Γενική Φυσική

Κωνσταντίνος Χ. Παύλου
Φυσικός – Ραδιοηλεκτρολόγος (MSc)
2ο Γενικό Λύκειο Καστοριάς

Καστοριά, Ιούλιος 14

Γενική Φυσική

Α. Μαθηματική Εισαγωγή

- **Πράξεις με αριθμούς σε εκθετική μορφή**
- Επίλυση βασικών μορφών εξισώσεων
- Συναρτήσεις
- Στοιχεία τριγωνομετρίας
- Διανύσματα

Εισαγωγή (1)

- Η Φυσική είναι μία επιστήμη η οποία βασίζεται στα Μαθηματικά.
- Είναι σχεδόν αδύνατο να μελετήσουμε ένα φαινόμενο χωρίς τη χρήση έστω και στοιχειωδών γνώσεων μαθηματικών.
- Στο εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο θα αναφέρουμε ορισμένα βασικά στοιχεία που μας είναι απαραίτητα για την κατανόηση της Φυσικής.

Εισαγωγή (2)

- *Θα πρέπει να τονιστεί το γεγονός ότι οι διάφορες σχέσεις, ιδιότητες κλπ που εμφανίζονται στη μαθηματική αυτή εισαγωγή δεν αποδεικνύονται. Επίσης δεν υπάρχει ουσιώδης τεκμηρίωση (όλων) των αναγραφομένων.*
- Το κεφάλαιο αυτό λειτουργεί απλά ως μια μορφή "τυπολογίου" - ή αν θέλετε, ενός "τσελεμεντέ"...

Εκθετική μορφή αριθμών (1)

Συχνά συναντάμε αριθμούς που

- είτε είναι πολύ μεγάλοι
  - πχ η **ταχύτητα του φωτός** στο κενό:
    - c_0 = 300.000.000 m/s
- είτε είναι πολύ μικροί
  - πχ η **σταθερά Stefan-Boltzmann**:
    - σ = 0,0000000567032 W/(m²·K⁴)).

Εκθετική μορφή αριθμών (2)

- Για να διευκολυνθούμε χρησιμοποιούμε τη λεγόμενη **εκθετική** ή **επιστημονική γραφή.**
- Έτσι, οι προηγούμενοι αριθμοί γράφονται ως εξής:
  - $c_0 = 3\cdot10^8$ m/s
  - $\sigma = 5{,}67032\cdot10^{-8}$ W/(m²·K⁴).

Δυνάμεις (1)

- Αν c είναι ένας πραγματικός αριθμός και n είναι ένας (θετικός) φυσικός αριθμός τότε ορίζουμε ότι

$$c^n = \begin{cases} c, & n=1 \\ c \cdot c^{n-1}, & n>1 \end{cases}$$

- Το σύμβολο c^n ονομάζεται **δύναμη** με **βάση** το c και **εκθέτη** το n.

$$c^n = \underbrace{c \cdot c \cdot \ldots c}_{n\ \acute{o}\rho o\iota}$$

Γενική Φυσική Παρασκευή, 25 Ιουλίου 2014 A - 7 Α. Μαθηματική εισαγωγή Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

Δυνάμεις (2)

- Τον παραπάνω ορισμό μπορούμε να τον επεκτείνουμε και για ακέραιο εκθέτη (k)

$$\begin{cases} c^0 = 1 \\ c^{-k} = \dfrac{1}{c^k} \end{cases}$$

- Δυνάμεις με ρητό εκθέτη

$$c^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{c^m}$$

Γενική Φυσική Παρασκευή, 25 Ιουλίου 2014 A - 8 Α. Μαθηματική εισαγωγή Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

Δυνάμεις (3)

- Παραδείγματα
  a. $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$
  b. $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$

- Υπολογίστε τις παρακάτω δυνάμεις
  a. $(-2.4)^3 = ?$
  b. $(-3)^{-5} = ?$
  c. $(-\sqrt{3})^4 = ?$

Γενική Φυσική Παρασκευή, 25 Ιουλίου 2014 A - 9 Α. Μαθηματική εισαγωγή Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

Δυνάμεις (4)

- Θα παραθέσουμε ορισμένες **βασικές ιδιότητες των δυνάμεων**.
- Η απόδειξη των σχέσεων ξεφεύγει από τους σκοπούς μας αλλά μπορούν να βρεθούν σε οποιοδήποτε βιβλίο στοιχειώδους Άλγεβρας.

$$c^k \cdot c^l = c^{k+l}$$

$$\frac{c^k}{c^l} = c^{k-l}$$

$$\left(c^k\right)^l = c^{k \cdot l}$$

$$(c \cdot d)^k = c^k \cdot d^k$$

$$\left(\frac{c}{d}\right)^k = \frac{c^k}{d^k}$$

Θετικές δυνάμεις του 10

- Για να αναπτύξουμε μια θετική δύναμη του 10, γράφουμε τη μονάδα και δίπλα της τόσα μηδενικά, όσος είναι ο εκθέτης.
- Παραδείγματα
  a. $10^0 = 1$
  b. $10^1 = 10$
  c. $10^2 = 10 \cdot 10 = 100$
  d. $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$

Αρνητικές δυνάμεις του 10

- Για να αναπτύξουμε μια αρνητική δύναμη του 10, γράφουμε τόσα μηδενικά, όσος είναι ο εκθέτης και στη συνέχεια γράφουμε τη μονάδα. Ανάμεσα στο πρώτο και στο δεύτερο ψηφίο τοποθετούμε την υποδιαστολή.
- Παραδείγματα
  a. $10^{-1} = 1/10^1 = 1/10 = 0{,}1$
  b. $10^{-2} = 1/10^2 = 1/100 = 0{,}01$
  c. $10^{-3} = 1/10^3 = 1/1000 = 0{,}001$

Μετατροπή αριθμού σε δύναμη του 10

- Ένας αριθμός μεγαλύτερος από τη μονάδα γράφεται ως γινόμενο ενός αριθμού, μεγαλύτερου του 1 και μικρότερου του 10, και μιας δύναμης του 10 ίσης με τον αριθμό των ψηφίων του ακεραίου μέρους του αρχικού αριθμού, μείον ένα.
- Παραδείγματα
  a. $40 = 4 \cdot 10^1 = 4 \cdot 10$
  b. $-1427,93 = -1,42793 \cdot 10^3$
  c. $180 = 1,8 \cdot 10^2$
  d. $1656 = 165,6 \cdot 10^1 = 16,56 \cdot 10^2 = 1,656 \cdot 10^3$

Μεταφορά της υποδιαστολής αριστερά

- Όταν κάνουμε μια τέτοια μεταφορά διαιρούμε ουσιαστικά τον αριθμό με μια δύναμη του 10. Για να μην αλλάξει ο αριθμός πρέπει να τον πολλαπλασιάσουμε με την ίδια δύναμη του 10. Όσες θέσεις αριστερά μεταφέρουμε την υποδιαστολή, τόσος πρέπει να είναι και ο εκθέτης του 10.
- Παραδείγματα
  a. $32,5 = 3,25 \cdot 10^1$
  b. $-4,7 = -0,47 \cdot 10^1$
  c. $-907,3 = -90,73 \cdot 10^1 = -9,073 \cdot 10^2$
  d. $4070,8 = 40,708 \cdot 10^2 = 4,0708 \cdot 10^3$

Μεταφορά της υποδιαστολής δεξιά

- Όταν κάνουμε μια τέτοια μεταφορά πολλαπλασιάζουμε ουσιαστικά τον αριθμό με μια δύναμη του 10. Για να μην αλλάξει ο αριθμός πρέπει να τον διαιρέσουμε με την ίδια δύναμη του 10.
- Τελικά, παρουσιάζουμε τη δύναμη του 10 στον αριθμητή με αρνητικό εκθέτη.
- Παραδείγματα
  a. $0,4 = 4 \cdot 10^{-1}$
  b. $-0,0035 = -3,5 \cdot 10^{-3}$
  c. $0,028 = 2,8 \cdot 10^{-2}$
  d. $-5,32 = -53,2 \cdot 10^{-1}$

Γινόμενο δυνάμεων του ίδιου αριθμού

- Είναι δύναμη του ίδιου αριθμού με εκθέτη το άθροισμα των εκθετών.
- Παραδείγματα
  a. $10^2 \cdot 10^4 = 10^{2+4} = 10^6$
  b. $10^3 \cdot 10^{-7} = 10^{3+(-7)} = 10^{-4}$
  c. $(0{,}0003) \cdot (-0{,}000018) = (3 \cdot 10^{-4}) \cdot (-1{,}8 \cdot 10^{-5})$
     $= [3 \cdot (-1{,}8)] \cdot (10^{-4} \cdot 10^{-5})$
     $= (-5{,}4) \cdot 10^{-4+(-5)}$
     $= -5{,}4 \cdot 10^{-9}$

Πηλίκο δυνάμεων του ίδιου αριθμού

- Είναι δύναμη του ίδιου αριθμού με εκθέτη τη διαφορά των εκθετών.
- Μπορούμε πάντως να μετατρέψουμε το πηλίκο σε γινόμενο, αν φέρουμε τη δύναμη του παρονομαστή στον αριθμητή με αντίθετο εκθέτη.
- Παραδείγματα

$$\frac{10^{-6}}{10^{-2}} = 10^{-6-(-2)} = 10^{-4}$$

$$\frac{-0{,}004}{0{,}00025} = -\frac{4 \cdot 10^{-3}}{2{,}5 \cdot 10^{-4}} = \left(-\frac{4}{2{,}5}\right) \cdot \left(\frac{10^{-3}}{10^{-4}}\right) =$$
$$= (-1{,}6) \cdot 10^{-3-(-4)} = -1{,}6 \cdot 10^{1} = 16$$

$$\frac{10^{-6}}{10^{-2}} = 10^{-6} \cdot 10^{-(-2)} = 10^{-6+(+2)} = 10^{-4}$$

$$\frac{0{,}08}{0{,}00016} = \frac{8 \cdot 10^{-2}}{1{,}6 \cdot 10^{-4}} = \left(\frac{8}{1{,}6}\right) \cdot \left(10^{-2} \cdot 10^{-(-4)}\right) =$$
$$= 5 \cdot 10^{-2+4} = 5 \cdot 10^{2}$$

Δύναμη υψωμένη σε άλλη δύναμη

- Είναι δύναμη του ίδιου αριθμού με εκθέτη το γινόμενο των εκθετών.
- Στην περίπτωση αυτή συμπεριλαμβάνεται και ο υπολογισμός της ρίζας.
- Παραδείγματα

$$\left(10^{-3}\right)^2 = 10^{(-3)\cdot 2} = 10^{-6}$$

$$\left(10^{-3}\right)^{-2} = 10^{(-3)\cdot(-2)} = 10^{6}$$

$$\left(2{,}4 \cdot 10^{-3}\right)^2 = (2.4)^2 \cdot \left(10^{-3}\right)^2 = 5{,}76 \cdot 10^{-6}$$

$$\sqrt[3]{8 \cdot 10^{-9}} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{10^{-9}} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{\left(10^{-3}\right)^3} = 2 \cdot 10^{-3}$$

$$\sqrt{10^{-8}} = \left(10^{-8}\right)^{1/2} = 10^{(-8)\cdot(1/2)} = 10^{-4}$$

$$\sqrt{4 \cdot 10^{-8}} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{10^{-8}} = 2 \cdot 10^{-4}$$

$$\sqrt{10^9} = \sqrt{10 \cdot 10^8} = \sqrt{10} \cdot \sqrt{10^8} = \sqrt{10} \cdot \sqrt{\left(10^4\right)^2} = \sqrt{10} \cdot 10^4$$

Αλγεβρικά αθροίσματα (1)

- Για να προσθέσουμε αλγεβρικά δυνάμεις του ίδιου αριθμού **πρέπει ο εκθέτης τους να είναι ίδιος**. Το αποτέλεσμα είναι μία δύναμη του ίδιου αριθμού και με τον ίδιο εκθέτη, της οποίας συντελεστής είναι το αλγεβρικό άθροισμα των συντελεστών των αρχικών δυνάμεων.
- Παραδείγματα

$$2\cdot 10^{-7}+4\cdot 10^{-7}=\left(2+4\right)\cdot 10^{-7}=6\cdot 10^{-7}$$

$$-3,1\cdot 10^{-2}-6\cdot 10^{-2}=\left(-3,1-6\right)\cdot 10^{-2}=-9,1\cdot 10^{-2}$$

Αλγεβρικά αθροίσματα (2)

- **Αν ο εκθέτης των δυνάμεων δεν είναι ίδιος, θα μετατρέπουμε τις δυνάμεις σε νέες, ώστε ο εκθέτης να είναι ο ίδιος.**
- Παραδείγματα

$$1,8\cdot 10^{-5}+3,2\cdot 10^{-4}=\begin{cases}1,8\cdot 10^{-5}+32\cdot 10^{-5}=33,8\cdot 10^{-5}\\ 0,18\cdot 10^{-4}+3,2\cdot 10^{-4}=3,38\cdot 10^{-4}\end{cases}$$

$$0,04-8\cdot 10^{-4}=\begin{cases}400\cdot 10^{-4}-8\cdot 10^{-4}=392\cdot 10^{-4}\\ 4\cdot 10^{-2}-0,08\cdot 10^{-2}=3,92\cdot 10^{-2}\end{cases}$$

Πράξεις με δυνάμεις

- Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιαστεί σύντομα και με τη βοήθεια παραδειγμάτων ο τρόπος με τον οποίο γίνονται οι πράξεις, στην περίπτωση που οι αριθμοί που εμφανίζονται έχουν τη μορφή δυνάμεων (του 10), όταν δηλαδή έχουν τη μορφή 10^b.
- Υπενθυμίζεται ότι το a ονομάζεται **συντελεστής** της δύναμης 10^b.
- Στην πραγματικότητα τα περισσότερα απ' αυτά έχουν ειπωθεί παραπάνω και απλά εδώ κωδικοποιούνται για πιο εύκολη χρήση.

Πολλαπλασιασμός

- Για να πολλαπλασιάσουμε δύο αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τους συντελεστές τους και ο αριθμός που προκύπτει έχει ως εκθέτη το άθροισμα των δύο αρχικών εκθετών.
- Παραδείγματα

$$\left(-3,5\cdot10^{-4}\right)\cdot\left(-7,9\cdot10^{-8}\right)=\left[(-3,5)\cdot(-7,9)\right]\cdot\left[10^{-4}\cdot10^{-8}\right]=$$
$$=(27,65)\cdot10^{(-4)+(-8)}=$$
$$=27,65\cdot10^{-12}=2,765\cdot10^{-11}$$

$$\left(9\cdot10^{9}\right)\cdot\left(1,6\cdot10^{-19}\right)\cdot\left(\sqrt{2}\cdot10^{2}\right)=\left(9\cdot1,6\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(10^{9}\cdot10^{-19}\cdot10^{2}\right)=$$
$$=\left(14,4\cdot\sqrt{2}\right)\cdot10^{9+(-19)+2}=$$
$$=14,4\cdot\sqrt{2}\cdot10^{-8}=1,44\cdot\sqrt{2}\cdot10^{-7}$$

Διαίρεση

- Για να διαιρέσουμε δύο αριθμούς, διαιρούμε τους συντελεστές τους και ο αριθμός που προκύπτει έχει ως εκθέτη τη διαφορά των δύο αρχικών εκθετών (εκθέτης αριθμητή μείον εκθέτη του παρανομαστή).
- Παραδείγματα

$$\frac{-3,5\cdot10^{-4}}{-7\cdot10^{-6}}=\left(\frac{-3,5}{-7}\right)\cdot\left(\frac{10^{-4}}{10^{-6}}\right)=(0,5)\cdot10^{(-4)-(-6)}=$$
$$=0,5\cdot10^{2}=2\cdot10^{1}=20$$

$$\frac{1,6\cdot10^{-19}}{2,16\cdot10^{-4}}=\left(\frac{1,6}{0,16}\right)\cdot10^{(-19)-(-4)}=10\cdot10^{-15}=1\cdot10^{-14}=10^{-14}$$

Πρόσθεση

- Για να προσθέσουμε δύο αριθμούς πρέπει οι εκθέτες των δυνάμεων να είναι ίδιοι. Το αποτέλεσμα έχει ως συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών . Ο εκθέτης της δύναμης είναι ο ίδιος. **Αν ο εκθέτης των δυνάμεων δεν είναι ίδιος, θα μετατρέπουμε τις δυνάμεις σε νέες, ώστε ο εκθέτης να είναι ο ίδιος.**
- Παραδείγματα

$$\left(-3,5\cdot10^{3}\right)+\left(5\cdot10^{3}\right)=(-3,5+5)\cdot10^{3}=1,5\cdot10^{3}$$

$$1,6\cdot10^{-19}+\sqrt{2}\cdot10^{-19}=\left(1,6+\sqrt{2}\right)\cdot10^{-19}$$

$$0,006+5\cdot10^{-4}=6\cdot10^{-3}+5\cdot10^{-4}=\begin{cases}60\cdot10^{-4}+5\cdot10^{-4}=65\cdot10^{-4}\\ 6\cdot10^{-3}+0,5\cdot10^{-3}=6,5\cdot10^{-3}\end{cases}$$

Αφαίρεση

- Για να αφαιρέσουμε δύο αριθμούς πρέπει οι εκθέτες των δυνάμεων να είναι ίδιοι. Το αποτέλεσμα έχει ως συντελεστή τη διαφορά των συντελεστών . Ο εκθέτης της δύναμης είναι ο ίδιος. **Αν ο εκθέτης των δυνάμεων δεν είναι ίδιος, θα μετατρέπουμε τις δυνάμεις σε νέες, ώστε ο εκθέτης να είναι ο ίδιος.**
- Παραδείγματα

$$\left(-3,5\cdot 10^{3}\right)-\left(5\cdot 10^{3}\right)=\left(-3,5-5\right)\cdot 10^{3}=-8,5\cdot 10^{3}$$

$$1,6\cdot 10^{-19}-\sqrt{2}\cdot 10^{-19}=\left(1,6-\sqrt{2}\right)\cdot 10^{-19}$$

$$0,006-5\cdot 10^{-4}=6\cdot 10^{-3}-5\cdot 10^{-4}=\begin{cases}60\cdot 10^{-4}-5\cdot 10^{-4}=55\cdot 10^{-4}\\ 6\cdot 10^{-3}-0,5\cdot 10^{-3}=5,5\cdot 10^{-3}\end{cases}$$

Υπολογισμός τετραγωνικής ρίζας

- Για τον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας αρκεί να γράψουμε την υπόριζη ποσότητα ως μια δύναμη του 2. **Είναι πολύ συνηθισμένο ένας αριθμός να μην έχει ακέραια ρίζα. Σ' αυτή την περίπτωση προσπαθούμε να γράψουμε τον αριθμό αυτό ως γινόμενο αριθμών που ξέρουμε τη ρίζα τους (για όσο το δυνατόν περισσότερους απ' αυτούς)**
- Παραδείγματα

$$\sqrt{25\cdot 10^{-8}}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{10^{-8}}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{\left(10^{-4}\right)^{2}}=\pm 5\cdot 10^{-4}$$

$$\sqrt{62,5\cdot 10^{-9}}=\sqrt{625\cdot 10^{-10}}=\sqrt{625}\cdot\sqrt{10^{-10}}=\sqrt{625}\cdot\sqrt{\left(10^{-5}\right)^{2}}=\pm 25\cdot 10^{-5}$$

$$\sqrt{7,5\cdot 10^{-7}}=\sqrt{75\cdot 10^{-8}}=\sqrt{75}\cdot\sqrt{10^{-8}}=\sqrt{3\cdot 25}\cdot\sqrt{\left(10^{-4}\right)^{2}}=\pm 5\sqrt{3}\cdot 10^{-4}$$