταξύ τους οι οποίες δίνονται από τη σχέση	$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$
2	Αν $\Delta=0$ τότε οι ρίζες είναι ίσες μεταξύ τους, δηλαδή έχουμε μία διπλή ρίζα την οποία υπολογίζουμε από τη σχέση	$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$
3	Αν $\Delta<0$ τότε **δεν** υπάρχουν πραγματικές ρίζες. Αντίθετα, έχουμε δύο **συζυγείς μιγαδικές ρίζες** τις οποίες βρίσκουμε από τη σχέση	$x_{1,2}=\frac{-b\pm j\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Η τελευταία αυτή περίπτωση δεν θα μας απασχολήσει και όποτε ισχύει $\Delta<0$ στην πράξη η εξίσωσή μας δεν θα έχει (πραγματική) λύση.

Γενική Φυσική Σάββατο, 26 Ιουλίου 2014 | A - 14 | A . Μαθηματική εισαγωγή Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

Εξισώσεις 2ου βαθμού

- Πολλές φορές συναντάμε την δευτεροβάθμια εξίσωση με **πιο απλή μορφή**.
- Δηλαδή κάποιος ή κάποιοι όροι της είναι μηδέν.
- Στην περίπτωση αυτή οι σχέσεις απλοποιούνται και οι ρίζες υπολογίζονται πολύ πιο εύκολα.
- Οι διάφορες περιπτώσεις συνοψίζονται παρακάτω:

Γενική Φυσική Σάββατο, 26 Ιουλίου 2014 | A - 15 | A . Μαθηματική εισαγωγή Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

Εξισώσεις 2ου βαθμού

- Αν **γ = 0** η εξίσωση γράφεται

$$ax^2+bx=0$$

- η οποία λύνεται με παραγοντοποίηση ως εξής:

$$ax^2+bx=0\Rightarrow x(\alpha x+b)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ \alpha x+b=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\ x_2=-\dfrac{b}{\alpha}\end{cases}$$

Γενική Φυσική Σάββατο, 26 Ιουλίου 2014 | A - 16 | A . Μαθηματική εισαγωγή Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

Εξισώσεις 2ου βαθμού

- Αν **β = 0** η εξίσωση γράφεται

$$ax^2+c=0$$

- η οποία λύνεται ως εξής:

$$ax^2+c=0\Rightarrow \alpha x^2=-c\Rightarrow\begin{cases}x_{1,2}=\pm\sqrt{-\dfrac{c}{\alpha}},\ \text{αν } \dfrac{c}{\alpha}<0\\ x_{1,2}=\pm j\sqrt{\dfrac{c}{\alpha}},\ \text{αν } \dfrac{c}{\alpha}>0\end{cases}$$

Γενική Φυσική Σάββατο, 26 Ιουλίου 2014 | A - 17 | A . Μαθηματική εισαγωγή Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

Εξισώσεις 2ου βαθμού

- Αν **β = γ = 0** η εξίσωση γράφεται

$$ax^2=0$$

- και προφανώς οι λύσεις είναι

$$x_1=x_2=0$$

Γενική Φυσική Σάββατο, 26 Ιουλίου 2014 | A - 18 | A . Μαθηματική εισαγωγή Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

Εξισώσεις 2ου βαθμού

- Σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα μέτρου υ_0 = 10 m/s και επιτάχυνση μέτρου a = 5 m/s^2. Σε πόσο χρόνο t το σώμα θα διανύσει διάστημα S = 150 m;
- Δίνεται: $S = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2$

Εξισώσεις 2ου βαθμού

- Πρέπει να φέρουμε την εξίσωση του διαστήματος στη βασική μορφή δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$\underbrace{\frac{1}{2}a}_{a}\,t^2 + \underbrace{\upsilon_0}_{b}\,t + \underbrace{(-S)}_{c} = 0$$

Εξισώσεις 2ου βαθμού

- Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα

$$\Delta = \upsilon_0^2 - 4\left(\frac{1}{2}a\right)(-S) = \upsilon_0^2 + 2aS =$$
$$= (10\,m/s)^2 + 2\left(5\,m/s^2\right)\left(150\,m\right) =$$
$$= 1600 m^2/s^2$$

Εξισώσεις 2ου βαθμού

- Όπως βλέπουμε είναι Δ > 0, άρα θα έχουμε δυο λύσεις

$$t_{1,2} = \frac{-\upsilon_0 \pm \sqrt{\Delta}}{2\left(\frac{1}{2}a\right)} = \frac{-(10\,m/s) \pm \sqrt{\left(1600\,m^2/s^2\right)}}{2\left[\frac{1}{2}\left(5\,m/s^2\right)\right]} =$$

$$= \frac{(-10 \pm 40)\,m/s}{5\,m/s^2} = \frac{(-10 \pm 40)}{5}s \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{-10+40}{5}s = 6s \\ t_2 = \frac{-10-40}{5}s = -10s \end{cases}$$

Εξισώσεις βαθμού > 2

- Σ' ό,τι αφορά στις πολυωνυμικές εξισώσεις υπάρχουν αλγόριθμοι επίλυσης χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις συναρτήσεις, μέχρι και για εξισώσεις 4ου βαθμού. *Για τις εξισώσεις 5ου βαθμού και πάνω έχει αποδειχθεί ότι δεν είναι δυνατόν να λυθούν χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις συναρτήσεις.*
- Όπως καταλαβαίνει κανείς οι σχέσεις για την επίλυση τέτοιων εξισώσεων είναι αρκετά πολύπλοκες και δύσχρηστες.

Εξίσωση 3ου βαθμού

- Η μία λύση (από τις τρεις) της εξίσωσης
$$x^3 + 3ax^2 + 3bx + c = 0$$
- είναι:

$$-a + \frac{\sqrt[3]{-2a^3 + 3ba - c + \sqrt{4ca^3 - 3b^2a^2 - 6bca + 4b^3 + c^2}}}{\sqrt[3]{2}} - \frac{\sqrt[3]{2}\,(9b - 9a^2)}{9\sqrt[3]{-2a^3 + 3ba - c + \sqrt{4ca^3 - 3b^2a^2 - 6bca + 4b^3 + c^2}}}$$

Τριγωνομετρικές Εξισώσεις

- Πολλές φορές είμαστε αναγκασμένοι να λύσουμε μια εξίσωση στην οποία ο άγνωστος βρίσκεται μέσα σε κάποιον τριγωνομετρικό αριθμό.
- Οι εξισώσεις αυτές ονομάζονται **τριγωνομετρικές εξισώσεις**.
- Οι εξισώσεις αυτές οδηγούν σε απειρίες λύσεων και τις περισσότερες φορές θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κάποιους περιορισμούς για να καταλήξουμε σε κάποιο συγκεκριμένο αριθμό αποδεκτών λύσεων.
- Παράδειγμα: Για ποια τιμή του χρόνου t είναι x=2,5;

$$x = 5\eta\mu\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Βασικές εξισώσεις

Εξισώσεις με το ημίτονο

$$\eta\mu\alpha = \eta\mu\theta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2k\pi + \theta \\ \alpha = (2k+1)\pi - \theta \end{cases}$$

$$\eta\mu\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = k\pi$$

$$\eta\mu\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\eta\mu\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

Εξισώσεις με το συνημίτονο

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2k\pi + \theta \\ \alpha = 2k\pi - \theta \end{cases}$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 2k\pi$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = (2k+1)\pi$$

Σ' όλες τις περιπτώσεις: $k \in \mathbb{Z},\ \delta\eta\lambda\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Βασικές εξισώσεις

Εξισώσεις με την εφαπτομένη

$$\varepsilon\varphi\alpha = \varepsilon\varphi\theta \Rightarrow \alpha = k\pi + \theta$$

$$\varepsilon\varphi\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = k\pi$$

Εξισώσεις με την συνεφαπτομένη

$$\sigma\varphi\alpha = \sigma\varphi\theta \Rightarrow \alpha = k\pi + \theta$$

$$\sigma\varphi\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

Σ' όλες τις περιπτώσεις: $k \in \mathbb{Z},\ \delta\eta\lambda\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Παράδειγμα

- Αν $x = 5\eta\mu\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$
- για ποια τιμή του χρόνου t είναι x=2,5;

$$2{,}5 = 5\eta\mu\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \frac{2{,}5}{5} = \eta\mu\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \frac{1}{2} = \eta\mu\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta\mu\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow = \eta\mu\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2t + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2t + \frac{\pi}{4} = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = k\pi - \frac{\pi}{24} \\ t = k\pi + \frac{7\pi}{24} \end{cases},\ \mu\varepsilon\ k \in \mathbb{Z},\ \delta\eta\lambda\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Παράδειγμα

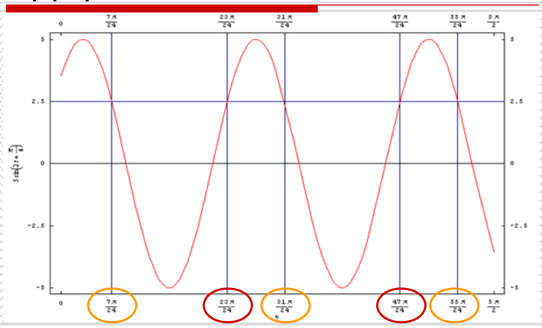
- Αν $x = 5\eta\mu\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$
- για ποια τιμή του χρόνου t είναι x=2,5;

$$2{,}5 = 5\eta\mu\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} t = k\pi - \frac{\pi}{24} \\ t = k\pi + \frac{7\pi}{24} \end{cases}\ \mu\varepsilon\ k \in \mathbb{Z},\ \delta\eta\lambda\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = k\pi - \frac{\pi}{24} \\ t = k\pi + \frac{7\pi}{24} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ldots, \cancel{t = -\frac{49\pi}{24}}, \cancel{t = -\frac{25\pi}{24}}, \cancel{t = -\frac{\pi}{24}}, t = \frac{23\pi}{24}, t = \frac{47\pi}{24}, \ldots \\ \ldots, \cancel{t = -\frac{41\pi}{24}}, \cancel{t = -\frac{17\pi}{24}}, t = \frac{7\pi}{24}, t = \frac{31\pi}{24}, t = \frac{55\pi}{24}, \ldots \end{cases}$$

(για $k = \ldots, -2, -1, 0, +1, +2, \ldots\ \alpha\nu\tau\acute{\iota}\sigma\tau o\iota\chi\alpha$)

Ερμηνεία των λύσεων...



Εκθετικές εξισώσεις

- Ένα ακόμη είδος εξισώσεων που θα συναντήσουμε είναι οι εκθετικές εξισώσεις της μορφής

$$y = Ae^{bx}$$

- οι οποίες λύνονται λογαριθμίζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης, αφού πρώτα διαιρέσουμε με τον συντελεστή της δύναμης

$$y = Ae^{bx} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{y}{A} = e^{bx} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln\left(\frac{y}{A}\right) = \ln e^{bx} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln\left(\frac{y}{A}\right) = bx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{1}{b}\ln\left(\frac{y}{A}\right)$$

Παράδειγμα

- Ας δούμε όμως ένα παράδειγμα από την **πυρηνική φυσική** για να τα ξεκαθαρίσουμε όλα αυτά:
- Αν τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ένα δείγμα ραδονίου έχει N_0 ραδιενεργούς πυρήνες και μετά από 15.2 μέρες έχει $N_0/16$ ραδιενεργούς πυρήνες, να βρείτε το χρόνο ημιζωής του ραδονίου.
- Γνωρίζουμε πως ο αριθμός των πυρήνων που έχουν μείνει αδιάσπαστοι δίνεται από τη σχέση

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

- όπου η σταθερά διάσπασης λ συνδέεται με το χρόνο ημιζωής μέσω της σχέσης

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

Παράδειγμα

- αν τον χρόνο (t) τον μετράμε σε μέρες έχουμε:

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\cancel{N_0}}{16} = \cancel{N_0} e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}}14} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{16} = e^{-\frac{14\ln 2}{T_{1/2}}} \Rightarrow \ln\frac{1}{16} = \ln e^{\frac{\ln 2^{-14}}{T_{1/2}}} \Rightarrow \ln 1 - \ln 16 = \frac{\ln 2^{-14}}{T_{1/2}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\ln 2^4 = \frac{\ln 2^{-14}}{T_{1/2}} \Rightarrow -4\cancel{\ln 2} = \frac{-14\cancel{\ln 2}}{T_{1/2}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow T_{1/2} = 3{,}5 \ \mu\acute{\varepsilon}\rho\varepsilon\varsigma$$